Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людкинский, Вложения неархимедовых банаховых многообразий в неархимедовы банаховы пространства, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 241–242

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm82>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:41:00

ВЛОЖЕНИЯ НЕАРХИМЕДОВЫХ БАНАХОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ В НЕАРХИМЕДОВЫ БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

С. В. ЛЮДКОВСКИЙ

1. Определения. (а) Пусть H – банахово пространство (БП) над неархимедовым полем $\mathbf{K}$ [2], ультраметризуемое пространство M называется многообразием смоделированным на H , если для M выбран атлас $At(M) = \{(U_b, f_b) : b \in A\}$ с картами (U_b, f_b) такими, что $f_b : U_b \rightarrow V_b$ – гомеоморфизмы, U_b открыты в M , V_b открыты в H , $\bigcup_b U_b = M$; (б) метрика ρ на M называется ультраметрикой, если $\rho(x, y) \leq \max(\rho(x, z); \rho(y, z))$ для любых $x, y, z \in M$; (в) микрорасслоением X называется диаграмма $B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$ состоящая из топологических пространств B (базы) и E (тотального пространства), а также непрерывных отображений i (инъекции) и j (проекции) с $j \circ i = \text{id} : B \rightarrow B$ – тождественным отображением, причем выполнено условие тривиальности: $\forall z \in H \exists$ открытые $U \ni z$ и $V \ni i(z)$ с $i(U) \subset V$, $j(V) \subset U$, $h : V \rightarrow U \times H$ – гомеоморфизм, причем $j \circ i|_U = p_1 \circ x_0|_U$, $h \circ i|_U = x_0|_U$, $p_1 \circ h|_V = j|_V$, с инъекцией $x_0(u) = (u, 0)$, проекцией $p_1(u, x) = u$ (см. [3]). Далее $w(H)$ и $d(H)$ обозначают топологический вес и плотность соответственно для H .

2. ТЕОРЕМА. Если M и H из определений таковы, что $\text{card}(A) \leq w(H)$, H бесконечномерно над $\mathbf{K}$ или $\mathbf{K}$ не локально компактно, то M гомеоморфно открыто-замкнутому (ОЗ) подпространству в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\mathbf{K}$ неметризуемо. Если $W^* = \{W_q : q \in J\}$ – открытое покрытие для M , то существует дизъюнктное покрытие P^* ОЗ подмножествами P_s вписанное в W^* (см. 7.3.15 в [4]). В самом деле, существует ультраметрика ρ' эквивалентная ρ такая, что $\rho'(x, y)/p \leq \rho(x, y) \leq p\rho'(x, y)$ и $\rho'(x, y) \in \Gamma(\mathbf{K}) := \{|x|_{\mathbf{K}} : x \in \mathbf{K}\}$ для любых $x, y \in M$. Шары $B_\rho(M, v, r) := \{y \in M : \rho(y, v) \leq r\}$ ОЗ в M и любые два шара в M либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом в силу (1.6). Каждая характеристическая функция $h_s := \chi_{P_s} : M \rightarrow \mathbf{K}$ непрерывна, следовательно, существует разбиение единицы $\{h_s : s\}$ подчиненное W^* . Тогда предложения 1, 2 и 3 из [1] доказываются для неархимедовых H (и микрорасслоений) вполне аналогично, причем они выполняются для ОЗ $U \supset i(B)$ (в пр. 1) и $N \subset H$ (в пр. 2), где касательное расслоение TM для M класса гладкости C^t с $t \geq 1$ определяется для неметризуемых полей $\mathbf{K}$ с помощью рассмотрения кривых $x : \mathbf{K} \rightarrow M$ и дифференцирований по параметрам, в частности, для U_b , а структурная группа является подгруппой в $GL(H)$ [5].

При доказательстве неархимедова варианта предложения 4 [1] отрезок $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ можно заменить на компактный единичный шар $B(L, 0, 1) =: B'$, где L – локально компактное бесконечное подполе в $\mathbf{K}$, следовательно, B' имеет конечное подпокрытие $\{V_y : y\}$, возникающее из рассмотрения индуцированного микрорасслоения $b^* : H \times B' \xrightarrow{i} E^* \xrightarrow{j} H \times B'$. Тогда существует конечное семейство $t(0), \dots, t(m) \in B'$, $1 > r(k) > 0$ такое, что $B' = \bigcup_{k=0}^m B(L, t(k), r(k))$ – дизъюнктное объединение, а $b^*|_{U_x \times B(L, t(k), r(k))}$ – тривиальны. Далее можно задать $R(0) = H \times \{0\}$, $R(q) = \{(x, t) \in U_q \times B' : |\sum_{s < q} \lambda_s(x)|_{\mathbf{K}} \leq |t|_{\mathbf{K}} \leq |\sum_{s \leq q} \lambda_s(x)|_{\mathbf{K}}\}$, а потом рассуждать аналогично концу доказательства пр. 4 [1] трансфинитной индукцией по $q \in J$ вместо $i \in \mathbb{N}$ для семейства $\{Z_q \subset j^{-1}(\bigcup_{s \leq q} R(s)) : q \in J\}$ упорядоченного по включению, а также варианта предложения 3 [1] для неархимедовых микрорасслоений, где $\{\lambda_q\}$ – разбиение 1, соответствующее дизъюнктному ОЗ покрытию $\{U_q : q \in J\}$, J – вполне упорядочено, 0 – наименьший элемент в J , $\text{card}(J) = w(H)$.

Вариант пр. 5 [1] для неархимедовых микрорасслоений выполняется также для ОЗ базы $N \subset H$, а $W \supset i(N)$ может быть выбрана ОЗ, так как при доказательстве достаточно рассмотреть ОЗ $W_0 \subset \bigcup_{\alpha \in K^0} W_\alpha$. В самом деле, по теореме 3.8 [6] H гомеоморфно $S^{\mathbb{N}}$, где S – дискретное пространство мощности $\text{card}(S) = w(H)$. Поскольку $w(B(H, v, r)) = w(H) \geq \aleph_0$ для любых $v \in H$ и $r > 0$, то из $d(\mathbf{K}) = w(\mathbf{K}) \geq \aleph_0$ следует, что $d(H) = w(H)$ и существует разбиение пространств $X_1 := B(H, v, r)$, $X_2 := B(H, v, r^-) := \{x \in H : \|x - v\| < r\}$ и $X_3 := H$ в дизъюнктные объединения ОЗ шаров, $X_j = \bigcup_{q \in L'_j} B(H, v_q, r_q)$, мощности $\text{card}(L'_j) = w(H)$

для $j = 1, 2, 3$, $r_q > 0$ для любого q . Любые два ОЗ шара в H гомеоморфны, следовательно, $X_1 \cong X_2 \cong X_3$ — гомеоморфны (для не сферически полного $\mathbf{K}$ шар X_2 открыт, но не замкнут в H и в общем случае гомеоморфизмы $h_j: X_2 \rightarrow X_j$ с $j = 1$ или 3 не продолжаются на все H). Итак, для N существует дискретное пространство Y такое, что $N = Y \times H$, причем Y можно рассматривать как объединение нульмерных одноточечных симплексов.

Далее рассмотрим изометричное вложение (M, ρ) в свободное БП $B(M, \mathbf{K})$ (см. т. 5 в [7]). Тогда $d(B(M, \mathbf{K})) = w(B(M, \mathbf{K})) = d(M)d(\mathbf{K}) = w(H)$, так как $d(M) = w(M) = (\text{card}(A))d(H)$, следовательно, $B(M, \mathbf{K}) \cong S^{\mathbb{N}} \cong H$ — гомеоморфны и существует вложение $i: M \rightarrow H$. Пусть $M^c := \{x \in H : \rho'_H(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|'_H \leq c\}$ обозначает c -раздutie $M \cong i(M)$ в H , где $c = c(n) = |\xi|_{\mathbf{K}}^n = p^{-n}$, $1 < p$, $\xi \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbb{N}$, $\|x\|'_H := \inf_{b \geq \|x\|_H} \{b \in \Gamma(L)\}$ соответствует рассмотрению H и $\mathbf{K}$ как БП над L , обозначаемых H_L и $\mathbf{K}_L$ соответственно. Поле L сферически полно, поэтому любое замкнутое L — линейное подпространство F в H_L имеет ортогональное дополнение (в неархимедовом смысле) $H_L \ominus F$ (см. т. 5.13 и 5.16 [6]). Для каждого M^c существует дизъюнктное ОЗ покрытие шарами в H . Если $v \in F \subset H_L$, то имеется ретракция $B(H, v, r)$ на $B(F, v, r)$ индуцированная проекцией $\pi: H_L \rightarrow F$. Поэтому, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует ретракция $h_n: M^c \rightarrow M^{c/p}$ для $c = c(n)$, следовательно, $\{h_n: n\}$ дает ретракцию $r: M^1 \rightarrow M$, так как $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M^{c(n)} = M$, где $r(x) = x$ для $x \in M$, $r(x) = h_n(x)$ для $x \in M^c \setminus M^{c/p}$, $M^1 =: N$ ОЗ в H . Существует семейство подполей L_β в $\mathbf{K}$, $\beta \in \Lambda$, такое, что L_β — локально компактны, и минимальное поле порожденное $\bigcup_{\beta \in \Lambda} L_\beta$ плотно в $\mathbf{K}$ (см. § X.1 [8]).

В покрытие $\{U_q: q\}$ для M можно вписать дизъюнктное ОЗ покрытие $W^* = \{W_s: s\}$ такое, что W_s гомеоморфны ОЗ шарам в H . Тогда $W_s \times H \cong S^{\mathbb{N}} \cong H \times H \cong S^{\mathbb{N}} \cong W_s$ для любых s , следовательно, $M \times H \cong \bigcup_s W_s \cong M$. Рассматривая ОЗ N и W как и в доказательстве теоремы в [1] с использованием неархимедовых вариантов предложений 1–5 (см. выше), получим утверждение теоремы 2. В оставшемся случае дискретного $\mathbf{K}$ пространства M и H дискретны, так как $\{\rho(x, y): x, y \in M\} \subset \Gamma(\mathbf{K})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Henderson D. W. // Topology. 1970. V. 9. P. 25–35. [2] Van Rooij A. C. M. Non-Archimedean functional analysis. New York: Marcel Dekker Inc., 1978. [3] Milnor J. // Topology. 1964–1965. V. 3. № 1. P. 53–80. [4] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. [5] Бурбаки Н. Многообразия. М.: Мир, 1975. [6] Van Rooij A. C. M. // Report 7633. Math. Inst. Cathol. Univ., Nijmegen, The Netherlands, 1976. [7] Людковский С. В. // Фунд. и прикл. матем. 1995. Т. 1. С. 979–987. [8] Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.

Институт общей физики РАН

Принято редколлегией
01.04.1998