Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Пинскер, В. В. Прелов, О безошибочной фильтрации некоторых стационарных процессов, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 109–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm821>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 04:56:09

УДК 519.2

О БЕЗОШИБОЧНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
НЕКОТОРЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

М. С. ПИНСКЕР, В. В. ПРЕЛОВ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	109
§ 2. Энтропийно-регулярные и энтропийно-сингулярные процессы	110
§ 3. Формулировка результатов	111
§ 4. Доказательство теоремы	113
Список литературы	118

§ 1. Введение

Задача оптимальной фильтрации для двумерного частично наблюдаемого процесса (X, Y) , где $X = X(t)$ – ненаблюдаемая, а $Y = Y(t)$ – наблюдаемая компоненты, являющиеся случайными процессами дискретного или непрерывного времени t , состоит в построении для каждого момента времени t оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки $X(t)$ по результатам наблюдений $Y(s)$, $s \leq t$. Хорошо известно, что если $EX^2(t) < \infty$, то такой оценкой является условное математическое ожидание $m(t) = E[X(t) | Y(s), s \leq t]$, так что задача оптимальной фильтрации сводится к отысканию и исследованию свойств условных математических ожиданий $E[X(t) | Y(s), s \leq t]$.

В данной работе мы будем рассматривать классический случай, восходящий к Винеру и Колмогорову, когда частично наблюдаемый процесс (X, Y) представляет собой пару стационарных и стационарно связанных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ с дискретным или непрерывным временем, а оценивание значений $X(t)$ происходит по наблюдениям $Y_{-\infty}^t = \{Y(s), s \leq t\}$. Более того, мы будем предполагать, что $Y(t) = X(t) + Z(t)$, где $Z(t)$ – некоторый стационарный процесс, не зависящий от $X(t)$. Обозначим через e_{opt}^2 среднеквадратическую ошибку оптимальной фильтрации $X(t)$ по наблюдениям $Y_{-\infty}^t$, т.е.

$$e_{\text{opt}}^2 = E[X(t) - E(X(t) | Y_{-\infty}^t)]^2$$

(ввиду стационарности рассматриваемых процессов e_{opt}^2 не зависит от t). Явное выражение для e_{opt}^2 в терминах достаточно простых характеристик процессов $X(t)$ и

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS (грант 94-469), гранта DMS9600245 и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00884).

$Z(t)$ удастся получить лишь в отдельных весьма частных случаях. Поэтому значительный интерес представляет задача исследования асимптотического поведения e_{opt}^2 в зависимости от поведения тех или иных характеристик указанных процессов.

Пусть, например, $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$, – стационарная последовательность случайных величин с конечным числом значений, а $Z(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$, – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, что соответствует особенно часто рассматриваемому в статистике случаю независимых шумов наблюдений. Обозначим через H энтропию (на единицу времени) последовательности $X(t)$. Естественнo предположить, что если $H \rightarrow 0$, то и $e_{\text{opt}}^2 \rightarrow 0$, поскольку с убыванием H процесс $X(t)$ становится все более “медленно меняющимся” с течением времени и поэтому его оценивание по наблюдениям $Y_{-\infty}^t$ становится все более и более точным. Последнее утверждение основано на том, что для “предельного” случая, когда $X(t) \equiv \theta$ при всех t (т.е. когда $X(t)$ совсем не меняется с течением времени), где θ некоторая случайная величина, имеет место равенство $e_{\text{opt}}^2 = 0$. Действительно, пусть $e_{\text{opt}}^2(n) = \mathbf{E}[\theta - \mathbf{E}(\theta | Y_1, \dots, Y_n)]^2$ – среднеквадратическая ошибка оптимальной оценки неизвестного параметра θ по n наблюдениям $Y_1, \dots, Y_n$, где $Y_j = \theta + Z_j$, $j = 1, \dots, n$, а Z_j – независимые одинаково распределенные случайные величины. Хорошо известно, что $e_{\text{opt}}^2(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а значит $e_{\text{opt}}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{\text{opt}}^2(n) = 0$. (Заметим, что большое число работ классической теории оценивания посвящено исследованию свойств оптимальных и асимптотически оптимальных оценок и, в частности, более точному исследованию асимптотического поведения $e_{\text{opt}}^2(n)$ при $n \rightarrow \infty$.)

Возвращаясь теперь к случаю стационарной последовательности $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$, с конечным числом значений и энтропией H , заметим, что можно показать (см. [1]), что $e_{\text{opt}}^2 = O(H)$, $H \rightarrow 0$, если $Z(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$, является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. В частности, $e_{\text{opt}}^2 = 0$, если $H = 0$, т.е. если энтропия процесса $X(t)$ равна 0, то возможна безошибочная фильтрация $X(t)$ по наблюдениям $Y_{-\infty}^t$ с шумом, представляющим собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящих от оцениваемого сигнала $X(t)$. В данной работе мы докажем, что безошибочная фильтрация возможна и в значительно более общем случае, когда процесс $X(t)$ является энтропийно-сингулярным, а $Z(t)$ – энтропийно-регулярным. Необходимые определения и некоторые свойства энтропийно-регулярных и энтропийно-сингулярных процессов приведены в следующем параграфе. Сразу отметим лишь, что понятие энтропийной сингулярности для процессов с непрерывным множеством значений служит естественным обобщением понятия нулевой энтропии для процессов с конечным множеством значений, совпадая с ним в последнем случае.

§2. Энтропийно-регулярные и энтропийно-сингулярные процессы

Прежде всего введем и напомним необходимые нам определения.

Случайный процесс (с дискретным или непрерывным временем) $U = U(t)$ называется *регулярным* (см., например, [2, гл. 5, §8]), если σ -алгебра $\bigcap_t \mathcal{A}_U(-\infty, t)$ тривиальна (т.е. содержит только события, имеющие вероятность 0 или 1), где $\mathcal{A}_U(-\infty, t)$ – минимальная σ -алгебра, содержащая все события $\{U(t_1) \in E_1, \dots, U(t_n) \in E_n\}$ для любых натуральных чисел n , любых $t_1, \dots, t_n \in (-\infty, t)$ и любых борелевских множеств $E_1, \dots, E_n$ действительных чисел.

Случайный процесс (с дискретным или непрерывным временем) $V = V(t)$ называ-

ется *сингулярным* [3, гл. 2, § 5], если $\mathcal{A}_V(-\infty, t) = \mathcal{A}_V(-\infty, s)$ для любых s и t .

Стационарный случайный процесс с дискретным временем $U(k)$, $k = 0, \pm 1, \dots$, называется *энтропийно-регулярным* [4], если любой нетривиальный (отличный от константы) подчиненный ему [3, гл. 2, § 5] и стационарно связанный с ним процесс с конечным числом состояний является регулярным. Стационарный случайный процесс с непрерывным временем $U(t)$ называется энтропийно-регулярным, если при любом Δ , $-\infty < \Delta < \infty$, процесс с дискретным временем $U_\Delta(k) = U(k\Delta)$, $k = 0, \pm 1, \dots$, является энтропийно-регулярным.

Стационарный случайный процесс с дискретным временем $V(k)$, $k = 0, \pm 1, \dots$, называется *энтропийно-сингулярным* [5], если любой подчиненный ему и стационарно связанный с ним процесс с конечным числом состояний является сингулярным. Стационарный случайный процесс с непрерывным временем $V(t)$ называется энтропийно-сингулярным, если при любом Δ , $-\infty < \Delta < \infty$, процесс с дискретным временем $V_\Delta(k) = V(k\Delta)$, $k = 0, \pm 1, \dots$, является энтропийно-сингулярным.

Некоторые свойства энтропийно-регулярных и энтропийно-сингулярных процессов указаны в работах [4], [6]. Здесь мы отметим лишь те из них, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Известно, что энтропия (на единицу времени) всякого регулярного стационарного процесса с дискретным временем и конечным числом значений строго положительна, а энтропия любого стационарного сингулярного процесса с дискретным временем и конечным числом значений равна нулю. Поэтому энтропийно-регулярные процессы – это процессы с вполне положительной энтропией, а энтропийно-сингулярные – процессы с нулевой энтропией [7].

Легко видеть, что всякий регулярный стационарный процесс является энтропийно-регулярным. Любой нетривиальный стационарный процесс, стационарно связанный и подчиненный энтропийно-регулярному процессу, энтропийно регулярен. Всякий стационарный энтропийно-регулярный процесс имеет спектральную плотность.

Любой стационарный процесс, стационарно связанный и подчиненный энтропийно-сингулярному процессу, энтропийно сингулярен. Подчеркнем также, что класс энтропийно-сингулярных процессов занимает некоторое промежуточное положение между классом процессов с сингулярным спектром и классом сингулярных процессов. Точнее, всякий энтропийно-сингулярный процесс является сингулярным, а всякий процесс с сингулярным спектром – энтропийно-сингулярным. Можно показать, что энтропийно-сингулярные процессы могут иметь спектральную плотность, откуда, в частности, следует, что класс процессов с сингулярным спектром лежит строго внутри класса энтропийно-сингулярных процессов.

§ 3. Формулировка результатов

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $X(t)$ и $Z(t)$ являются стационарными процессами с дискретным или непрерывным временем и нулевыми средними. Основной результат работы содержит следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Если $X(t)$ – энтропийно-сингулярный, а $Z(t)$ – энтропийно-регулярный независимые стационарные процессы второго порядка, то оптимальная оценка значения $X(t)$ по наблюдениям $Y_{-\infty}^t = \{Y(s), -\infty < s \leq t\}$, где*

$Y(t) = X(t) + Z(t)$, совпадает с $X(t)$, т.е.

$$(1) \quad E[X(t) | Y_{-\infty}^t] = X(t) \quad \text{п.н.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве простых следствий этой теоремы можно указать следующие.

1) В условиях теоремы значения $X(t)$ могут быть восстановлены без ошибки из наблюдений $Y_{-\infty}^s$ при любом конечном s , т.е. имеет место более общее, чем (1), равенство

$$E[X(t) | Y_{-\infty}^s] = X(t) \quad \text{п.н.}$$

Действительно, если $s \geq t$, то это утверждение сразу следует из (1). Если же $s < t$, то согласно (1) по наблюдениям $Y_{-\infty}^s$ можно безошибочно восстановить значение $X_{-\infty}^s$, а так как процесс $X(t)$, будучи энтропийно-сингулярным, является сингулярным, то возможна безошибочная экстраполяция значения $X(t)$ в любой момент времени t по значениям $X_{-\infty}^s$.

2) Оптимальная оценка значения $Z(t)$ по наблюдениям $Y_{-\infty}^t$ также совпадает с $Z(t)$, т.е.

$$(2) \quad E[Z(t) | Y_{-\infty}^t] = Z(t) \quad \text{п.н.}$$

Более того, из предыдущего замечания следует, что

$$E[Z(t) | Y(t), Y_{-\infty}^s] = Z(t) \quad \text{п.н.}$$

для любого конечного s .

3) Оптимальная экстраполяция $Z(t)$ по наблюдениям $Y_{-\infty}^s$, где $s \leq t$, совпадает с оптимальной экстраполяцией $Z(t)$ по наблюдениям $Z_{-\infty}^s$.

4) Пусть $Y(t) = X(t) + U(t) + Z(t)$, где $X(t)$, $U(t)$ и $Z(t)$ – независимые стационарные процессы второго порядка, причем $Z(t)$ и $U(t)$ – энтропийно-регулярные, а $X(t)$ – энтропийно-сингулярный. Тогда

$$E[Z(t) | Y_{-\infty}^t] = E[Z(t) | Z_{-\infty}^t + U_{-\infty}^t] \quad \text{п.н.,}$$

т.е. оптимальная оценка $Z(t)$ по наблюдениям $Y_{-\infty}^t$ совпадает с оптимальной оценкой $Z(t)$ по наблюдениям $Z_{-\infty}^t + U_{-\infty}^t$.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы заметим, что требование энтропийной регулярности процесса $Z(t)$ представляется одним из наиболее слабых ограничений на класс процессов $Z(t)$, при которых теорема верна. Вообще отказаться от требования какой-либо “регулярности” процесса $Z(t)$ нельзя. Например, если $X(t)$ и $Z(t)$ – независимые энтропийно-сингулярные процессы такие, что $X(t) \equiv X$ и $Z(t) \equiv Z$ при всех t , то оценить $X(t)$ без ошибки по наблюдениям $Y_{-\infty}^t$ в общем случае, очевидно, нельзя.

Отметим, что в [4] было доказано более слабое, чем (2), утверждение о том, что $E[Z(t) | Y_{-\infty}^t] = Z(t)$ п.н. и только для гауссовского процесса $Z(t)$. Метод, использованный нами в [4], не позволяет распространить этот результат на произвольный негауссовский энтропийно-регулярный процесс $Z(t)$.

Заметим наконец, что любой стационарный процесс $X(t)$ с сингулярным спектром можно восстановить без ошибки по наблюдениям $Y_{-\infty}^\infty$ путем выделения из спектрального представления $Y(t)$ его чисто сингулярной компоненты. Но так как всякий процесс с сингулярным спектром является энтропийно-сингулярным, то согласно (1) значения $X(t)$ могут быть восстановлены без ошибки и из наблюдений $Y_{-\infty}^t$.

§ 4. Доказательство теоремы

Сразу же отметим, что теорему достаточно доказать для процессов с дискретным временем, так как ее справедливость для процессов с непрерывным временем будет уже следовать автоматически. Действительно, так как при любой дискретизации свойства энтропийной регулярности и энтропийной сингулярности процессов сохраняются, то по предположению значение процесса $X_\Delta(k) = X(\Delta k)$ может быть восстановлено без ошибки из наблюдений $Y_\Delta(l) = X_\Delta(l) + Z_\Delta(l)$, $l \leq k$, а значит и из наблюдений $Y_{-\infty}^{k\Delta} = \{Y_{-\infty}^s, -\infty < s \leq k\Delta\}$ тем более.

Кроме того, без ограничения общности мы можем считать (что и будет всегда предполагаться в дальнейшем), что процесс $Z(k)$, $k = 0, \pm 1, \dots$, может быть представлен в виде суммы двух независимых стационарных процессов $U = U(k)$ и $W = W(k)$, так что $Z(k) = U(k) + W(k)$, $k = 0, \pm 1, \dots$, где $U(k)$ – энтропийно-регулярный, а $W(k)$ – последовательность независимых гауссовских с параметрами $(0, 1)$ случайных величин. Действительно, добавим к наблюдениям $Y(k)$ вспомогательную последовательность $W(k)$, т.е. образуем новый процесс наблюдений

$$\tilde{Y}(k) = X(k) + \tilde{Z}(k),$$

где $\tilde{Z}(k) = Z(k) + W(k)$. Тогда возможность восстановления $X(k)$ без ошибки по наблюдениям $\tilde{Y}_{-\infty}^k$ будет означать справедливость утверждения теоремы.

Для доказательства теоремы мы используем теоретико-информационные методы. Общая схема доказательства состоит в следующем. Обозначим через $X_n = X_n(k)$, $k = 0, \pm 1, \dots$, “разреженный” стационарный процесс, определяемый равенством $X_n(k) = X(nk)$ при любом натуральном $n = 1, 2, \dots$. Аналогично определяются процессы Z_n, Y_n и вводимые ниже процессы Z_n^* и U_n^* . Мы докажем, что

$$(3) \quad I(X(0); X(0) + Z(0) \mid Y_{-\infty}^{-1}) = 0$$

и

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I(X(0); Z(0) \mid (Y_n)_{-\infty}^{-1}) = 0,$$

где $I(\cdot; \cdot \mid \cdot)$ – условная информация между соответствующими случайными величинами. Затем, используя “ ε -энтропийные соображения”, мы покажем, что из (3) и (4) следует, что $X(0)$ является функцией от $Y_{-\infty}^{-1}$, т.е. $X(0)$ может быть восстановлено без ошибки из наблюдений $Y_{-\infty}^{-1}$. В силу стационарности рассматриваемых процессов это утверждение справедливо и для любого момента времени t , а не только для $t = 0$.

Докажем сначала равенство (3). Для этого заметим, что

$$(5) \quad \bar{h}(Z) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(Z_1^n) = h(Z(0) \mid Z_{-\infty}^{-1}),$$

где $h(\cdot)$ и $h(\cdot \mid \cdot)$ – дифференциальная энтропия и условная дифференциальная энтропия соответственно. Второе из равенств в (5) следует из стационарности процесса Z , невозрастания по n условной дифференциальной энтропии $h(Z(n) \mid Z_1^{n-1})$ и ее ограниченности снизу:

$$h(Z(n) \mid Z_1^{n-1}) = h(U(n) + W(n) \mid Z_1^{n-1}) \geq h(W(n) \mid Z_1^{n-1}) = h(W(0)).$$

Аналогично показывается, что

$$(6) \quad \bar{h}(X + Z) = h(X(0) + Z(0) \mid X_{-\infty}^{-1} + Z_{-\infty}^{-1}).$$

Далее, так как X – энтропийно-сингулярный процесс, то нетрудно доказать, что

$$(7) \quad \bar{h}(X + Z) = \bar{h}(Z).$$

Действительно, представим X в виде суммы двух стационарных процессов $X^* = X^*(k)$ и $\tilde{X} = \tilde{X}(k)$, где X^* – процесс с конечным числом значений (“квантованная” версия процесса X), а $E\tilde{X}^2(k) \leq \varepsilon^2$, где ε – произвольно заданное положительное число. Тогда, обозначая через $H(\cdot)$ энтропию и полагая как обычно $Y = X + Z$, имеем

$$(8) \quad \begin{aligned} I(X_1^n; Y_1^n) &\leq I((X^*)_1^n, \tilde{X}_1^n; Y_1^n) \\ &= I((X^*)_1^n; Y_1^n) + I(\tilde{X}_1^n; Y_1^n \mid (X^*)_1^n) \\ &\leq H((X^*)_1^n) + I(\tilde{X}_1^n; Z_1^n + \tilde{X}_1^n \mid (X^*)_1^n) \\ &\leq H((X^*)_1^n) + I(\tilde{X}_1^n; Z_1^n + \tilde{X}_1^n). \end{aligned}$$

Последнее из неравенств в соотношениях (8) следует из того, что тройка случайных величин $(X^*)_1^n \rightarrow \tilde{X}_1^n \rightarrow Z_1^n + \tilde{X}_1^n$ образует цепь Маркова. Далее, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H((X^*)_1^n) = 0,$$

ввиду энтропийной сингулярности процесса X , и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(\tilde{X}_1^n; Z_1^n + \tilde{X}_1^n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(\tilde{X}_1^n; W_1^n + \tilde{X}_1^n) \leq \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon^2),$$

то из (8) заключаем, что

$$(9) \quad \bar{I}(X; X + Z) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(X_1^n; X_1^n + Z_1^n) = 0,$$

откуда и следует (7).

Пользуясь соотношениями (5)–(7), получаем

$$\begin{aligned} I(X(0); X(0) + Z(0) \mid Y_{-\infty}^{-1}) &= h(X(0) + Z(0) \mid Y_{-\infty}^{-1}) - h(Z(0) \mid Y_{-\infty}^{-1}, X(0)) \\ &\leq \bar{h}(X + Z) - h(Z(0) \mid Y_{-\infty}^{-1}, X(0), X_{-\infty}^{-1}) \\ &= \bar{h}(X + Z) - \bar{h}(Z) = 0, \end{aligned}$$

т.е. равенство (3) установлено.

Докажем теперь равенство (4). Имеем

$$(10) \quad \begin{aligned} I(Z(0); X(0), (X_n)_{-\infty}^{-1}, (Y_n)_{-\infty}^{-1}) \\ = \begin{cases} I(Z(0); (Y_n)_{-\infty}^{-1}) + I(Z(0); X(0), (X_n)_{-\infty}^{-1} \mid (Y_n)_{-\infty}^{-1}) \\ I(Z(0); X(0), (X_n)_{-\infty}^{-1}) + I(Z(0); (Y_n)_{-\infty}^{-1} \mid X(0), (X_n)_{-\infty}^{-1}). \end{cases} \end{aligned}$$

Сравнивая оба выражения в правой части (10) и замечая, что

$$\begin{aligned} I(Z(0); X(0), (X_n)_{-\infty}^{-1}) &= 0, \\ I(Z(0); X(0), (X_n)_{-\infty}^{-1} \mid (Y_n)_{-\infty}^{-1}) &\geq I(Z(0); X(0) \mid (Y_n)_{-\infty}^{-1}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I(Z(0); (Y_n)_{-\infty}^{-1} \mid X(0), (X_n)_{-\infty}^{-1}) &= I(Z(0); (Z_n)_{-\infty}^{-1} \mid X(0), (X_n)_{-\infty}^{-1}) \\ &= I(Z(0); (Z_n)_{-\infty}^{-1}), \end{aligned}$$

получаем

$$(11) \quad I(Z(0); X(0) \mid (Y_n)_{-\infty}^{-1}) \leq I(Z(0); (Z_n)_{-\infty}^{-1}).$$

Таким образом, равенство (4) будет доказано, если мы покажем, что

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I(Z(0); (Z_n)_{-\infty}^{-1}) = 0.$$

Вспоминая, что $Z = U + W$, представим процесс U в виде суммы $U = U^* + \tilde{U}$, где U^* и $\tilde{U}$ – стационарные процессы такие, что U^* – процесс с конечным числом значений, а $E\tilde{U}^2(k) \leq \delta^2$, где δ – произвольно заданное положительное число. Тогда, полагая $Z = Z^* + \tilde{U}$, где $Z^* = U^* + W$, имеем

$$\begin{aligned} (13) \quad I(Z(0); (Z_n)_{-\infty}^{-1}) &= h(Z(0)) - \bar{h}(Z_n) \\ &= [h(Z(0)) - h(Z^*(0))] + [h(Z^*(0)) - \bar{h}(Z_n^*)] + [\bar{h}(Z_n^*) - \bar{h}(Z_n)]. \end{aligned}$$

Из леммы, доказанной в работе [6], следует, что

$$(14) \quad |h(Z(0)) - h(Z^*(0))| \leq f(\delta)$$

и

$$(15) \quad |\bar{h}(Z_n^*) - \bar{h}(Z_n)| \leq f(\delta),$$

где $f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Далее, так как W – последовательность независимых (гауссовских) случайных величин, то нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} (16) \quad h(Z^*(0)) - \bar{h}(Z_n^*) &= I(Z^*(0); (Z_n^*)_{-\infty}^{-1}) \\ &= I(U^*(0) + W(0); (U_n^*)_{-\infty}^{-1} + (W_n)_{-\infty}^{-1}) \\ &\leq I(U^*(0); (U_n^*)_{-\infty}^{-1}). \end{aligned}$$

Действительно, неравенство в (16) вытекает из следующей очевидной цепочки соотношений

$$\begin{aligned} I(U^*(0) + W(0); (U_n^*)_{-\infty}^{-1} + (W_n)_{-\infty}^{-1}) &\leq I(U^*(0) + W(0); (U_n^*)_{-\infty}^{-1}, (W_n)_{-\infty}^{-1}) \\ &= I(U^*(0) + W(0); (U_n^*)_{-\infty}^{-1}) \\ &\leq I(U^*(0), W(0); (U_n^*)_{-\infty}^{-1}) \\ &= I(U^*(0); (U_n^*)_{-\infty}^{-1}). \end{aligned}$$

Так как U_n^* – регулярный процесс с конечным числом значений, то $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см., например, [8]), где ρ_n – расстояние по вариации между совместным распределением пары $(U^*(0), (U_n^*)_{-\infty}^{-1})$ и произведением распределений $U^*(0)$ и $(U_n^*)_{-\infty}^{-1}$. Известно (см., например, [5]), что

$$(17) \quad I(U^*(0); (U_n^*)_{-\infty}^{-1}) \leq \rho_n \ln \frac{\|U^*(0)\|}{\rho_n}$$

(если $\|U^*(0)\| \geq 4$), где $\|U^*(0)\|$ – число значений $U^*(0)$, а, следовательно,

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I(U^*(0); (U_n^*)_{-\infty}^{-1}) = 0.$$

Из соотношений (13)–(16) и (18) вытекает (12), а значит и нужное нам равенство (4).

Покажем теперь, что равенства (3) и (4) позволяют доказать, что $X(0)$ является функцией от $Y_{-\infty}^{-1}$, а это и означает справедливость теоремы. Прежде всего, применяя (3) к процессам X_n , Z_n и Y_n , получаем

$$(19) \quad I(X(0); X(0) + Z(0) \mid (Y_n)_{-\infty}^{-1}) = 0$$

при любом n , так как $X_n(0) = X(0)$ и $Z_n(0) = Z(0)$. Обозначим через $X^{n,y}(0)$ и $Z^{n,y}(0)$ – случайные величины, совместное распределение которых совпадает с условным распределением пары $(X(0), Z(0))$ при условии, что $(Y_n)_{-\infty}^{-1} = y$, где $y = (y_n)_{-\infty}^{-1} = (\dots, y_{-2n}, y_{-n})$ – некоторая реализация случайной величины $(Y_n)_{-\infty}^{-1}$. Тогда из (19) следует, что при любом n

$$(20) \quad I(X^{n,y}(0); X^{n,y}(0) + Z^{n,y}(0)) = 0$$

для почти всех y . Положим

$$\sigma_{n,y}^2 = D(Z(0) \mid (Y_n)_{-\infty}^{-1} = y) = D(Z^{n,y}(0)),$$

где $D(\cdot)$ и $D(\cdot \mid \cdot)$ – дисперсия и условная дисперсия соответственно, и обозначим через $H_\varepsilon(\xi)$ – ε -энтропию случайной величины ξ относительно среднеквадратического критерия точности, т.е.

$$H_\varepsilon(\xi) \triangleq \inf I(\xi; \hat{\xi}),$$

где нижняя грань информации берется по всем условным распределениям случайной величины $\hat{\xi}$ относительно ξ таким, что $E(\hat{\xi} - \xi)^2 \leq \varepsilon^2$.

Из равенства (20) немедленно следует, что для почти всех y справедливо равенство

$$(21) \quad H_{\sigma_{n,y}}(X^{n,y}(0) + Z^{n,y}(0)) = 0,$$

а тогда в соответствии с известными свойствами ε -энтропии (см., например, [9]) получаем

$$\sigma_{n,y}^2 \geq D(X^{n,y}(0) + Z^{n,y}(0)) = \sigma_{n,y}^2 + D(X^{n,y}(0)) + 2 \operatorname{cov}(X^{n,y}(0), Z^{n,y}(0)),$$

а значит для почти всех y имеет место неравенство

$$(22) \quad D(X^{n,y}(0)) \leq -2 \operatorname{cov}(X^{n,y}(0), Z^{n,y}(0)).$$

Обозначим через $P^{n,y}(\cdot, \cdot)$, $P_1^{n,y}(\cdot)$ и $P_2^{n,y}(\cdot)$ – распределения вероятностей пары $(X^{n,y}(0), Z^{n,y}(0))$, $X^{n,y}(0)$ и $Z^{n,y}(0)$ соответственно и положим

$$\tau_{n,y} \triangleq \rho(P^{n,y}, P_1^{n,y} \times P_2^{n,y}),$$

где $\rho(\cdot, \cdot)$ – расстояние по вариации между соответствующими распределениями вероятностей. Имеем

$$(23) \quad |\text{cov}(X^{n,y}(0), Z^{n,y}(0))| \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |xz| |P^{n,y}(dx, dz) - P_1^{n,y}(dx)P_2^{n,y}(dz)|.$$

Для оценки сверху правой части (23) представим ее в виде суммы соответствующих интегралов по каждому из множеств D_i , $i = 1, 2, 3, 4$, где

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, z) : |x| \leq A, |z| \leq A\}, & D_2 &= \{(x, z) : |x| \leq A, |z| > A\}, \\ D_3 &= \{(x, z) : |x| > A, |z| \leq A\}, & D_4 &= \{(x, z) : |x| > A, |z| > A\} \end{aligned}$$

и оценим каждый из этих интегралов следующим образом (число $A > 0$ мы выберем позднее):

$$(24) \quad \iint_{D_1} |xz| |P^{n,y}(dx, dz) - P_1^{n,y}(dx)P_2^{n,y}(dz)| \leq A^2 \tau_{n,y},$$

$$\begin{aligned} (25) \quad & \iint_{D_2} |xz| |P^{n,y}(dx, dz) - P_1^{n,y}(dx)P_2^{n,y}(dz)| \\ & \leq \iint_{|z| > A} z^2 P^{n,y}(dx, dz) + \iint_{|z| > A} z^2 P_1^{n,y}(dx)P_2^{n,y}(dz) \\ & = 2 \int_{|z| > A} z^2 P_2^{n,y}(dz), \end{aligned}$$

$$(26) \quad \iint_{D_3} |xz| |P^{n,y}(dx, dz) - P_1^{n,y}(dx)P_2^{n,y}(dz)| \leq 2 \int_{|x| > A} x^2 P_1^{n,y}(dx),$$

$$\begin{aligned} (27) \quad & \iint_{D_4} |xz| |P^{n,y}(dx, dz) - P_1^{n,y}(dx)P_2^{n,y}(dz)| \\ & \leq \frac{1}{2} \iint_{D_4} (x^2 + z^2) P^{n,y}(dx, dz) + \frac{1}{2} \iint_{D_4} (x^2 + z^2) P_1^{n,y}(dx)P_2^{n,y}(dz) \\ & \leq \int_{|x| > A} x^2 P_1^{n,y}(dx) + \int_{|z| > A} z^2 P_2^{n,y}(dz). \end{aligned}$$

Пользуясь оценками (23)–(27), неравенством (см. [3])

$$(28) \quad \frac{1}{2 \ln 2} \tau_{n,y}^2 \leq I(X^{n,y}(0); Z^{n,y}(0)),$$

осредняя обе части неравенства (22) по y и воспользовавшись неравенством Шварца, получаем

$$(29) \quad D(X(0) | (Y_n)_{-\infty}^{-1}) \leq cA^2 [I(X(0); Z(0) | (Y_n)_{-\infty}^{-1})]^{1/2} + c \int_{|x|>A} x^2 P_1(dx) + c \int_{|z|>A} z^2 P_2(dz),$$

где $P_1(\cdot)$ и $P_2(\cdot)$ – распределения вероятностей случайных величин $X(0)$ и $Z(0)$ соответственно, а c – некоторая положительная константа.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ фиксировано. Так как $X(0)$ и $Z(0)$ имеют конечные вторые моменты, то $A = A(\varepsilon)$ можно выбрать столь большим, чтобы

$$(30) \quad c \int_{|x|>A} x^2 P_1(dx) + c \int_{|z|>A} z^2 P_2(dz) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, из соотношения (4) следует, что для всех достаточно больших n

$$(31) \quad cA^2 [I(X(0); Z(0) | (Y_n)_{-\infty}^{-1})]^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как

$$D(X(0) | Y_{-\infty}^{-1}) \leq D(X(0) | (Y_n)_{-\infty}^{-1})$$

при любом n , то из (29)–(31) следует, что числа A и n можно выбрать столь большими, что

$$D(X(0) | Y_{-\infty}^{-1}) \leq \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ можно выбрать как угодно малым, то из последнего неравенства следует, что $D(X(0) | Y_{-\infty}^{-1}) = 0$, т.е. $X(0)$ является некоторой функцией от $Y_{-\infty}^{-1}$. На этом доказательство теоремы заканчивается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пинскер М. С., Прелов В. В. Об асимптотическом поведении ошибки оптимальной фильтрации стационарного процесса при малой скорости создания информации // Пробл. передачи информ. (в печати).
- [2] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965.
- [3] Пинскер М. С. Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
- [4] Пинскер М. С., Прелов В. В. Оптимальная фильтрация гауссовского сигнала на фоне почти гауссовского шума // Пробл. передачи информ. 1995. Т. 31. № 4. С. 3–21.
- [5] Pinsker M. S., Prelov V. V., Verdú S. Sensitivity of Channel Capacity // IEEE Trans. Inform. Theory. 1995. V. 41. № 5. P. 1877–1888.
- [6] Пинскер М. С., Прелов В. В. Скорость создания информации в стационарных гауссовских каналах при передаче слабыми сигналами // Пробл. передачи информ. 1994. Т. 30. № 4. С. 3–11.
- [7] Пинскер М. С. Динамические системы с вполне положительной и нулевой энтропией // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 5. С. 1025–1026.
- [8] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970.
- [9] Berger T. Rate distortion theory: A mathematical basis for data compression. New York: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971.