Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Минлос, Е. А. Жижина, Предельный диффузионный процесс для неоднородного случайного блуждания на одномерной решетке, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 87–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm819>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:20:03

УДК 519.2

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ДИФфуЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС
ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ
НА ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

Р. А. Минлос, Е. А. Жижина

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	87
2. Диффузионный процесс на прямой с эластичным экраном в нуле	89
3. Окончательная формулировка результата	93
4. Доказательство теоремы 3. Построение аппроксимирующей последовательности f_n	95
Список литературы	100

1. Введение

Рассмотрим случайное неоднородное по пространству блуждание частицы по одномерной решетке Z с переходными вероятностями

$$(1) \quad \text{Pr}(x_{t+1} = x \mid x_t = y) = P(y \rightarrow x) = \pi(x - y) + V(x - y, y), \quad x, y \in Z,$$

которые отличаются от переходных вероятностей $P_0(y \rightarrow x) = \pi(x - y)$ однородного блуждания лишь в некоторой окрестности точки $0 \in Z$. Здесь x_t — положение частицы в момент времени t , $\pi(u) \geq 0$, $u = x - y$ — переходные вероятности симметричного однородного (неприводимого) блуждания, $\pi(u) = \pi(-u)$, $V(u, y)$ — функция, задающая возмущение однородного блуждания. При этом мы предполагаем, что функции $\pi(u)$ и $V(u, y)$ финитны: $\pi(u) = 0$, $V(u, y) = 0$, если $\max\{|u|, |y|\} > R$ (R — некоторая константа). Тогда при некоторых дополнительных естественных условиях в нашей работе [1] был получен следующий результат (локальная предельная теорема для положения частицы).

ТЕОРЕМА 1. *При условии, что $\max\{|x|, |y|\} < \varepsilon \sqrt{T \ln T}$, где ε — некоторая достаточно малая константа, справедлива следующая асимптотическая фор-*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00064).

мула при $T \rightarrow \infty$:

$$(2) \quad \begin{aligned} \Pr(x_T = x \mid x_0 = y) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi Ta}} \left(\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2Ta}\right\} + k \cdot \operatorname{sign} x \cdot \exp\left\{-\frac{(|x|+|y|)^2}{2Ta}\right\} \right) \\ + \frac{1}{\sqrt{T}} O\left(\frac{1}{|x|+1}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Здесь a – дисперсия скачка за один шаг для однородного блуждания

$$(3) \quad a = \sum_u u^2 \pi(u),$$

$k, |k| \leq 1$, – некоторая константа, зависящая от параметров блуждания:
 $k = k(\pi, V)$.

Заметим, что функция

$$(4) \quad G_t(y, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ta}} \left(\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2ta}\right\} + k \cdot \operatorname{sign} x \cdot \exp\left\{-\frac{(|x|+|y|)^2}{2ta}\right\} \right)$$

совпадает с плотностью переходных вероятностей некоторого случайного марковского стационарного процесса $\{\xi^y(t), t \geq 0\}$ на прямой (так называемый процесс с эластичным экраном в нуле). Мы опишем этот процесс ниже.

Это наблюдение вместе с теоремой 1 наводит на общую мысль о том, что для нашего неоднородного блуждания выполняется так называемый принцип инвариантности (см. [2]), в котором предельным процессом оказывается не броуновское движение, а упомянутый выше процесс. А именно, последовательность случайных процессов

$$\{\xi_n^y(\tau), 0 < \tau < t\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad y \in R,$$

получающихся линейной интерполяцией из последовательности значений

$$\left\{ X_n^y\left(\frac{k}{n}\right), k = 1, \dots, [tn] \right\}, \quad X_n^y\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} X^{[y\sqrt{n}]}(k), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где через $\{X^z(k), k = 1, 2, \dots\}$, $z \in Z$, обозначена траектория неоднородного случайного блуждания (1) по решетке, выходящая из точки $z \in Z$, сходится к процессу $\{\xi^y(\tau), 0 < \tau < t\}$ в смысле слабой сходимости соответствующих распределений.

Пусть $f(x) \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – совокупность всех непрерывных финитных функций на R таких, что ограничения этих функций $f_{\pm}(x) = f(x)|_{R_{\pm}}$ на правую $R_+ = \{x > 0\}$ или левую $R_- = \{x < 0\}$ полуоси трижды непрерывно дифференцируемы на $R_{\pm}$, соответственно, и существуют и конечны односторонние пределы производных $f_{\pm}^{(k)}(0_{\pm})$, $k = 1, 2, 3$, в нуле:

$$(5) \quad \mathcal{M} = \{f \in C_0(R), f_{\pm}(x) \in C^3(R_{\pm}), f_{\pm}^{(k)}(0_{\pm}) \text{ конечны, } k = 1, 2, 3\}.$$

Тогда для любого конечного t : $0 < t < T$, и любого $y \in R$ введем следующие функции:

$$(6) \quad \begin{aligned} h_{f,t}^{(n)}(y) &\equiv \left\langle f \left(X_n^y \left(\frac{[tn]}{n} \right) \right) \right\rangle_{P_n, y} = \left\langle f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} X^{[y\sqrt{n}]}([tn]) \right) \right\rangle_{P_1, [y\sqrt{n}]}, \\ h_{f,t}^{(\infty)} &\equiv \langle f(\xi^y(t)) \rangle_P = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) G_t(y, u) du. \end{aligned}$$

Здесь $\langle \cdot \rangle_{P_n, y}$ – среднее по распределению P_n на множестве траекторий случайного процесса $\{\xi_n^y(\tau), 0 < \tau < t\}$, выходящих из точки $y_n \in Z_n$, $y_n = [y\sqrt{n}]/\sqrt{n}$, $\langle \cdot \rangle_{P_1, [y\sqrt{n}]}$ – среднее по распределению P_1 на множестве траекторий исходного случайного блуждания на решетке Z , выходящих из точки $[y\sqrt{n}] \in Z$, а функция $G_t(y, u)$ определена формулой (4). Тогда

$$(7) \quad h_{f,t}^{(n)} \rightarrow h_{f,t}^{(\infty)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

в некоторой вводимой ниже норме.

Мы докажем в этой работе результат (7). Конечно, он без труда выводится из теоремы 1, но мы выбрали другой путь вывода, основанный на некоторых общих фактах из теории марковских полугрупп. Эта стратегия предпочтительней по следующим причинам:

- 1) она кажется нам более “вероятностной”, чем сложные аналитические построения в работе [1];
- 2) в приводимом ниже выводе (7) явно проступает связь предельной теоремы 1 с предельным диффузионным процессом;
- 3) кроме того, используемые при доказательстве (7) построения позволяют предъявить явное выражение для константы k , входящей в асимптотическую формулу (2) для $\text{Pr}(x_T = x \mid x_0 = y)$.

Однако выбранный нами способ доказательства тоже требует сложной аналитики, и мы для простоты ввели два упрощающих предположения. Во-первых, мы предполагаем, что при невозмущенном однородном блуждании частица может прыгнуть не более, чем на единицу, т.е. $\pi(u) = 0$ при $|u| \geq 2$. Другое предположение, более технического характера, уместно будет сформулировать ниже в надлежащем месте.

2. Диффузионный процесс на прямой с эластичным экраном в нуле

В этом параграфе мы сформулируем основные факты, характеризующие случайный непрерывный процесс, который был упомянут выше.

ТЕОРЕМА 2. I. *Для любого $k \in [-1, 1]$ и любого $y_0 \in R$ существует непрерывный марковский процесс $\{\xi^{y_0}(t), t \geq 0\}$, выходящий из точки $y_0 \in R$ в начальный момент времени $t = 0$, с плотностью переходных вероятностей*

$$(8) \quad p(t_1, y, t_2, x) = p(t_2 - t_1, y, x) = G_{t_2 - t_1}(y, x).$$

Здесь функция $G_t(y, x)$ определена формулой (4), $t_2 > t_1$, $y, x \in R$.

II. Процесс $\{\xi^{y_0}(t), t \geq 0\}$ с вероятностями перехода

$$P(t, y, \Gamma) = \int_{x \in \Gamma} p(t, y, x) dx$$

является обобщенным диффузионным процессом на прямой в том смысле, что колмогоровские локальные характеристики (матрица диффузии и вектор переноса) существуют лишь в обобщенном смысле (подробнее см. книгу [3]).

III. Обозначим через $S_k(t)$ порожденную этим процессом марковскую полугруппу, действующую в пространстве σ -конечных и σ -аддитивных мер на R (см. подробнее [4]). Тогда мера (не вероятностная)

$$\begin{aligned} d\mu(x) &= \begin{cases} dx, & x < 0, \\ \gamma dx, & x > 0, \end{cases} \quad \text{где } \gamma = \frac{1+k}{1-k} > 0 \quad \text{при } |k| < 1, \\ d\mu(x) &= \begin{cases} dx, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad \text{при } k = -1, \\ d\mu(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ dx, & x > 0, \end{cases} \quad \text{при } k = 1, \end{aligned}$$

является инвариантной мерой соответствующей полугруппы $S_k(t)$.

IV. Порождаемая этим процессом стохастическая полугруппа операторов $T_k(t)$, $t \geq 0$, действующих в пространстве $L_2(R, d\mu)$ по формуле

$$\begin{aligned} (9) \quad (T_k(t)f)(y) &= \int \tilde{G}_t^{(k)}(y, x) f(x) d\mu(x), \\ \tilde{G}_t^{(k)}(y, x) &= \begin{cases} G_t(y, x), & x < 0, \\ \frac{1}{\gamma} G_t(y, x), & x > 0, \end{cases} \quad \gamma = \frac{1+k}{1-k}, \end{aligned}$$

является сильно-непрерывной сжимающей полугруппой в $L_2(R, d\mu)$.

V. Генератор A_k этой полугруппы $T_k(t)$, $t \geq 0$, при $|k| < 1$ задан на своей области определения:

$$(10) \quad D(A_k) = \{f \in L_2(R, d\mu), (f_{\pm})'' \in L_2(R, d\mu), f(0+) = f(0-), f'(0-) - \gamma f'(0+) = 0\}$$

(здесь $f_{\pm} = f|_{R_{\pm}}$ есть сужения функции $f(x)$ на правую и левую полуоси $R_{\pm}$, соответственно) по формуле

$$(A_k f)(x) = \frac{a}{2} f''(x), \quad x \neq 0,$$

где a – дисперсия (3) скачка за один шаг. В случае, когда $k = \pm 1$:

$$\begin{aligned} D(A_1) &= \{f \in L_2(R_+, dx), f'' \in L_2(R_+, dx), f'(0+) = 0\}, \\ D(A_{-1}) &= \{f \in L_2(R_-, dx), f'' \in L_2(R_-, dx), f'(0-) = 0\}, \\ (A_{\pm 1} f)(x) &= \frac{a}{2} f''(x), \quad x \in R_{\pm}. \end{aligned}$$

Доказательство второго утверждения теоремы 2 следует из результатов Н. И. Портенко [3]. Остальные утверждения выводятся непосредственно с использованием явной формулы (8) и известных фактов из теории марковских процессов (см., например, [4]).

Наглядно переходные вероятности такого процесса за малое время описываются следующим образом. В каждой из областей $\{x > 0\}$ и $\{x < 0\}$ это есть процесс с независимыми приращениями на малых промежутках времени (при условии, что его приращение за это время не выводит процесс из соответствующей области), и приращение распределено почти как приращение винеровского процесса:

$$\Pr(x_{t+\delta t} \in (x - \delta x, x + \delta x) \mid x_t = x) = \frac{1}{\sqrt{2a\pi\delta t}} \int_{x-\delta x}^{x+\delta x} \exp\left\{-\frac{(x-u)^2}{2a\delta t}\right\} du + o(1)$$

при $\delta t \rightarrow 0$, $|\delta x| < |x|$.

В случае, когда процесс оказывается в точке $x = 0$, его приращение за малое время δt распределено по закону:

$$\begin{aligned} \Pr(x_{t+\delta t} \in (0, \delta x) \mid x_t = 0) &= \frac{2\beta}{\sqrt{2a\pi\delta t}} \int_0^{\delta x} \exp\left\{-\frac{u^2}{2a\delta t}\right\} du + o(1), \quad \delta x > 0, \\ \Pr(x_{t+\delta t} \in (-\delta x, 0) \mid x_t = 0) &= \frac{2\alpha}{\sqrt{2a\pi\delta t}} \int_{-\delta x}^0 \exp\left\{-\frac{u^2}{2a\delta t}\right\} du + o(1), \quad \delta x < 0, \end{aligned}$$

при $\delta t \rightarrow 0$, где α, β — некоторые константы такие, что $\alpha + \beta = 1$, $\beta/\alpha = \gamma$. Другими словами, процесс, попав в начало координат $x = 0$, с вероятностью α или β , соответственно, оказывается слева или справа от нуля и далее уже ведет себя как винеровский процесс (пока не попадет снова в точку $x = 0$).

Здесь уместно описать одно существенное подпространство (см. ниже) генератора A_k . Рассмотрим совокупность непрерывных функций с компактным носителем $\varphi(x) \in C_0(R)$ таких, что сужения этих функций $\varphi_{\pm} = \varphi|_{R_{\pm}}$ на полуоси $R_{\pm}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями на $R_{\pm}$, соответственно, и кроме того, существуют и конечны односторонние пределы производных всех порядков в нуле: $\varphi_+^{(m)}(0+) < \infty$, $\varphi_-^{(m)}(0-) < \infty$, $m = 1, 2, \dots$. Обозначим пространство таких функции через $\tilde{D}$:

$$\begin{aligned} \tilde{D} = \{ \varphi(x) \in C_0(R), \varphi_{\pm}(x) \in C^{\infty}(R_{\pm}), \\ \varphi_{\pm}^{(m)}(0\pm) \text{ существуют и конечны, } m = 1, 2, \dots \}, \end{aligned}$$

и рассмотрим следующие подпространства функций $D_k \subset \tilde{D}$:

$$D_k = \{ \varphi(x) \in \tilde{D}, \varphi'(0-) - \gamma\varphi'(0+) = 0 \},$$

где $\gamma = \frac{1+k}{1-k}$, $|k| < 1$. Введем кроме того подпространства

$$\begin{aligned} D_{+1} &= \{ \varphi(x) \in C^{\infty}(R_+), \varphi^{(m)}(0+) < \infty, m = 0, 1, 2, \dots, \varphi'(0+) = 0 \}, \\ D_{-1} &= \{ \varphi(x) \in C^{\infty}(R_-), \varphi^{(m)}(0-) < \infty, m = 0, 1, 2, \dots, \varphi'(0-) = 0 \}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Множество $D_k \subset D(A_k)$, $|k| \leq 1$, является существенным подпространством для оператора A_k , т.е. $A_k|_{D_k} = A_k$, где замыкание оператора берется в норме $L_2(R, d\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|k| < 1$ и обозначим через $\tilde{H}_\gamma$ замыкание пространства функций $\tilde{D}$ в следующей норме:

$$(11) \quad \|\varphi\|_\gamma = \sqrt{\|\varphi\|_\gamma^2 + \|\varphi''\|_\gamma^2},$$

где $\|\varphi\|_\gamma^2 = \int |\varphi(x)|^2 d\mu(x)$ есть норма в пространстве $L_2(R, d\mu)$, а через $\varphi''(x)$ обозначена функция

$$\varphi''(x) = \begin{cases} (\varphi_+)'' & x > 0, \\ (\varphi_-)'' & x < 0. \end{cases}$$

Так как $C_0^\infty(R) \subset \tilde{D}$, то пространство $\tilde{H}_\gamma$ состоит из функций $g \in L_2(R, d\mu)$ таких, что $(g_\pm)'' \in L_2(R, d\mu)$:

$$\tilde{H}_\gamma = \{g \in L_2(R, d\mu), (g_\pm)'' \in L_2(R, d\mu)\},$$

и, следовательно, содержит область $D(A_k)$ оператора A_k . Кроме того, если $\varphi_n \rightarrow \varphi$, $n \rightarrow \infty$, $\varphi_n \in \tilde{D}$ в смысле нормы (11), то это значит, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$, $\varphi_n'' \rightarrow \varphi''$, $n \rightarrow \infty$ в смысле нормы $L_2(R, d\mu)$. Нам остается доказать, что предельная функция $\varphi \in D(A_k)$. Заметим для этого, что $\tilde{H}_\gamma$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_\gamma = \int_R f \bar{g} d\mu(x) + \int_{R_+} f_+'' \bar{g}_+'' d\mu(x) + \int_{R_-} f_-'' \bar{g}_-'' d\mu(x), \quad f, g \in \tilde{H}_\gamma.$$

Рассмотрим на $\tilde{H}_\gamma$ четыре функционала:

$$(12) \quad F_0^\pm g = g(0\pm), \quad F_1^\pm g = g'(0\pm).$$

Тогда, пользуясь теоремой Рисса, несложно доказать, что функционалы (12) являются непрерывными на $\tilde{H}_\gamma$. Для этого достаточно построить функции $f_0^\pm, f_1^\pm \in \tilde{H}_\gamma$ такие, что

$$F_0^\pm \varphi = (f_0^\pm, \varphi)_\gamma, \quad F_1^\pm \varphi = (f_1^\pm, \varphi)_\gamma$$

для всех $\varphi(x)$ из некоторого всюду плотного множества в $\tilde{H}_\gamma$, например, для всех $\varphi(x) \in \tilde{D}$. С помощью несложных вычислений легко убедиться, что функция $f_1^+(x)$, соответствующая функционалу F_1^+ , имеет вид

$$f_1^+(x) = \begin{cases} -e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}, & x < 0, \\ \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}, & x \geq 0, \end{cases}$$

и аналогичные представления имеют функции $f_1^-(x), f_0^\pm(x)$.

Так как функции $\varphi(x) \in D_k$ обладали свойствами

$$\varphi(0+) - \varphi(0-) = 0, \quad \varphi'(0-) - \gamma \varphi'(0+) = 0,$$

то в силу непрерывности функционалов (12) после замыкания множества D_k по норме (11) для любой функции $g(x) \in \overline{D_k}$ эти свойства сохраняются. Следовательно, D_k — существенное подпространство оператора A_k .

Случаи $k = \pm 1$ рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

3. Окончательная формулировка результата

Теперь уместно сформулировать окончательный результат данной работы. Для этого нам понадобится еще несколько определений.

Для любого целого $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим одномерную решетку $Z_n \subset R$ с шагом $1/\sqrt{n}$ и введем пространство функций $l_\gamma^{(n)}(Z_n)$ на Z_n с нормой

$$\|\varphi\|_{n,\gamma}^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k < 0} \varphi^2 \left(\frac{k}{\sqrt{n}} \right) + \gamma \sum_{k \geq 0} \varphi^2 \left(\frac{k}{\sqrt{n}} \right) \right), \quad \gamma > 0.$$

Для любой финитной ограниченной функции $\psi(x)$, $x \in R$, обозначим через $\pi_n \psi \in l_\gamma^{(n)}(Z_n)$ сужение $\psi(x)$ на решетку $Z_n \subset R$. Заметим, что функция $h_{f,t}^{(n)}(y)$, $y \in R$, введенная формулой (6), фактически построена на каждом полуинтервале $[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}}) \subset R$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и таким образом, ее можно рассматривать как функцию на решетке Z_n , т.е. $\pi_n h_{f,t}^{(n)}(y) = h_{f,t}^{(n)}(y)$.

Итак, при выполнении всех указанных выше предположений, а также приведенного ниже предположения, результат (7) может быть сформулирован следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого фиксированного $0 < t < \infty$ и любой функции $f(x) \in \mathcal{M}$, где множество $\mathcal{M}$ определено (5), верно соотношение*

$$(13) \quad \|\pi_n h_{f,t}^{(\infty)} - h_{f,t}^{(n)}\|_{n,\gamma} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Эта сходимость равномерна относительно t , пробегающих любой ограниченный интервал: $0 < t < T$.

Введем стохастический оператор T_n для случайного блуждания по решетке Z_n , индуцированного нашим исходным блужданием по решетке Z с помощью формулы

$$\text{Pr}^{(n)}(y \rightarrow x) = \text{Pr}(y\sqrt{n} \rightarrow x\sqrt{n}),$$

где $x = k_1/\sqrt{n}$, $y = k_2/\sqrt{n}$, $k_1, k_2 \in Z$. Тогда оператор T_n действует в $l_\gamma^{(n)}(Z_n)$ по формуле

$$(14) \quad \begin{aligned} (T_n \varphi)(y) &= \sum_{u \in Z_n} \varphi(u) \text{Pr}^{(n)}(y \rightarrow u) \\ &= \sum_{u \in Z_n} \varphi(u) \text{Pr}(y\sqrt{n} \rightarrow u\sqrt{n}) \\ &= \left\langle \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{n}} X^{[y\sqrt{n}]}(1) \right) \right\rangle_{P_{1,[y\sqrt{n}]}} \end{aligned}$$

где $\varphi \in l_\gamma^{(n)}(Z_n)$, $y, u \in Z_n$.

Из (14), в частности, следует, что функция $h_{f,t}^{(n)}(y)R$, определенная формулой (6), может быть записана в виде

$$h_{f,t}^{(n)}(y) = (T_n^{[tn]} \pi_n f)(y),$$

где $\pi_n f \in l_\gamma^{(n)}(Z_n)$, $y \in Z_n$. Введем, далее, оператор в пространстве $l_\gamma^{(n)}(Z_n)$

$$(15) \quad A_n = (T_n - E) \cdot n,$$

который по своему виду напоминает “разностный” генератор.

Сейчас мы сформулируем одну абстрактную аппроксимационную теорему (см. [5]), на которой и будет базироваться наше дальнейшее доказательство.

ТЕОРЕМА 4. Пусть T_n – линейные сжатия в банаховых пространствах L_n , соответственно, $n = 1, 2, \dots$, и пусть $T(t)$, $t > 0$, – сильно непрерывная сжимающая полугруппа на банаховом пространстве L с генератором A , и D – некоторое существенное подпространство для A . Через $\pi_n: L \rightarrow L_n$ обозначим некоторые ограниченные линейные отображения пространства L в пространства L_n , причем предполагается, что нормы π_n равномерно ограничены: $\sup_n \|\pi_n\| < \infty$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) для любой функции $f \in L$

$$\|T_n^{[tn]} \pi_n f - \pi_n T(t) f\|_{L_n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно на любом конечном отрезке $[t_1, t_2]$,

2) для любой функции $f \in D$ существует такая последовательность функций $f_n \in L_n$, $n = 1, 2, \dots$, что

$$(16) \quad \|f_n - \pi_n f\|_{L_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$(17) \quad \|A_n f_n - \pi_n A f\|_{L_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Здесь оператор A_n определен формулой (15).

Далее, для того, чтобы применить теорему 4 к доказательству теоремы 3, положим $L_n = l_\gamma^{(n)}(Z_n)$, $L = L_2(R, d\mu)$, T_n выберем совпадающими с операторами (14), действующими в $l_\gamma^{(n)}(Z_n)$, $T_k(t)$ – это стохастическая полугруппа операторов (9) для диффузионного процесса с эластичным экраном в нуле, действующая в $L = L_2(R, d\mu)$ (см. теорему 2), в качестве существенного пространства для генератора A_k полугруппы $T_k(t)$ выберем пространство D_k , построенное в конце предыдущего параграфа, и, наконец, $\pi_n: L_2(R, d\mu) \rightarrow l_\gamma^{(n)}(Z_n)$ – вложения пространства $L_2(R, d\mu)$ в пространство $l_\gamma^{(n)}(Z_n)$, соответственно:

$$(\pi_n f)(k/\sqrt{n}) = f(k/\sqrt{n}), \quad k \in Z, \quad n \in N.$$

Заметим, что нормы операторов π_n не будут равномерно ограничены, однако для этих операторов будет выполняться следующее условие.

Пусть Φ – множество финитных функций $\varphi \in L_2(R, d\mu)$, которые непрерывны везде на R , кроме, быть может, точки 0, и могут иметь в точке 0 разрыв первого рода:

$$\Phi = \{\varphi : \text{supp } \varphi \text{ конечен, } \varphi_\pm \in C(R_\pm), \varphi_\pm(0_\pm) < \infty\}.$$

Тогда существует такая константа $K > 0$, что

$$(18) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\pi_n f\|_{L_n} \leq K \|f\|_L \quad \text{для всех } f \in \Phi.$$

Оказывается, что для наших целей достаточно ограничиться операторами π_n , удовлетворяющими условию (18). Действительно, для доказательства теоремы 3 достаточно, чтобы утверждение пункта 1) теоремы 4 выполнялось не для всех $f \in L_2(R, d\mu)$, а только для всех $f \in \mathcal{M}$:

$$(19) \quad \|T_n^{[tn]} \pi_n f - \pi_n T(t)f\|_{L_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad f \in \mathcal{M},$$

равномерно на любом конечном отрезке $[t_1, t_2]$. И так как $D_k \subset \mathcal{M} \subset \Phi$ и существенное подпространство D_k плотно в Φ , то, повторяя доказательство теоремы 4 (см. [5]) в случае, когда операторы π_n удовлетворяют условию (18), мы приходим к (19).

Таким образом, доказательство теоремы 3 сводится к доказательству утверждения 2) теоремы 4.

4. Доказательство теоремы 3. Построение аппроксимирующей последовательности f_n

В этом параграфе мы построим для любой функции $f \in D_k$ такую последовательность функций $f_n \in l_\gamma^{(n)}(Z_n)$, $n = 1, 2, \dots$, чтобы выполнялись условия (16) и (17) теоремы 4.

При этом в дальнейшем мы будем предполагать, что $0 < \gamma < \infty$, что соответствует случаю, когда $|k| < 1$. Крайние значения $k = \pm 1$ соответствуют модели отражающего (поглощающего) экрана в нуле. Доказательство теоремы 3 в этих предельных случаях ($k = \pm 1$) проводится аналогичным образом, и кроме того, эти модели хорошо изучены, поэтому мы не будем отдельно на них останавливаться.

Будем говорить, что точка $y \in Z_n$ решетки Z_n является возмущенной, если $V(s\sqrt{n}, y\sqrt{n}) \neq 0$ хотя бы при каком-нибудь $s \in Z_n$. Множество, состоящее из всех возмущенных точек y , а также всех точек x таких, что $\text{Pr}(y \rightarrow x) \neq 0$, где y – возмущенная точка, обозначим через W . Пусть $M > 2$ – такое, что отрезок $[-M + 1, M - 1]$ содержит множество W . Заметим, что для всех $|x| \geq M$, $x \in Z_n$,

$$\text{Pr}^{(n)}(x \rightarrow z) = \text{Pr}(x\sqrt{n} \rightarrow z\sqrt{n}) = \pi(\sqrt{n}(x - z)) = \begin{cases} \pi(1), & |x - z| = 1/\sqrt{n}, \\ 1 - 2\pi(1), & |x - z| = 0, \\ 0, & |x - z| \geq 2/\sqrt{n}. \end{cases}$$

Далее, для любой функции $f \in D_k$ определим последовательность

$$f_n \in l_\gamma^{(n)}(Z_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

следующим образом:

$$(20) \quad f_n(x) = \begin{cases} f(0) + \frac{c_m^{(n)}}{\sqrt{n}}, & x = \frac{m}{\sqrt{n}}, \quad |m| \leq M, \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(k_1^{(n)} + (m - M))\right), & x = \frac{m}{\sqrt{n}}, \quad m > M, \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(k_2^{(n)} + (m + M))\right), & x = \frac{m}{\sqrt{n}}, \quad m < -M. \end{cases}$$

Здесь $c_m^{(n)}$, $|m| \leq M$, и $k_1^{(n)} \geq 0$, $k_2^{(n)} \leq 0$ – некоторые неопределенные константы, которые мы выберем таким образом, чтобы для последовательности (20) выполнялись условия (16) и (17).

1. Рассмотрим сначала условие (16). Для этого оценим

$$\begin{aligned} \|f_n - \pi_n f\|_{n,\gamma}^2 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m < -M} \left(f\left(\frac{k_2^{(n)} + m + M}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \right)^2 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=-M}^0 \left(f(0) + \frac{c_m^{(n)}}{\sqrt{n}} - f\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \right)^2 + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^M \left(f(0) + \frac{c_m^{(n)}}{\sqrt{n}} - f\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \right)^2 \\ &+ \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \sum_{m > M} \left(f\left(\frac{k_1^{(n)} + m - M}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \right)^2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left| f(0) + \frac{c_m^{(n)}}{\sqrt{n}} - f\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \right| &< \frac{M \cdot \max |f'| + \max_m |c_m^{(n)}|}{\sqrt{n}}, \\ \left| f\left(\frac{k_1^{(n)} + m - M}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \right| &< \frac{(k_1^{(n)} + M) \max |f'|}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

и верны аналогичные оценки для разности

$$\left| f\left(\frac{k_2^{(n)} + m + M}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) \right|, \quad m < -M.$$

Таким образом, если мы выберем $c_m^{(n)}$, $|m| \leq M$, и $k_1^{(n)} \geq 0$, $k_2^{(n)} \leq 0$ так, чтобы эти константы оставались ограниченными при $n \rightarrow \infty$, условие (16) будет выполнено.

Заметим, что все наши построения и оценки, как далее будет видно, остаются справедливыми в случае, когда константы $c_m^{(n)}$, $|m| \leq M$, и $k_1^{(n)} \geq 0$, $k_2^{(n)} \leq 0$ не зависят от n . Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $c_m^{(n)} = c_m$, $k_1^{(n)} = k_1$, $k_2^{(n)} = k_2$.

2. Перейдем к условию (17). Вычислим сначала $(A_n f_n)(x) - (\pi_n A f)(x)$ для $x = m/\sqrt{n}$, $m > M + 1$. Тогда в силу (15) имеем

$$\begin{aligned} (A_n f_n)(x) &= n \left(\sum_{z \in Z_n} \text{Pr}^{(n)}(x \rightarrow z) f_n(z) - f_n(x) \right) \\ &= n\pi(1) \left(f_n\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + f_n\left(x - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 2f_n(x) \right) \\ &= n\pi(1) \left(f\left(\frac{k_1 + (m+1-M)}{\sqrt{n}}\right) \right. \\ &\quad \left. + f\left(\frac{k_1 + (m-1-M)}{\sqrt{n}}\right) - 2f\left(\frac{k_1 + m - M}{\sqrt{n}}\right) \right) \\ &= n\pi(1) \left(f''\left(\frac{k_1 + m - M}{\sqrt{n}}\right) \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{6} (f'''(u_1) + f'''(u_2)) \frac{1}{n\sqrt{n}} \right), \end{aligned}$$

где точки u_1, u_2 лежат, соответственно, внутри интервалов

$$\left[\frac{k_1 + m - M}{\sqrt{n}}, \frac{k_1 + m - M + 1}{\sqrt{n}} \right], \quad \left[\frac{k_1 + m - M - 1}{\sqrt{n}}, \frac{k_1 + m - M}{\sqrt{n}} \right].$$

Кроме того, заметим, что $(A_n f_n)(x) = 0$ для всех $x \in Z_n$ таких, что

$$x > S + \frac{M - k_1 + 1}{\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad x < -S - \frac{M + k_2 + 1}{\sqrt{n}},$$

где $S \in N$ таково, что $\text{supp } f \subset [-S, S]$. Далее,

$$\begin{aligned} |(A_n f_n)(x) - (\pi_n A f)(x)| &\leq \frac{a}{2} \left| f'' \left(\frac{k_1 + m - M}{\sqrt{n}} \right) - f'' \left(\frac{m}{\sqrt{n}} \right) \right| + \frac{1}{3\sqrt{n}} \max |f'''(x)| \\ &< \frac{a}{2\sqrt{n}} \left(k_1 + M + \frac{1}{3} \right) \max |f'''(x)|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x > \frac{M+1}{\sqrt{n}}} |(A_n f_n)(x) - (\pi_n A f)(x)|^2 \leq \frac{C}{n},$$

где $C = C(f)$ – некоторая константа, которая зависит только от функции $f(x)$. Аналогичная оценка верна и для суммы

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x < -\frac{M+1}{\sqrt{n}}} |(A_n f_n)(x) - (\pi_n A f)(x)|^2 \leq \frac{C}{n}.$$

Таким образом, нам остается оценить разность $|(A_n f_n)(x) - (\pi_n A f)(x)|$ для $-\frac{M+1}{\sqrt{n}} \leq x \leq \frac{M+1}{\sqrt{n}}$.

Если $\frac{-M+1}{\sqrt{n}} \leq x = \frac{k}{\sqrt{n}} \leq \frac{M-1}{\sqrt{n}}$, то

(21)

$$\begin{aligned} (A_n f_n)(x) &= n \left(\sum_{z=\frac{m}{\sqrt{n}}=-\frac{M}{\sqrt{n}}}^{\frac{M}{\sqrt{n}}} \text{Pr}^{(n)}(x \rightarrow z) \left(f(0) + \frac{c_m}{\sqrt{n}} \right) - \left(f(0) + \frac{c_k}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ &= \sqrt{n} \left(\sum_{m=-M}^M \text{Pr}(k \rightarrow m) c_m - c_k \right). \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим $x = M/\sqrt{n}$. В этом случае

(22)

$$\begin{aligned} (A_n f_n)(x) &= n\pi(1) \left(f(0) + \frac{c_{M-1}}{\sqrt{n}} + f_n \left(\frac{M+1}{\sqrt{n}} \right) - 2 \left(f(0) + \frac{c_M}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ &= n\pi(1) \left(\frac{c_{M-1} - 2c_M + f'(0+)(k_1 + 1)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} f''(u) \right) \\ &= \sqrt{n}\pi(1) (c_{M-1} - 2c_M + f'(0+)(k_1 + 1)) + O(1). \end{aligned}$$

Здесь $0 < u < \frac{k_1 + 1}{\sqrt{n}}$, $O(1)$ есть величина, ограниченная в предельном переходе $n \rightarrow \infty$. Аналогичные вычисления показывают, что при $x = (M + 1)/\sqrt{n}$

$$(23) \quad (A_n f_n)(x) = \sqrt{n} \pi(1)(c_M - f'(0+)k_1) + O(1),$$

а в точках $x = -M/\sqrt{n}$ и $x = -(M + 1)/\sqrt{n}$

$$(24) \quad \begin{aligned} (A_n f_n)\left(-\frac{M}{\sqrt{n}}\right) &= \sqrt{n} \pi(1)(c_{-M+1} - 2c_{-M} + f'(0-)(k_2 - 1)) + O(1), \\ (A_n f_n)\left(-\frac{M+1}{\sqrt{n}}\right) &= \sqrt{n} \pi(1)(c_{-M} - f'(0-)k_2) + O(1). \end{aligned}$$

Из этих подсчетов видно, что для того, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{|x| \leq \frac{M+1}{\sqrt{n}}} |(A_n f_n)(x) - (\pi_n A f)(x)|^2 \rightarrow 0,$$

достаточно (и необходимо) выбрать константы c_m , $|m| \leq M$, и $k_1 \geq 0$, $k_2 \leq 0$ так, чтобы коэффициенты при $\sqrt{n}$ в выражениях (21)–(24) обращались в нуль. Это приводит к следующим уравнениям:

$$(25) \quad \begin{aligned} \sum_{m=-M}^M \text{Pr}(k \rightarrow m) c_m - c_k &= 0, \quad k = -M + 1, \dots, M - 1, \\ c_{-M+1} - c_{-M} &= f'(0-), \\ c_{M-1} - c_M &= -f'(0+), \\ c_{-M} &= k_2 f'(0-), \\ c_M &= k_1 f'(0+). \end{aligned}$$

Обозначим через $T = \{T_{k,m}\}$ матрицу порядка $2M + 1$

$$(26) \quad T_{k,m} = \begin{cases} \text{Pr}(k \rightarrow m), & k = -M + 1, \dots, M - 1, m = -M, \dots, M, \\ \delta_{m,M-1}, & k = M, \\ \delta_{m,-M+1}, & k = -M, \end{cases}$$

через $C = \{c_m, |m| \leq M\}$ – столбец неизвестных, а через $B = \{b_m\}$ – столбец

$$b_m = \begin{cases} -f'(0+), & m = M, \\ f'(0-), & m = -M, \\ 0, & m \neq M, -M. \end{cases}$$

Разобьем систему (25) на две подсистемы. В одну из них войдут два последних уравнения, которые служат для определения констант k_1 и k_2 . Тогда оставшуюся подсистему можно записать в виде

$$(27) \quad (T - E)C = B,$$

где E – единичная матрица порядка $2M + 1$, а матрица T определена в (26). Заметим, что для вектора $C_0 = \{c_m = \text{const}, |m| \leq M\}$

$$(T - E)C_0 = 0.$$

Теперь мы сформулируем наше второе предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Матрица T (26) имеет единственный собственный вектор C_0 с собственным значением 1.

Из этого предположения следует, что у сопряженной матрицы тоже существует единственный собственный вектор с собственным значением 1, который мы обозначим через C_0^* . Таким образом, система (27) имеет решение C при условии, что

$$(B, C_0^*) = c_{-M}^* f'(0-) - c_M^* f'(0+) = 0,$$

то есть

$$(28) \quad \gamma = \frac{f'(0-)}{f'(0+)} = \frac{c_M^*}{c_{-M}^*}.$$

Поскольку отношение $\frac{c_M^*}{c_{-M}^*}$ однозначно определяется параметрами исходного случайного блуждания, формула (28) показывает связь между этими параметрами и предельным диффузионным процессом.

В заключение мы приведем явную формулу, выражающую константу γ (характеристику предельного диффузионного процесса) через переходные вероятности $\Pr(y \rightarrow x) = p_{y,x}$ неоднородного случайного блуждания на решетке Z .

ЛЕММА 2. Константа $\gamma = \frac{1+k}{1-k}$ допускает следующее представление:

$$(29) \quad \gamma = \frac{\det P'}{\det P},$$

где P, P' – квадратные матрицы порядка $2M$:

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ \vdots & R^* & \\ -1 & & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & R^* & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

R^* – матрица, сопряженная к матрице $R = \{R_{k,m}\}$, $k = M-1, \dots, -M+1$, $m = M-1, \dots, -M$, $R_{k,m} = \Pr(k \rightarrow m) - \delta_{k,m}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из выражения (29), константа γ зависит только от конечного набора переходных вероятностей $\Pr(k \rightarrow m)$, а именно, когда $k \in [-M+1, M-1]$, $m \in [-M, M-1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ с учетом предположения легко выводится с помощью правила Крамера, примененного к системе линейных уравнений $(T^* - E)C_0^* = 0$, где следует положить $c_{-M}^* = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Минлос Р. А., Жижина Е. А. Локальная предельная теорема для неоднородного случайного блуждания по решетке // Теория вероятн. и ее примен. 1994. Т. 39. № 3. С. 513–529.
- [2] Биллингслей П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [3] Портенко Н. И. Обогащенные диффузионные процессы. Киев: Наукова думка, 1982.
- [4] Лигgett Т. Марковские процессы с локальным взаимодействием. М.: Мир, 1989.
- [5] Ethier S. N., Kurtz T. G. Markov processes. Characterization and convergence. New York: John Wiley & Sons, 1986.

Институт проблем передачи информации РАН

Поступила в редакцию
15.09.1996