Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Л. Добрушин, С. Б. Шлосман, Гиббсовское описание “негиббсовских” полей,
УМН, 1997, том 52, выпуск 2, 45–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 03:15:14

УДК 519.2

ГИББСОВСКОЕ ОПИСАНИЕ “НЕГИББСОВСКИХ” ПОЛЕЙ

Р. Л. Добрушин, С. Б. Шлосман

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	46
§ 2. Конструкция потенциала	50
§ 3. “Негиббсовость” проекции $P_T^{\beta,+}$ и теорема о мениске	54
Список литературы	58

Предисловие С. Б. Шлосмана. Мне выпала печальная задача закончить одну из работ Роланда Львовича Добрушина, которой он посвятил последние месяцы своей жизни. Замысел этой работы возник у Р. Л. Добрушина довольно давно, и он неоднократно обсуждал со мной ее детали. Движущая сила замысла содержится в тезисе: “Всякое физически естественное случайное поле является гиббсовским”, который Р. Л. Добрушин неоднократно высказывал. Начальным толчком к работе стало появление (около десяти лет назад) примеров полей, которые в некотором смысле этому тезису противоречат.

Сохранилось два варианта рукописи Добрушина. Первый вариант относится к случаю ограничения $(+)$ -фазы двумерной модели Изинга на произвольное счетное подмножество двумерной решетки. Желая подготовить к конференции в Голландии (Ренкум, август 1996 — последняя конференция, в которой Р. Л. участвовал) законченный текст, Р. Л. Добрушин стал работать над изложением более простого частного случая, когда счетное подмножество представляет собой одномерную подрешетку. Оба варианта остались незаконченными. Мне пришлось изменить формулировки некоторых утверждений, а также добавить несколько новых. Я думаю, что окончательный вариант работы Добрушина также содержал бы такого рода изменения, хотя почти наверное они имели бы иной вид.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 930101470).

Работа второго автора также частично поддержана Международным научным фондом (грант DMS9500958).

Данная публикация содержит формулировки основных определений и утверждений, соответствующих второму варианту работы Р. Л. Добрушина. Полный текст будет опубликован позднее. Это же относится к первому варианту добрушинской работы.

§ 1. Введение

В последнее время было обнаружено, что некоторые естественные функционалы от гиббсовских полей, типа используемых в ренормгрупповом подходе, могут оказаться негиббсовскими. Это удивительное обстоятельство интенсивно обсуждается в литературе (см. замечательный обзор Ван Энтера, Фернандеса и Сокала [1], недавнюю работу Ван Энтера, Фернандеса и Котецкого [2] и цитируемую там литературу).

Для того, чтобы сформулировать результат более точно, введем некоторые обозначения. Пусть T – счетное множество, а X – конечное множество. Для любых подмножеств $V' \subset V \subseteq T$ и произвольной конфигурации $x_V \in X^V$ обозначим через $x_{V'}$ ограничение $x_V|_{V'} \in X^{V'}$ конфигурации x_V на V' . Если $V_1, V_2 \subseteq T$ – непересекающиеся подмножества и $x_{V_1} \in X^{V_1}, x_{V_2} \in X^{V_2}$ – пара конфигураций, то конфигурация $\tilde{x} \in X^{V_1 \cup V_2}$ такая, что ее ограничение $\tilde{x}|_{V_1}$ на V_1 совпадает с x_{V_1} , а ограничение $\tilde{x}|_{V_2}$ на V_2 совпадает с x_{V_2} , будет обозначаться через $x_{V_1 \cup V_2}$.

Гиббсовским потенциалом $\mathcal{U} = (U_A(x_A), A \subset T, 0 < |A| < \infty)$ называется система вещественных функций $U_A(x_A)$ от конфигураций $x_A \in X^A$, индексированная системой всех конечных непустых подмножеств $A \subset T$. При этом для каждого $t \in T$ предполагается абсолютная сходимость ряда

$$(1.1) \quad \sum_{A \subset T: t \in A, |A| < \infty} \max_{x_A \in X^A} |U_A(x_A)| < \infty.$$

Для любого конечного множества $V \subset T$, любой конфигурации $x_V \in X^V$ в V и любой конфигурации $\bar{x}_{T \setminus V} \in X^{T \setminus V}$ вне V , называемой *граничным условием*, рассмотрим *относительную энергию*

$$(1.2) \quad E_V^{\mathcal{U}}(x_V / \bar{x}_{T \setminus V}) = \sum_{A \subseteq V, A \neq \emptyset} U_A(x_A) + \sum_{\substack{A \subset T: A \cap V \neq \emptyset, \\ A \cap (T \setminus V) \neq \emptyset, |A| < \infty}} U_A(x_{A \cap V} \cup \bar{x}_{A \cap (T \setminus V)}).$$

Условие (1.1) обеспечивает сходимость рядов в (1.2) для всех граничных условий $\bar{x}_{T \setminus V}$ и всех конфигураций x_V . Рассмотрим распределение вероятностей

$$(1.3) \quad p_V^{\mathcal{U}}(x_V / \bar{x}_{T \setminus V}) = \frac{\exp\{-E_V^{\mathcal{U}}(x_V / \bar{x}_{T \setminus V})\}}{Z_V^{\mathcal{U}}(\bar{x}_{T \setminus V})}.$$

Нормирующий множитель

$$(1.4) \quad Z_V^{\mathcal{U}}(\bar{x}_{T \setminus V}) = \sum_{x_V \in X^V} \exp\{-E_V^{\mathcal{U}}(x_V / \bar{x}_{T \setminus V})\}$$

называется *статсуммой*. Подчеркнем, что *переходные функции* $p_V(x_V/\bar{x}_{T\setminus V})$ определены для всех конфигураций x_V и всех граничных условий $\bar{x}_{T\setminus V}$. Система переходных функций $p^{\mathcal{U}} = \{p_V^{\mathcal{U}}(x_V/\bar{x}_{T\setminus V}), x_V \in X^V, \bar{x}_{T\setminus V} \in X^{T\setminus V}, |V| < \infty\}$ называется *гиббсовской спецификацией для потенциала $\mathcal{U}$* . Для каждого подмножества $W \subseteq T$ рассмотрим наименьшую σ -алгебру подмножеств множества X^T , относительно которой измеримы все координатные функции $x_t, t \in W$. Обозначим ее через $\mathfrak{B}_W$. Вероятностная мера $\mathbf{P}$ на измеримом пространстве $(X^T, \mathfrak{B}_T)$ называется *согласованной с гиббсовской спецификацией $p^{\mathcal{U}}$* , если для любого конечного подмножества $V \subset T$, любой функции $\varphi(x_V)$ на X^V и любого подмножества $B \in \mathfrak{B}_{T\setminus V}$ справедливо равенство

$$(1.5) \quad \int_B \varphi(x_V) \mathbf{P}(dx) = \int_B \left(\sum_{x_V \in X^V} \varphi(x_V) p_V^{\mathcal{U}}(x_V/\bar{x}_{T\setminus V}) \right) \mathbf{P}_{T\setminus V}(d\bar{x}_{T\setminus V}),$$

где $\mathbf{P}_{T\setminus V}$ – ограничение меры $\mathbf{P}$ на σ -алгебру $\mathfrak{B}_{T\setminus V}$. Вероятностная мера $\mathbf{P}$ называется “*негиббсовской*”, если не существует потенциала $\mathcal{U}$, удовлетворяющего условию (1.1), такого что мера $\mathbf{P}$ согласована с гиббсовской спецификацией $p^{\mathcal{U}}$.

Ограничимся для определенности функционалами типа децимации от $(+)$ -фазы двумерной ферромагнитной симметричной низкотемпературной модели Изинга. Напомним соответствующие определения. Пусть $T = \mathbb{Z}^2$ и $X = \{1, -1\}$. Рассмотрим вероятностную меру $\mathbf{P}^{\beta,+}$ на пространстве $(X^{\mathbb{Z}^2}, \mathfrak{B}_{\mathbb{Z}^2})$, определяемую нижеследующей обычной конструкцией. Пусть $V \subset \mathbb{Z}^2$ – произвольное конечное подмножество. Мы определим меру $P_V^{\beta,+}(x_V), x_V \in X^V$, являющуюся ограничением меры $\mathbf{P}^{\beta,+}$ на σ -алгебру $\mathfrak{B}_V$. Пусть $W_N, N = 1, 2, \dots$, – последовательность решетчатых квадратов, $W_N = \{t = (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2 : |t_1| \leq N, |t_2| \leq N\}$. Тогда

$$(1.6) \quad P_V^{\beta,+}(x_V) = \lim_{N \rightarrow \infty: V \subseteq W_N} \sum_{x_{W_N} \in X^{W_N} : x_{W_N}|_V = x_V} p_{W_N}^{\beta,+}(x_{W_N}), \quad x_V \in X^V.$$

Здесь $p_W^{\beta,+}, W \subset \mathbb{Z}^2, |W| < \infty$, – гиббсовская спецификация, соответствующая модели Изинга с $(+)$ -граничными условиями; иными словами,

$$(1.7) \quad p_W^{\beta,+}(x_W) = \frac{\exp\{-\beta E^+(x_W)\}}{Z_W^{\beta,+}},$$

где

$$(1.8) \quad E^+(x_W) = - \sum_{(s,t) \subseteq W: |s-t|=1} x_s x_t - \sum_{(s,t): s \in W, t \in W^c, |s-t|=1} x_s,$$

$$(1.9) \quad Z_W^{\beta,+} = \sum_{x_W \in X^W} \exp\{-\beta E^+(x_W)\},$$

а $W^c = \mathbb{Z}^2 \setminus W$. Хорошо известно, что пределы (1.6) существуют. В силу теоремы Колмогорова система распределений вероятностей $P_V^{\beta,+}, V \subset \mathbb{Z}^2, |V| < \infty$, определяет, причем единственным способом, меру $\mathbf{P}^{\beta,+}$.

Пусть $T \subseteq \mathbb{Z}^2$ – счетное множество. Рассмотрим преобразование $\Pi_T: X^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow X^T$: $x = (x_t, t \in \mathbb{Z}^2) \mapsto \Pi_T x = (x'_t, t \in T)$ такое, что $x_t = x'_t$ при всех $t \in T$. Оно переводит меру $\mathbf{P}^{\beta,+}$ в меру $\mathbf{P}_T^{\beta,+}$ на пространстве $(X^T, \mathfrak{B}_T)$:

$$(1.10) \quad \mathbf{P}_T^{\beta,+}(B) = \mathbf{P}^{\beta,+}(\Pi_T^{-1}B), \quad B \in \mathfrak{B}_T.$$

Эта мера называется *проекцией изинговской меры $\mathbf{P}^{\beta,+}$ на T* . Если $T = b\mathbb{Z}^2$, b – целое, есть подрешетка, то описанное преобразование называется *децимацией с шагом b* . Это одно из преобразований, используемых в методе ренормгруппы. Важный результат Ван Энтера, Фернандеса и Сокала [1], обобщающий результаты Гриффитса–Пирса [3], [4] и Израэля [5], состоит в том, что децимация $\mathbf{P}_T^{\beta,+}$ низкотемпературной меры Изинга с любым шагом $b \geq 2$ является “негиббсовской” мерой. Другой важный результат получил ранее Р. Шонманн [6]. Он доказал, что “негиббсовской” является мера $\mathbf{P}_T^{\beta,+}$ с $T = \{t = (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2 : t_2 = 0\}$. Ниже мы будем называть это множество *линией*. Число остроумных примеров “негиббсовских” мер растет. Иногда эти примеры приводят в качестве доказательства наличия патологий у метода ренормгруппы. Такой вывод делается потому, что тезис о сохранении гиббсовости всяким естественным преобразованием является фундаментальным для общепринятой физической (нестрогой) теории ренормгруппы.

Приведенные выше математические результаты очень интересны. Кажется, однако, что используемая терминология несколько искажает суть возникающей здесь проблемы. Разумеется, свойство (1.1) потенциала весьма удобно, когда оно выполнено, однако для концепции гиббсовского поля оно не является внутренне необходимым. Также нет необходимости требовать, чтобы гиббсовские переходные функции (1.3) были определены для всех граничных условий $\bar{x}_{T \setminus V}$; достаточно предполагать, что они определены лишь почти всюду. Такая точка зрения является даже неизбежной в случае некомпактного пространства X , например когда $X = \mathbb{R}^1$. Гауссовские трансляционно-инвариантные поля, например, являются гиббсовскими с потенциалом $\mathcal{U} = (U_A(x_A), A \subset \mathbb{Z}^d, |A| < \infty)$, задаваемым соотношением

$$(1.11) \quad U_A(x_X) = \begin{cases} c_{s-t}x_sx_t, & \text{если } A = \{s, t\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

для некоторых неотрицательных констант $c_{s-t} = c_{t-s}$ (см. [7]). Ясно, что если все они отличны от нуля, то ряды, входящие в определение (1.2) относительной энергии, расходятся для некоторых граничных условий $\bar{x}_{V^c}$, а посему гиббсовская спецификация не может быть разумно определена для всех граничных условий. В случае конечного множества X такой выход может показаться на первый взгляд экзотическим. Однако подход с использованием спецификаций, определенных почти всюду, представляется разумной альтернативой “негиббсовости”, которая, как мы видим, возникает в самых простых ситуациях. Во всяком случае, физическая интуиция теории ренормгруппы достаточно расплывчата и совместима с подобной интерпретацией гиббсовских состояний.

Говоря точнее, пусть снова T – счетное множество, а X конечно. Потенциалом мы, как и прежде, будем называть семейство $\mathcal{U} = (U_A(x_A), A \subset T, |A| < \infty)$, но условие (1.1) мы существенно ослабим. Для каждого конечного $V \subset T$

обозначим через $\overline{X}_V^{\mathcal{U}} \in \mathfrak{B}_{T \setminus V}$ множество таких граничных условий $\overline{x}_{T \setminus V}$, для которых ряд в (1.2) сходится абсолютно для всех $x_V \in X^V$. (Множество $\overline{X}_V^{\mathcal{U}}$ может быть пустым.) Для конфигураций $\overline{x}_{T \setminus V} \in \overline{X}_V^{\mathcal{U}}$ распределение вероятностей $p_V^{\mathcal{U}}(x_V / \overline{x}_{T \setminus V})$ можно снова определить равенством (1.3). Систему переходных функций $p^{\mathcal{U}} = \{p_V^{\mathcal{U}}(x_V / \overline{x}_{T \setminus V}), x_V \in X^V, \overline{x}_{T \setminus V} \in \overline{X}_V^{\mathcal{U}}, V \subset T, |V| < \infty\}$ мы назовем *частично определенной гиббсовской спецификацией с потенциалом $\mathcal{U}$* . Вероятностная мера P на измеримом пространстве $(X^T, \mathfrak{B}_T)$ будет называться *согласованной с частично определенной гиббсовской спецификацией $p^{\mathcal{U}}$* , если для любого подмножества $V \subset T$ вероятность

$$(1.12) \quad P_{T \setminus V}(\overline{X}_V^{\mathcal{U}}) = 1$$

и равенство (1.5) выполняется для любой функции $\varphi(x_V)$ на X^V и любого множества $B \in \mathfrak{B}_{T \setminus V}$, такого что $B \subseteq \overline{X}_V^{\mathcal{U}}$.

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 1.1. *Рассмотрим случай, когда множество T является линией:*

$$(1.13) \quad T = \{t = (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2 : t_2 = 0\}.$$

В этом случае можно указать значение $\beta_0 < \infty$ такое, что для каждого $\beta > \beta_0$ найдется гиббсовский потенциал $\mathcal{U}_T^\beta = \{U_A^\beta(x_A), x_A \in X^A, A \subset T, |A| < \infty\}$, для которого проекция $P_T^{\beta,+}$ изинговской меры $P^{\beta,+}$ согласована с частично определенной гиббсовской спецификацией $p^{\mathcal{U}_T^\beta}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Аналогичная конструкция применима и к проекции $(-)$ -фазы. Мы получаем, тем самым, утверждение о ее согласованности с частично определенной гиббсовской спецификацией, соответствующей потенциалу, получающемуся из $\mathcal{U}_T^\beta$ заменой $x_t \leftrightarrow -x_t, t \in T$. Для больших β эти потенциалы не совпадают. Кажется правдоподобным, что общего потенциала, описывающего сразу обе проекции, не существует. Если это так, то это означало бы многозначность преобразования ренормгруппы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В данной работе приводятся результаты только об одном “негиббсовском” поле, которое можно описать как гиббсовское поле с частично определенной спецификацией. По-видимому, такие спецификации существуют и в других естественных “негиббсовских” примерах. Для нас существенно только, что T — одномерная линия решетки $\mathbb{Z}^d, d > 1$, и что рассматривается проекция на T гиббсовского поля, которое можно исследовать с помощью контурного метода и техники кластерных разложений. Случай, когда T — это подрешетка конечного индекса, является, по-видимому, более сложным. Он будет рассмотрен в другой публикации.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. При обсуждениях данной работы высказывалось соображение о том, что класс гиббсовских полей с частично определенными спецификациями слишком обширен и мы почти ничего не знаем о свойствах этих полей. Тут можно заметить, что и об обычных гиббсовских полях с потенциалами, удовлетворяющими только оценке (1.1), мы знаем очень немного. А именно, мы имеем общую теорему существования, теорему единственности в высокотемпературной области и отдельные

примеры фазовых переходов в низкотемпературной области. Но такие утверждения можно доказать и для гиббсовских полей с частично определенными спецификациями.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Тот факт, что для гиббсовости меры P достаточно иметь спецификацию, определенную P -почти всюду, отмечался в работах Козлова [8] и Гуревича и Сухова [9].

§ 2. Конструкция потенциала

Доказательство теоремы 1.1 состоит в явном предъявлении потенциала $\mathcal{U}_T^\beta$. В этом разделе мы опишем его конструкцию.

Введем обозначение: для конфигурации $x_V = (x_t, t \in V) \in X^V$ в сосуде V определим подмножества $x_V^+, x_V^- \subset V$ формулой

$$(2.0) \quad x_V^+ = \{t \in V : x_t = 1\}, \quad x_V^- = \{t \in V : x_t = -1\}.$$

Хорошо известно (см. [10] или [1]), что разные гиббсовские потенциалы могут порождать совпадающие спецификации. Имеется, однако, класс потенциалов, определяемых по спецификации единственным и даже в некотором смысле конструктивным способом. Это так называемые вакуумные потенциалы. Они особенно естественны для полей с двумя значениями, из которых в основном принимается лишь одно. В рассматриваемом случае изинговской меры $P^{\beta,+}$ с большим значением обратной температуры β таким доминирующим значением является $+1$. Мы будем интерпретировать точки $t \in x_V^-$ как узлы, занятые частицами, а точки $t \in x_V^+$ — как узлы, заполненные вакуумом.

Ниже мы будем называть гиббсовский потенциал $\mathcal{U} = (U_A(x_A), A \subset T, 0 < |A| < \infty)$ *вакуумным*, если

$$(2.1) \quad U_A(x_A) = \begin{cases} U_A & \text{при } x_A^- = A, \\ 0 & \text{для всех остальных } x_A \in X^A, \end{cases}$$

где $\{U_A, A \subset T, 0 < |A| < \infty\}$ — совокупность вещественных чисел. Число U_A имеет смысл $|A|$ -частичного взаимодействия между частицами, заполняющими все множество A .¹ Мы будем искать потенциал $\mathcal{U}_T^\beta$, существование которого утверждается теоремой 1.1, в классе вакуумных потенциалов. Разумно положить $U_\emptyset = 0$ для случая $A = \emptyset$.

Конструктивный способ восстановления значений U_A вакуумного потенциала по распределению гиббсовского поля со значениями в множестве $X = \{1, -1\}$ состоит в следующем. Пусть W — конечный объем, а p_W — распределение вероятностей на множестве X^W . Предположим, что p_W — гиббсовское распределение, соответствующее вакуумному потенциалу $U = \{U_A, A \subseteq W\}$. Это означает, что

$$(2.2) \quad p_W(x_W) = \frac{\exp\left\{-\sum_{A: A \subseteq x_W^-} U_A\right\}}{Z_W^U}, \quad x_W \in X^W,$$

¹Здесь и далее $|A|$ — число элементов в конечном множестве A .

где статсумма

$$(2.3) \quad Z_W^U = \sum_{x_W \in X^W} \exp \left\{ - \sum_{A: A \subseteq x_W^-} U_A \right\}.$$

Пусть $D \subset W$, конфигурация $\bar{x}_{W \setminus D}^\emptyset$ – это “вакуумная” конфигурация на $W \setminus D$, т.е. $(\bar{x}_{W \setminus D}^\emptyset)^+ = W \setminus D$, а $\hat{x}_D \in X^D$ – конфигурация полного заполнения: $(\hat{x}_D)^- = D$. Из (2.2) следует, что

$$(2.4) \quad p_W(\hat{x}_D \cup \bar{x}_{W \setminus D}^\emptyset) = \frac{\exp \left\{ - \sum_{A: A \subseteq D} U_A \right\}}{Z_W^U}.$$

Для вакуумной конфигурации $x_D^\emptyset$ на D , определяемой равенством $(x_D^\emptyset)^+ = D$, соотношение (2.4) показывает, что

$$(2.5) \quad p_W(x_D^\emptyset \cup \bar{x}_{W \setminus D}^\emptyset) = (Z_W^U)^{-1}.$$

Из соотношений (2.4) и (2.5) следует, что

$$(2.6) \quad \sum_{A: A \subseteq D} U_A = - \ln \frac{p_W(\hat{x}_D \cup \bar{x}_{W \setminus D}^\emptyset)}{p_W(x_D^\emptyset \cup \bar{x}_{W \setminus D}^\emptyset)}.$$

Напомним хорошо известную (и легко проверяемую) формулу Мёбиуса. Пусть $\Phi(A), \Psi(A)$ – две функции, определенные на множестве всех конечных подмножеств $A \subseteq R$, где R – конечное или счетное множество. Тогда соотношение

$$(2.7) \quad \Psi(A) = \sum_{D \subseteq A} \Phi(D), \quad A \subseteq R, \quad |A| < \infty,$$

эквивалентно соотношению

$$(2.8) \quad \Phi(A) = \sum_{D \subseteq A} (-1)^{|A \setminus D|} \Psi(D), \quad A \subseteq R, \quad |A| < \infty.$$

Из формулы Мёбиуса и соотношения (2.6) следует, что для любого конечного $A \subseteq V$

$$(2.9) \quad U_A = - \sum_{D \subseteq A} (-1)^{|A \setminus D|} \ln \frac{p_W(\hat{x}_D \cup \bar{x}_{W \setminus D}^\emptyset)}{p_W(x_D^\emptyset \cup \bar{x}_{W \setminus D}^\emptyset)}.$$

Разумеется, мы пока не знаем, что мера $\mathbf{P}_T^{\beta,+}$ согласована с частично определенной гиббсовской спецификацией, соответствующей взаимодействию $\mathcal{U}$. Но вышеприведенные рассуждения подсказывают следующие определения, которые могут быть обоснованы. Представим меру $\mathbf{P}_T^{\beta,+}$ как предел при $N \rightarrow \infty$ проекций изинговских

мер $p_{W_N}^{\beta,+}$ (см. (1.7)) на множество $T \cap W_N$ и запишем для этих проекций аналог формулы (2.9). Для всех N и $D \subseteq (T \cap W_N)$ мы имеем

$$(2.10) \quad Q_{T,D,N}^{\beta,+} = -\ln \frac{p_{W_N}^{\beta,+}(x_{W_N} : (x_{W_N}|_D)^- = D, (x_{W_N}|_{(T \setminus D) \cap W_N})^+ = (T \setminus D) \cap W_N))}{p_{W_N}^{\beta,+}(x_{W_N} : (x_{W_N}|_{T \cap W_N})^+ = T \cap W_N)}.$$

Для конечных $D \subset T$ положим

$$(2.11) \quad Q_{T,D}^{\beta,+} = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_{T,D,N}^{\beta,+},$$

если, разумеется, этот предел существует. Положим, наконец,

$$(2.12) \quad U_{T,A}^{\beta,+} = \sum_{D \subseteq A} (-1)^{|A \setminus D|} Q_{T,D}^{\beta,+}.$$

ТЕОРЕМА 2.1. *В предположениях теоремы 1.1 пределы (2.11) существуют. Мера $P_T^{\beta,+}$ согласована с частично определенной гиббсовской спецификацией, соответствующей вакуумному потенциалу $\mathcal{U}_T^{\beta,+}$, определенному формулой (2.1) с $U_A = U_{T,A}^{\beta,+}$.*

Ясно, что теорема 2.1 влечет за собой теорему 1.1. Основной шаг доказательства теоремы 2.1 состоит в получении двух оценок сверху для величин $|U_A|$, $A \subset T$. Приведем эти оценки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Существует значение β_0 , такое что для любого конечного подмножества A линии T и всех $\beta \geq \beta_0$*

$$(2.13) \quad |U_A| \leq 3^{|A|}.$$

Оценка (2.13) довольно груба. Она не учитывает возможные сокращения, имеющие место в соотношении (2.12). Однако, для некоторых множеств ее, по-видимому, нельзя существенно улучшить. К таким множествам A относятся, например, отрезки:

$$(2.14) \quad A = [a, b] = \{t = (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2 : a \leq t_1 \leq b, t_2 = 0\}.$$

Если подставить оценку (2.13) в ряд (1.1), то он станет расходиться из-за членов, соответствующих отрезкам A , содержащим фиксированную точку t . Это согласуется с теоремой Шонманна. С другой стороны, это не исключает сходимости с вероятностью 1 ряда (1.2), так как вероятность событий $x_t \equiv -1, t \in [a, b]$, в рассматриваемой модели Изинга с большим значением β убывает экспоненциально по $b - a$ при $b - a \rightarrow \infty$, с показателем, много большим, чем $\ln 3$.

Опишем другие множества, для которых оценка (2.13) неулущшаема. Для этого введем понятие $(1 - \varepsilon)$ -связности, $\varepsilon \geq 0$, для конечного множества целых чисел. Забегая вперед, скажем сразу, что 1-связные множества — это отрезки $A = [a, b] = \{t \in \mathbb{Z}^1 : a \leq t \leq b\}$ и только они, и $(1 - \varepsilon)$ -связные множества близки при малых ε к отрезкам.

Пусть теперь $A \subset \mathbb{Z}^1$ – произвольное конечное множество. Рассмотрим все сегменты $[a, b]$ с концами $a, b \in A$, внутри которых множество A имеет плотность $1 - \varepsilon$; это значит, что

$$\frac{|[a, b] \cap A|}{|[a, b]|} \geq 1 - \varepsilon.$$

(Здесь $|B|$ – число элементов в подмножестве $B \subset \mathbb{Z}^1$; в частности, $|[a, b]| = b - a + 1$.) Рассмотрим объединение всех сегментов, в которых множество A имеет плотность выше $1 - \varepsilon$. Мы получаем конечное подмножество в $\mathbb{Z}^1$. Представим его в виде объединения непересекающихся сегментов. Это можно сделать многими способами; пусть разбиение $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots, I_K = [a_K, b_K]$ содержит минимально возможное число сегментов $K = K(A)$. Будем считать, что

$$(2.15) \quad a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \dots < a_K \leq b_K.$$

Если $K(A) = 1$, то множество A будет называться $(1 - \varepsilon)$ -связным. В противном случае множество A будет называться $(1 - \varepsilon)$ -несвязным, а величина $K(A)$ – числом компонент $(1 - \varepsilon)$ -связности. Можно показать, что всякое $(1 - \varepsilon)$ -связное множество (и, в частности, всякая компонента $(1 - \varepsilon)$ -связности) имеет плотность не меньше $1 - 2\varepsilon$, и в этом смысле $(1 - \varepsilon)$ -связные множества похожи на отрезки. Пересечения $A_i = A \cap I_i$ мы будем называть компонентами $(1 - \varepsilon)$ -связности множества A . Точки $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_K, b_K \in A$ будут называться конечными точками компонент $(1 - \varepsilon)$ -связности. Для $(1 - \varepsilon)$ -несвязного множества A обозначим через $l(A)$ суммарную длину лагун между компонентами $(1 - \varepsilon)$ -связности множества A :

$$(2.16) \quad l(A) = \sum_{k=1}^{K(A)-1} (a_{k+1} - b_k).$$

Как было сказано выше, оценки (2.13) недостаточно для доказательства сходимости ряда (1.2) с вероятностью 1. В этом легко убедиться, если просуммировать ряд (1.2) по редким множествам A типа двухточечных подмножеств $A = \{a_1, a_2\}$ линии T с большим расстоянием между a_1 и a_2 . Поэтому нам необходима более тонкая оценка, которая учитывает возможные сокращения в (2.12).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Существует значение $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0$ можно указать значение $\beta_0 = \beta_0(\varepsilon)$, так что верно следующее утверждение: для любого $(1 - \varepsilon)$ -несвязного множества A*

$$(2.17) \quad |U_A| \leq \exp\{-\beta l(A)\}.$$

Из оценок предложений 2.1 и 2.2 несложно вывести, что рассматриваемое случайное поле согласовано с построенной выше частично определенной гиббсовской спецификацией.

§ 3. “Негиббсовость” проекции $P_T^{\beta,+}$ и теорема о мениске

В этом разделе мы неформально опишем некоторые свойства меры $P_T^{\beta,+}$, наличие которых послужило поводом для включения ее в класс “негиббсовских” (в стандартном смысле) полей. Это описание также объясняет появление $(1 - \varepsilon)$ -связных множеств в формулировках утверждений предыдущего раздела.

Пусть σ – конфигурация на линии $T = \mathbb{Z}^1$. Рассмотрим отрезок $[-n, n] \subset T$. Мы хотим зафиксировать конфигурацию σ всюду на этом отрезке $[-n, n]$, за исключением начала координат, и оценить влияние оставшейся части конфигурации σ на значение σ_0 поля в начале координат. Для обычных гиббсовских полей это влияние стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Как мы увидим вскоре, в нашем примере это не так. Для определенности возьмем конфигурацию σ антисимметричной на отрезке $[-n, n]$, что означает, что $\sigma_s = -\sigma_{-s}$ при $1 \leq s \leq n$. Предположим также, что конфигурация $\sigma_{[1,n]}$ достаточно близка к нейтральной: для некоторого $k \ll n$ все средние $\frac{1}{k} |\sigma_{s+1} + \dots + \sigma_{s+k}| < \frac{1}{2}$ при всех $s, 0 \leq s \leq n-k$. Можно взять, например, $\sigma_s = (-1)^s$, $1 \leq s \leq n$.

Пусть сначала конфигурация σ тождественно равна $+1$ вне $[-n, n]$. Тогда типичная конфигурация η (+)-фазы двумерной модели Изинга при условии σ на горизонтальной оси T выглядит так (см. рис. 1а): в силу условия нейтральности отрезки минус-спинов конфигурации σ оказываются охваченными “узкими” контурами конфигурации η , близко прилегающими к этим отрезкам. Остальная часть плоскости заполнена (+)-фазой. В силу симметрии σ на отрезке $[-n, n]$, его влияние на спин в начале координат равно 0. Таким образом, он остается под влиянием (+)-фазы вне узких контуров. Спин σ_0 качественно ведет себя как если бы он принадлежал (+)-фазе.

Рис. 1а.

Рис. 1б.

Рис. 1с.

Добавим теперь к конфигурации σ еще два отрезка $(-)$ -спинов, $\pm[n+1, n+N]$. Если N невелико, то картина в окрестности начала координат остается прежней; добавляются лишь узкие контуры, окружающие новые отрезки $(-)$ -спинов (см. рис. 1б). Однако, когда параметр N превосходит некоторое пороговое значение $N(n, \beta)$, картина делается качественно иной (см. рис. 1с): возникшие на предыдущем этапе новые контуры предпочитают слиться в один. Энергетически это невыгодно, так как совокупная длина такого семейства контуров превосходит минимально возможную на величину $\sim 2n$. Причина, по которой система идет на дополнительные энергетические затраты, состоит в том, что описанные расположения имеют большую свободу

флуктуаций. Грубо говоря, конфигурации типа изображенных на рис. 1b соответствуют фиксации внешнего контура рисунка 1c на уровне отрезка $[-n, n]$. Но вероятность события, состоящего в том, что этот контур находится на заданной высоте h над началом координат, имеет порядок $C(\beta)/\sqrt{N}$ при $h \sim \sqrt{N}$. Поэтому когда $\sqrt{N} \gg \exp\{-4\beta n\}$, действует эффект энтропийного отталкивания, и система предпочитает свободу флуктуаций понижению своей энергии. Когда объединяющий контур возникает (что происходит с вероятностью, близкой к 1, когда $\sqrt{N} \gg \exp\{-4\beta n\}$), картина вблизи начала координат делается обратной: внутри большого контура мы видим тонкие контуры, прилегающие к линии T и охватывающие $(+)$ -отрезки конфигурации σ . Вне этих контуров располагается $(-)$ -фаза, и поэтому спин σ_0 ведет себя как если бы он принадлежал $(-)$ -фазе.

В этом и проявляется “негиббсовость” проекции $P_T^{\beta,+}$: какими бы длинными ни были отрезки $[-n, -1], [1, n]$, на которых фиксирована конфигурация σ , мы можем существенно влиять на поведение спина в начале координат, меняя конфигурацию σ на отрезках $\pm[n+1, n+N]$ с достаточно большим N . Описанные свойства явно указывают на то, что если мы хотим иметь гиббсовское описание поля $P_T^{\beta,+}$, то мы должны быть готовы допустить очень сильное дальнее действие, которое может даже не убывать с расстоянием. Другая информация, которую можно извлечь из этого примера, состоит в том, что полная энергия системы из двух отрезков $(-)$ -спинов, $H(\sigma^{[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]})$,² где $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$, может быть приближена суммой энергий двух отрезков $(-)$ -спинов, $H(\sigma^{[a_1, b_1]}) + H(\sigma^{[a_2, b_2]})$, только если отрезки достаточно удалены друг от друга. Причина этого состоит в том, что приближенная аддитивность энергии эквивалентна приближенной независимости. Но когда величина расстояния между отрезками $|a_2 - b_1|$ есть $o(\min(|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|))$, то следует ожидать слияния контуров, окружающих их, как описано выше. А такое слияние означает, конечно, наличие существенной зависимости.

Вышеприведенные рассуждения показывают, что для справедливости оценки (2.17) необходимо условие типа $(1 - \varepsilon)$ -несвязности множества A ; одной несвязности A для малости взаимодействия $|U_A|$, вообще говоря, недостаточно. В случае же $(1 - \varepsilon)$ -несвязного множества A вышеописанное слияние контуров требует дополнительной энергии не менее $\varepsilon|A|$, а такая флуктуация энергии уже маловероятна.

Оказывается, что слияние контуров – единственный механизм, порождающий сильное взаимодействие между отрезками $(-)$ -спинов. Если соответствующие контуры не сливаются, то эти отрезки взаимодействуют экспоненциально слабо по расстоянию между ними, так как контуры, охватывающие их, экспоненциально локализованы. За счет такой локализации и удается доказать оценку (2.17). Мы закончим изложение результатов нашей работы описанием результатов об этой локализации. В качестве побочного результата мы получаем утверждение о том, что при некоторых граничных условиях в двумерной полубесконечной модели Изинга имеется континуум фаз. По-видимому, это утверждение является новым.

Сейчас мы сформулируем вопрос о локализации более точно. Мы приведем его в случае общей размерности. Из формулировки будет видно, что проекция двумерного поля на одномерную подрешетку имеет наибольшие шансы оказаться негиббсов-

² Для любого $A \in T$ мы обозначаем через σ^A конфигурацию $\sigma^A(s) = \begin{cases} -1 & \text{при } s \in A, \\ +1 & \text{при } s \notin A. \end{cases}$

ской. Вопрос о слабой зависимости пространственно разнесенных объемов B_1, B_2 под решеткой $\mathbb{Z}^{d'} \subset \mathbb{Z}^d$ относительно проекции меры $\mathcal{P}$ можно сформулировать так.

Рассмотрим пару замкнутых контуров $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{Z}^d$, заключающих, соответственно, объемы B_1, B_2 . Предположим, что контуры распределены независимо, причем каждый из них распределен в соответствии с мерой $\mathcal{P}$. Требуется оценить вероятность события, состоящего в том, что пересечение этих контуров непусто, в зависимости от расстояния $\text{dist}(B_1, B_2)$. Известно, что чем ниже размерность контура Γ , тем больше он флуктуирует. Другими словами, чем ниже размерность d , тем больше вероятность его уклонения от охватываемого множества B на данное расстояние. Поэтому мы утверждаем, что двумерный случай является с этой точки зрения наиболее трудным. Нам следует, тем самым, оценить флуктуации случайного контура на плоскости, охватывающего сегмент B . Мы сделаем это, используя теорему о мениске, которая представляет самостоятельный интерес.

Теорема о мениске описывает фазы полубесконечной модели Изинга, соответствующие различным возможным углам контакта поверхности раздела чистых фаз со стенкой. Мы рассматриваем двумерную модель Изинга на полубесконечной решетке $(\mathbb{Z}^2)^+ = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y > 0\}$ и интересуемся множеством гиббсовских состояний, соответствующих следующему граничному условию на оси x :

$$\bar{\sigma}_x = \begin{cases} +1 & \text{при } x \geq 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Чтобы напомнить определение гиббсовского поля на $(\mathbb{Z}^2)^+$, соответствующего модели Изинга с граничными условиями на оси x , нам нужны некоторые обозначения. Пусть $\Lambda \subset (\mathbb{Z}^2)^+$ – конечное подмножество. Обозначим через $\partial\Lambda$ обычную границу $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ как подмножества $\mathbb{Z}^2$, а через $\partial^+\Lambda \subset \partial\Lambda$ – пересечение $\partial\Lambda \cap (\mathbb{Z}^2)^+$. Случайное поле на множестве конфигураций на $(\mathbb{Z}^2)^+$ называется гиббсовским полем, соответствующим взаимодействию Изинга и граничному условию $\bar{\sigma}$, если его условные распределения в любом конечном подобъеме Λ при условии σ^c вне Λ задаются обычной гиббсовской формулой для взаимодействия Изинга в случае $\partial^+\Lambda = \partial\Lambda$, а в оставшемся случае $\partial\Lambda \setminus \partial^+\Lambda \neq \emptyset$ мы тоже используем эту формулу, где конфигурацию $\sigma^c|_{\partial^+\Lambda}$ нужно дополнить ограничением $\bar{\sigma}|_{\partial\Lambda \setminus \partial^+\Lambda}$.

Для формулировки теоремы о мениске введем конфигурации, которые будут использоваться в качестве граничных условий, выделяющих различные фазы. Пусть $n = (n_x, n_y)$ – произвольный единичный вектор в $\mathbb{R}^2$ с $n_x < 0$. Определим конфигурацию σ^n формулой

$$\sigma^n(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } n \cdot x \geq 0, \\ -1 & \text{при } n \cdot x < 0. \end{cases}$$

Обозначим через V_N объем $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $-N < x < N$, $0 < y < N$, и рассмотрим гиббсовское состояние $\langle \cdot \rangle_{n, N}^\beta$ в V_N , соответствующее модели Изинга при обратной температуре β с граничным условием σ^n .

ТЕОРЕМА О МЕНИСКЕ. *Если β достаточно велико, то*

- 1) *термодинамический предел $\langle \cdot \rangle_n^\beta = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \cdot \rangle_{n, N}^\beta$ существует для любого n ;*

- 2) состояния $\langle \cdot \rangle_n^\beta$ являются попарно различными гиббсовскими состояниями модели Изинга на полуплоскости $(\mathbb{Z}^2)^+$, соответствующими граничному условию $\bar{\sigma}$.

Для применения этого результата к проблеме гиббсовости нам требуются некоторые свойства фаз $\langle \cdot \rangle_n^\beta$. Прежде всего заметим, что если β достаточно велико, то с $\langle \cdot \rangle_n^\beta$ -вероятностью 1 всякая конфигурация σ на $(\mathbb{Z}^2)^+$ содержит ровно один бесконечный контур, и он начинается в точке $(-\frac{1}{2}, 0)$. Обозначим этот контур через $\Gamma = \Gamma(\sigma)$, и пусть (случайный) отрезок $[\gamma_1(\sigma), \gamma_2(\sigma)] \subseteq \mathbb{R}^1$ оси x — это проекция контура Γ на $\mathbb{R}^1$ (мы, конечно, не исключаем случаев, когда эта проекция полубесконечна или бесконечна).

ТЕОРЕМА О ЛОКАЛИЗАЦИИ МЕНИСКА. *Предположим дополнительно к условиям теоремы о мениске, что $p_y < 0$. Тогда $\langle \cdot \rangle_n^\beta$ -вероятность события $\{\sigma : \gamma_2(\sigma) \geq l, l > 0\}$ оценивается сверху величиной*

$$(3.1) \quad \exp\{-c_n \beta l\} \quad c_n > 0$$

(но, конечно, неравномерно по n).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Эта теорема оценивает вероятность события, состоящего в том, что контур Γ пересекает ось y и отходит от нее на расстояние l . Аналогичный результат справедлив и для уклонов на расстояние l от других лучей, не параллельных вектору n . Однако если луч имеет уравнение $y = kx$, а $k < 0$, то соответствующая оценка приобретает вид $\exp\{-c_k l\}$, причем (положительная) экспонента c_k не расходится при $\beta \rightarrow \infty$, в отличие от (3.1). Причина состоит в том, что подобные флуктуации происходят и при нулевой температуре.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Доказательство двух последних теорем основано на технике, развитой в книге [11], посвященной конструкции Вулфа. Для получения детальной информации о поверхностном натяжении там подробно исследована статистика поведения изинговских контуров, проходящих через две заданные точки.

Особенно важно для нас нижеприводимое следствие. Рассмотрим снова объем V_N и зафиксируем граничное условие $\bar{\sigma}$, равное $+1$ на левой, верхней, правой сторонах прямоугольника и на отрезке $[0, N]$, а на оставшейся части границы оно не всюду равно $+1$. Пусть $\langle \cdot \rangle_{\bar{\sigma}, N}^\beta$ — соответствующее состояние Гиббса в V_N . Любая конфигурация $\tilde{\sigma}$ в V_N имеет некоторое количество открытых контуров $\Gamma_i(\tilde{\sigma})$, с концами на границе объема V_N . Обозначим снова через $[\tilde{\gamma}_1(\tilde{\sigma}), \tilde{\gamma}_2(\tilde{\sigma})]$ наименьший отрезок оси x , содержащий проекции всех контуров $\Gamma_i(\tilde{\sigma})$. Имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. $\langle \cdot \rangle_{\bar{\sigma}, N}^\beta$ -вероятность события $\{\tilde{\sigma} : \gamma_2(\tilde{\sigma}) \geq l, l > 0\}$ ограничена сверху величиной $\exp\{-c\beta l\}$ с $c > 0$, равномерно по $\bar{\sigma}, N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Для любого состояния $\langle \cdot \rangle_n^\beta$ можно построить его склейку с состоянием $\langle \cdot \rangle_{\bar{\sigma}, N}^\beta$, такую что первое из них будет стохастически доминировать второе в смысле ФКЖ. Это означает, что можно построить такое совместное распределение $\mathcal{P}(\sigma, \tilde{\sigma})$ случайных полей $\langle \sigma \rangle_n^\beta$ и $\langle \tilde{\sigma} \rangle_{\bar{\sigma}, N}^\beta$, что с $\mathcal{P}$ -вероятностью 1 $\tilde{\sigma}(t) \leq \sigma(t)$ для всех $t \in V_N$. В частности, область между контуром $\Gamma(\sigma)$ и лучом $(-\infty, -\frac{1}{2})$ на оси x содержит все контуры $\Gamma_i(\tilde{\sigma})$, и, следовательно, $\gamma(\sigma) \geq \tilde{\gamma}(\tilde{\sigma})$. Поэтому следствие имеет место с $c = c_n$ для произвольного n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] van Enter A. C. D., Fernández R., Sokal A. Regularity properties and pathologies of position-space renormalization-group transformations: Scope and limitations of Gibbsian theory // J. Statist. Phys. 1993. V. 72. P. 879–1167.
- [2] van Enter A. C. D., Fernández R., Kotecký R. Pathological behavior of renormalization-group maps at high fields and above the transition temperature // J. Statist. Phys. 1995. V. 79. P. 969–992.
- [3] Griffiths R. B., Pearce P. A. Position-space renormalization-group transformations: Some proofs and some problems // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. P. 917–920.
- [4] Griffiths R. B., Pearce P. A. Mathematical problems of position-space renormalization-group transformations // J. Statist. Phys. 1979. V. 20. P. 499–545.
- [5] Israel R. B. Banach algebras and Kadanoff transformations // Random Fields (Esztergom, 1979) / ed. Fritz J., Lebowitz J. L., Szász D. V. II. North-Holland, Amsterdam, 1981. P. 593–608.
- [6] Schonmann R. H. Projections of Gibbs measures can be non-Gibbsian // Commun. Math. Phys. 1989. V. 124. P. 1–7.
- [7] Dobrushin R. L. Gaussian random fields – Gibbsian point of view // Multicomponent Random Systems / ed. Dobrushin R. L., Sinai Ya. G. New York: Marcel Dekker, 1980. P. 119–152.
- [8] Козлов О. К. Описание точечного случайного поля потенциалом Гиббса // УМН. 1975. Т. 30. № 6 (186). С. 175–176.
- [9] Gurevich B. M., Suhov Ju. M. Stationary solutions of the Bogoliubov hierarchy equations in classical statistical mechanics, 1 // Commun. Math. Phys. 1976. V. 49. P. 63–96.
- [10] Georgii H.-O. Gibbs Measures and Phase Transitions. Berlin: Walter de Gruyter, 1988.
- [11] Dobrushin R., Kotecký R., Shlosman S. Wulff construction: a global shape from local interaction // Translations of Mathematical Monographs. V. 104. Providence, RA, USA: AMS, 1992.

Институт проблем передачи информации,
Москва, Россия;

Поступила в редакцию
15.09.1996

Международный институт математической физики им. Шрёдингера,
Вена, Австрия;

Математический факультет Калифорнийского университета в Ирвайне,
Ирвайн, Калифорния, США