Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Г. Синай, О распределении максимума дробного броуновского движения,
УМН, 1997, том 52, выпуск 2, 119–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm822>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:16:17

УДК 519.2

Памяти Р. Л. Добрушина

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА
ДРОБНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Я. Г. Синай

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Определение дробного броуновского движения. Основной результат	119
§ 2. Явные формулы для $m(C_\rho)$ и $\sigma(s, T)$. Асимптотическое поведение $\sigma(s, T)$	124
§ 3. Исследование $m(C_\rho)$, $\frac{\partial m(C_\rho)}{\partial T}$	131
§ 4. Окончание доказательства основной теоремы. Заключительные замечания	137
Список литературы	138

§ 1. Определение дробного броуновского движения. Основной результат

Дробное броуновское движение (ДБД) представляет собой гауссовский процесс со стационарными приращениями, распределение вероятностей которого инвариантно относительно группы масштабных преобразований. Именно по этой причине ДБД возникает во многих приложениях. Впервые ДБД появилось в работе А. Н. Колмогорова [1] и, несколько позднее, в работах П. Леви [2] и Б. Мандельброта [3]. По поводу определения и основных свойств ДБД см. [3], [4]. Фрактальная структура множества нулей ДБД была исследована в [4], более поздние результаты см. в [5], [6].

В этой работе мы изучаем распределение максимума ДБД. Начнем с построения ДБД.

Простейший способ, связывающий ДБД с методом ренормгруппы в статистической механике и с теорией автомодельных распределений (см. [7]–[9]), состоит в следующем. Рассмотрим гауссовскую комплексную ортогональную меру $\Phi(\Lambda)$, $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, для которой $\Phi(-\Lambda) = \overline{\Phi(\Lambda)}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ обозначает борелевскую σ -алгебру на $\mathbb{R}^1$, и

$$\mathbb{E}|\Phi(\Lambda)|^2 = C \int_{\Lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\alpha+2}}$$

в случае $\text{dist}(\Lambda, 0) > 0$. Здесь α – основной параметр ДБД, меняющийся в пределах $-1 < \alpha < 1$. Обычное броуновское движение отвечает $\alpha = 0$. Значение константы C не играет роли и поэтому в дальнейшем $C = 1$.

Введем “приращения”

$$\xi(t', t'') = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda t'} - e^{i\lambda t''}) d\Phi(\lambda), \quad t' > t''.$$

При рассматриваемых α последний интеграл имеет смысл как обычный стохастический интеграл и дает вещественнозначную гауссовскую случайную величину со средним 0 и дисперсией

$$D\xi(t', t'') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{i\lambda t'} - e^{i\lambda t''}|^2}{|\lambda|^{\alpha+2}} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda |1 - e^{i\lambda(t'-t'')}|^2}{|\lambda|^{\alpha+2}} = C_0(t' - t'')^{\alpha+1}.$$

По этой причине распределение $\xi(t' + t, t'' - t)$ не зависит от t и $\xi(t', t'') + \xi(t'', t''') = \xi(t', t''')$ с вероятностью 1.

Далее мы изучаем случайный процесс $\xi(t) = \xi(t, 0)$, $t > 0$. Только при $\alpha = 0$ этот процесс является марковским. В общем случае отвечающее ему распределение вероятностей инвариантно относительно группы масштабных преобразований $S(r)$, где $(S(r)\xi)(t) = \frac{1}{r^{\frac{\alpha+1}{2}}} \xi(rt)$. Иными словами, распределение вероятностей семейства случайных величин $\{\xi_r(t)\}$ не зависит от r . Заеле и Пачке (см. [10]) доказали, что группа $\{S(r)\}$ эргодична.

Нетрудно установить, что с вероятностью 1 реализации $\xi(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\frac{\alpha+1}{2} - \varepsilon$ и не удовлетворяют никакому условию Гёльдера с показателем $\frac{\alpha+1}{2} + \varepsilon$. Здесь $\varepsilon > 0$ – произвольно. Ниже в этой работе мы рассматриваем только $0 < \alpha < 1$. Реализации таких процессов более гладкие, чем реализации обычного броуновского движения. По этой причине здесь не возникает хорошо известных трудностей, связанных с формулой Ито в теории стохастических дифференциальных уравнений, и, в частности, для соответствующих стохастических интегралов справедлива обычная формула интегрирования по частям.

По построению $\xi(0) = 0$. Введем случайную величину $\nu_T = \max_{0 \leq t \leq T} \xi(t)$. Для броуновского движения ($\alpha = 0$) хорошо известно (см., например, [1]), что при любом $a > 0$

$$(1) \quad P\{\nu_T \leq a\} \sim \frac{\text{const}}{T^{1/2}}, \quad T \rightarrow \infty.$$

Здесь и в дальнейшем обозначение const используется для постоянных, значение которых несущественно, но может зависеть от α .

Цель этой работы – обобщить соотношение (1) на общие ДБД с $0 < \alpha < 1$. Введем случайную величину τ_a , равную моменту первого пересечения уровня a . Тогда $P(T) = P\{\nu_T < a\} = P\{\tau_a > T\}$. Мы выведем для функции $P(T)$ интегральное уравнение. Будем действовать так же, как в случае обычного броуновского движения. Рассмотрим измеримое разбиение ρ пространства элементарных событий Ω , элемент которого C_ρ есть пара $(s; \xi(t), 0 \leq t \leq s)$, $\xi(t)$ есть реализация нашего процесса до момента s , причем $\xi(t) < a$ при $t < s$ и $\xi(s) = a$. Иными словами, элемент C_ρ разбиения ρ задается реализацией $\xi(t)$ до момента s первого достижения ею уровня a . Мы можем теперь написать

$$(2) \quad P\{\xi(T) > a\} = \int_{A_T} dP\{C_\rho\} P\{\xi(T) > a \mid C_\rho\},$$

где интегрирование идет по множеству A_T тех элементов C_ρ , где $s \leq T$. Формула (2) есть формула полной вероятности, справедливая без каких-либо дополнительных предположений. Далее мы примем без доказательства, что ДБД обладает “строго марковским свойством”, согласно которому условное распределение $\xi(T) - \xi(s)$ при условии C_ρ такое же, как и для неслучайного s , т.е. имеет вид гауссовского распределения, дисперсия которого не зависит от условия и есть функция только T и s , а вся зависимость от условия заключена в условном математическом ожидании $m(C_\rho)$, которое представляет собой линейный функционал $\xi(t)$, $0 \leq t \leq s$, такой же, как и при неслучайном s . Строго марковское свойство можно доказать обычным методом путем дискретизации времени и предельным переходом при стремлении шага дискретизации к нулю. Мы можем написать теперь

$$\begin{aligned} P\{\xi(T) > a \mid C_\rho\} &= P\{\xi(T) - \xi(s) - m(C_\rho) > -m(C_\rho)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(s, T)}} \int_{-m(C_\rho)}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma(s, T)}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{m(C_\rho)}{\sqrt{\sigma(s, T)}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (2), получаем

$$(3) \quad P\{\xi(T) > a\} = \int_0^T dP_{\tau_a}(s) \left(\frac{1}{2} - \Phi(s, T) \right),$$

где P_{τ_a} есть функция распределения случайной величины τ_a , т.е. “интеграл по множеству элементов разбиения ρ с данными s ”,

$$(4) \quad \Phi(s, T) = \int dP(C_\rho, s) \int_0^{-\frac{m(C_\rho)}{\sqrt{\sigma(s, T)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Внешнее интегрирование происходит по условному распределению C_ρ при заданном s .

В §2 мы выведем явные выражения для $m(C_\rho)$ и $\sigma(s, T)$, из которых будет следовать дифференцируемость $\Phi(s, T)$ по T . Используя равенство $P\{\xi(T) > a\} = \frac{1}{2} - P\{0 < \xi(T) < a\}$ и дифференцируя обе части (3) по T , получим, что функция распределения P_{τ_a} имеет плотность, которую мы обозначим $p_{\tau_a}(x)$, и эта плотность удовлетворяет интегральному уравнению типа Вольтерра:

$$(5) \quad r(T) = p_{\tau_a}(T) \left(\frac{1}{2} - \Phi(T, T) \right) + 2 \int_0^T p_{\tau_a}(s) ds \Phi'_T(s, T),$$

где $r(T) = -\frac{d}{dT} P\{0 < \xi(T) < a\}$ есть известная функция T , про которую легко доказать, что $r(T) \sim \frac{\text{const}}{T^{\frac{\alpha+3}{2}}}$ при $T \rightarrow \infty$. Величина $\Phi(T, T)$ понимается как предел $\Phi(T, T) = \lim_{s \uparrow T} \Phi(s, T)$. Мы увидим, что он отличен от нуля. Это утверждение следует также из того, что при малых $T - s$ наилучший прогноз $m(C_\rho)$ имеет порядок $\sqrt{\sigma(s, T)}$, что само по себе неудивительно. Мы исследуем в дальнейшем поведение $\Phi(T, T)$ при $T \rightarrow \infty$.

Удобно выделить малые s отдельно и переписать (5) следующим образом:

$$(6) \quad \left(\frac{1}{2} - \Phi(T, T)\right)^{-1} r_1(T) = p_{\tau_a}(T) + 2 \int_1^T p_{\tau_a}(s) ds \Phi'_T(s, T) \left(\frac{1}{2} - \Phi(T, T)\right)^{-1},$$

где $r_1(T) = r(T) - 2 \int_0^1 p_{\tau_a}(s) ds \Phi'_T(s, T)$. В дальнейшем считаем $T \geq 2$.

Ясно, что асимптотика $p_{\tau_a}(T)$ определяется поведением

$$(7) \quad \Phi'_T(s, T) = E_{s,a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{m^2(C_\rho)}{2\sigma(s, T)}\right\} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \frac{m(C_\rho)}{\sqrt{\sigma(s, T)}}.$$

Здесь и далее $E_{s,a}$ обозначает условное математическое ожидание при условии $\tau = s$, т.е. интеграл по множеству элементов C_ρ с данными s и a . При дальнейшем анализе интегрального уравнения (6) нам понадобится асимптотика условных математических ожиданий $E_{s,a}\xi(u)$, $E_{s,a}(\xi(s) - \xi(u))$. Поскольку при любом $s > 0$ процесс $\xi_s^{(1)}(t) = \xi(ts)/s^{\frac{\alpha+1}{2}}$ имеет такое же распределение вероятностей, что и $\xi(t)$, то

$$E_{s,a}|\xi(u)| = s^{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot E_{1,a/s^{\frac{1+\alpha}{2}}} \left| \xi\left(\frac{u}{s}\right) \right| = s^{\frac{1+\alpha}{2}} h_1\left(\frac{u}{s}, s\right).$$

В этом условном математическом ожидании интегрирование происходит по множеству реализаций $\xi(t)$, для которых $\xi(0) = 0$, $\xi(1) = a/s^{\frac{1+\alpha}{2}}$ и $\xi(t) < a/s^{\frac{1+\alpha}{2}}$ при $0 \leq s < 1$. При $s \rightarrow \infty$ это интегрирование переходит в интегрирование по множеству траекторий, для которых $\xi(0) = \xi(1) = 0$, $\xi(t) < 0$ при $0 < t < 1$.

Сформулируем теперь предположение о функции $h_1(v, s)$, которое представляется весьма правдоподобным, но доказательством которого мы в данный момент не располагаем.

Н1) При $v < \frac{1}{2}$

$$h_1(v, s) = v^{\frac{1+\alpha}{2}} g_1(v, s),$$

где $|g_1(v, s)| \leq \text{const}$, причем const не зависит от α .

С помощью Н1) можем написать $E_{s,a}|\xi(u)| = u^{\frac{1+\alpha}{2}} g_1\left(\frac{u}{s}, s\right)$.

Аналогичным образом, при любом s процесс $\xi_s^{(2)}(t) = \frac{\xi(s) - \xi(st)}{s^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ при $0 \leq t \leq 1$ имеет распределение вероятностей, не зависящее от s . Поэтому

$$E_{s,a}(\xi(s) - \xi(u)) = s^{\frac{1+\alpha}{2}} h_2\left(\frac{s-u}{s}, s\right)$$

и h_2 имеет предел при $s \rightarrow \infty$, $\frac{u}{s}$ фиксировано.

Н2) При $v \leq \frac{1}{2}$

$$h_2(v, s) = v^{\frac{1+\alpha}{2}} g_2(v, s)$$

и $g_2(v, s)$ равномерно ограничена, $g_2(v, s) \leq \text{const}$, причем const не зависит от α .

С помощью Н2) можем написать

$$E_{s,a}(\xi(s) - \xi(u)) = (s-u)^{\frac{1+\alpha}{2}} g_2\left(\frac{s-u}{s}, s\right).$$

НЗ) Существует $\lim_{u \rightarrow 0} g_2(u, s) = g_2(0, s)$ и

$$|g_2(v, s) - g_2(0, s)| \leq \text{const} \left(\frac{v}{s} \right)^\gamma,$$

где $\gamma > 0$ и const не зависят от α .

При этих предположениях мы покажем в § 2 и § 3, что $\Phi_t(s, T)$ допускает оценки:
В₁) при $0 < s \leq T/2$

$$|\Phi_T(s, T)| \leq \frac{\text{const} \cdot \alpha \cdot s^{\frac{1-\alpha}{2}}}{T^{\frac{3-\alpha}{2}}};$$

В₂) при $T/2 \leq s \leq T$

$$|\Phi_T(s, T)| \leq \frac{\text{const} \cdot \alpha}{(T-s)^{1-\gamma} s^\gamma}.$$

Здесь и далее const не зависит от α .

Из В₁), В₂) вытекает, что

$$\int_0^T |\Phi_T(s, T)| ds \leq \text{const} \cdot \alpha.$$

Кроме того, $|r_1(T)| \leq \text{const} \cdot \alpha \cdot T^{-\frac{3-\alpha}{2}}$. При достаточно малых α мы можем написать решение (6) в виде ряда

$$\begin{aligned} p(T) = & r_1(T) \left(\frac{1}{2} - \Phi(T, T) \right)^{-1} - 2 \int_1^T r_1(s_0) \Phi'_T(s_0, T) \left(\frac{1}{2} - \Phi(T, T) \right)^{-2} ds_0 \\ & + 2^2 \int_1^T ds_0 \Phi'_T(s_0, T) \int_1^{s_0} ds_1 r_1(s_1) \Phi'_{s_0}(s_1, s_0) \left(\frac{1}{2} - \Phi(T, T) \right)^{-3} \\ & - 2^3 \int_1^T \Phi'_T(s_0, T) ds_0 \int_1^{s_0} \Phi'_{s_0}(s_1, s_0) ds_1 \\ & \times \int_1^{s_1} \Phi'_{s_1}(s_2, s_1) r_1(s_2) ds_2 \left(\frac{1}{2} - \Phi(T, T) \right)^{-4} + \dots \end{aligned}$$

Написанный ряд сходится в $L^1(0, T)$ при любом $T \geq 0$ и для достаточно малых α . Нетрудно также показать, что решение уравнения (6) единственно в классе функций с $\int_0^T |p(s)| ds \leq 1$ и решение допускает при больших T оценку

$$(8) \quad p_{\tau_a}(T) \leq \frac{\text{const} \cdot \alpha}{T^{\frac{3-\alpha}{2} + b(\alpha)}},$$

где $|b(\alpha)| \leq \text{const} \cdot \alpha$. Мы можем теперь сформулировать основной результат этой статьи.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. При достаточно малых α плотность $p_{\tau_a}(T)$ удовлетворяет неравенству (8).

В § 2 мы исследуем поведение $\sigma(s, T)$, а в § 3 – поведение $m(C_\rho)$, $m(s) = \mathbb{E}_s m(C_\rho)$. Заметим, что § 3 составляет наиболее трудную часть работы. Здесь мы используем

ряд сокращений, которые вытекают из наших предположений Н1)–Н3). Окончание доказательства, ряд замечаний и гипотез изложены в §4.

Я благодарю А. А. Рузмайкину за помощь в проведении ряда вычислений и Г. М. Заславского за полезные обсуждения. Я благодарен также Г. М. Молчану за многочисленные критические замечания, способствовавшие улучшению текста. Благодарю также NSF (грант DMS 9404437) и фонд РФФИ (грант № 96-01-00377) за финансовую поддержку.

§2. Явные формулы для $m(C_\rho)$ и $\sigma(s, T)$. Асимптотическое поведение $\sigma(s, T)$

Запишем приращение $\xi(T) - \xi(s)$ в виде

$$(9) \quad \xi(T) - \xi(s) = \int_0^s K(u) d\xi(u) + \xi'(T, s),$$

где $\xi'(T, s)$ не зависит от всех $\xi(t', t'')$, $0 \leq t'' < t' \leq s$. Стохастический интеграл в последнем выражении есть $m(C_\rho)$. Он существует при определенных условиях на функцию $K(u)$, которые мы сейчас не обсуждаем и которые заведомо выполнены в нашем случае.

ЛЕММА 1. $E(d\xi(u)d\xi(v)) = \frac{C_0\alpha(\alpha+1)}{|u-v|^{1-\alpha}} du dv$ при некоторой постоянной $C_0 = C_0(\alpha)$, для которой $\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_0(\alpha) > 0$.

Утверждение леммы справедливо при всех α , $-1 < \alpha < 1$. Однако только при $\alpha > 0$ написанное ядро интегрируемо по каждой переменной. Этим, в частности, объясняется условие $\alpha > 0$, которое было введено в самом начале этой статьи.

Доказательство основано на общей формуле для $E(\xi(u)\xi(v))$, которую мы сейчас выведем. Имеем при $u > v > 0$

$$\begin{aligned} E(\xi(u)\xi(v)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{i\lambda u} - 1)(e^{-i\lambda v} - 1)}{|\lambda|^{\alpha+2}} d\lambda \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\lambda| > \varepsilon} \frac{(e^{i\lambda u} - 1)(e^{-i\lambda v} - 1)}{|\lambda|^{\alpha+2}} d\lambda \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{[e^{i\lambda(u-v)} + e^{-i\lambda(u-v)}] - [e^{i\lambda u} + e^{-i\lambda u}] - [e^{i\lambda v} + e^{-i\lambda v}] + 2}{\lambda^{\alpha+2}} d\lambda \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[(u-v)^{\alpha+1} \int_{\varepsilon(u-v)}^{\infty} \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu}}{\mu^{\alpha+2}} d\mu - u \int_{\varepsilon u}^{\infty} \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu}}{\mu^{\alpha+2}} d\mu \right. \\ &\quad \left. - v \int_{\varepsilon v}^{\infty} \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu}}{\mu^{\alpha+2}} d\mu + \frac{2}{(\alpha+1)\varepsilon^{\alpha+1}} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[(u-v)^{\alpha+1} \left(\int_{\varepsilon(u-v)}^1 \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu} - 2}{\mu^{\alpha+2}} d\mu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{\alpha+1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha+1}(u-v)^{\alpha+1}} - 1 \right) + \int_1^{\infty} \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu}}{\mu^{\alpha+2}} d\mu \right) \right. \\ &\quad \left. - u^{\alpha+1} \left(\int_{\varepsilon u}^1 \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu} - 2}{\mu^{\alpha+2}} d\mu + \frac{2}{\alpha+1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha+1}u^{\alpha+1}} - 1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_1^{\infty} \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu}}{\mu^{\alpha+2}} d\mu \right) + \frac{2}{(\alpha+1)\varepsilon^{\alpha+1}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [u^{\alpha+1} + v^{\alpha+1} - (u-v)^{\alpha+1}] \\
&\quad \times \left[\frac{2}{\alpha+1} - \int_0^1 \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu} - 2}{\mu^{\alpha+2}} d\mu - \int_0^\infty \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu} - 2}{\mu^{\alpha+2}} d\mu \right] \\
&= C_0 [u^{\alpha+1} + v^{\alpha+1} - (u-v)^{\alpha+1}].
\end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что $E(\xi(u) - \xi(v))^2 = 2C_0(u-v)^{\alpha+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Имеем

$$E(\xi(u) - \xi(v)) = \frac{\partial^2 E(\xi(u)\xi(v))}{\partial u \partial v} du dv = C_0(\alpha+1)\alpha(u-v)^{\alpha-1}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.

$$E(\xi(T) - \xi(s)) d\xi(u) = C_2((T-u)^2 - (s-u)^\alpha) du$$

при $C_2 = C_0(\alpha+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
E(\xi(T) - \xi(s)) d\xi(u) &= du \frac{\partial}{\partial u} E(\xi(T) - \xi(s)) \xi(u) \\
&= C_0(\alpha+1)((T-u)^\alpha - (s-u)^\alpha) = C_2((T-u)^\alpha - (s-u)^\alpha).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Умножая обе части (8) на $d\xi(v)$ и беря от обеих частей математическое ожидание, получаем, что $K(u)$ выражается через решение интегрального уравнения Абеля (см. [2])

$$\begin{aligned}
(10) \quad ((T-v)^\alpha - (s-v)^\alpha) &= \alpha \int_0^s (K(T,u) - K(s,u)) \frac{1}{|u-v|^{1-\alpha}} du, \\
K(u) &= K(T,u) - K(s,u).
\end{aligned}$$

Уравнению (10) посвящена огромная литература, и его решение может быть выражено в явном виде. Мы воспользуемся формулой (30.84) из книги Самно, Килбаса и Маричева [11], согласно которой

$$\begin{aligned}
(11) \quad K(x,u) &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi\alpha} \frac{d}{du} \int_0^s \frac{\operatorname{sign}(u-t)}{|u-t|^\alpha} (x-t)^\alpha dt \\
&\quad + \frac{\sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2\alpha} \frac{d}{du} \int_0^s M(u,t) [t(s-t)]^{-\frac{\alpha}{2}} (x-t)^\alpha dt \\
&= K_1(u,x) + K_2(u,x),
\end{aligned}$$

где

$$M(u,t) = \int_0^s \frac{\sqrt{t(s-t)} - \sqrt{y(s-y)}}{t-y} \cdot \frac{dy}{|u-y|^\alpha [y(s-y)]^{\frac{1-\alpha}{2}}}.$$

Через K_1, K_2 обозначены отдельные слагаемые в (11). Таким образом,

$$(12) \quad m(C_\rho) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi\alpha} m_1(C_\rho) + \frac{\sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2\alpha} m_2(C_\rho),$$

$$m_1(C_\rho) = \int_0^s (K_1(u, T) - K_1(u, s)) d\xi(u),$$

$$(13) \quad m_2(C_\rho) = \int_0^s (K_2(u, T) - K_2(u, s)) d\xi(u),$$

$$(14) \quad \frac{\partial m(C_\rho)}{\partial T} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi\alpha} \cdot \frac{\partial m_1(C_\rho)}{\partial T} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2\alpha} \cdot \frac{\partial m_2(C_\rho)}{\partial T},$$

$$(15) \quad \frac{\partial m_i(C_\rho)}{\partial T} = \int_0^s \frac{\partial K_i(u, T)}{\partial T} d\xi(u), \quad i = 1, 2.$$

Мы выведем сейчас выражение для $\sigma(s, T)$. Поскольку $\xi'(T, s)$ не зависит от всех $\xi(t', t'')$, $0 \leq t'' < t' \leq s$, то

$$\mathbb{E}(\xi(T) - \xi(s))^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^s (K_1(u, T) - K_1(u, s)) d\xi(u) \right]^2 + \mathbb{E}(\xi'(T, s))^2.$$

Поскольку $\mathbb{E}(\xi(T) - \xi(s))^2 = 2C_0(T - s)^{\alpha+1}$, то

$$\sigma(s, T) = \mathbb{E}(\xi'(T, s))^2 = 2C_0(T - s)^{\alpha+1} - \bar{\sigma}(s, T),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(s, T) &= \mathbb{E} \left[\int_0^T (K(u, T) - K(u, s)) d\xi(u) \right]^2 \\ &= \int_0^s \int_0^s (K(u_1, T) - K(u_1, s)) (K(u_2, T) - K(u_2, s)) \frac{1}{|u_1 - u_2|^{1-\alpha}} du_1 du_2 \\ &= C_0(1 + \alpha) \int_0^s ((T - u)^\alpha - (s - u)^\alpha) (K(T, u) - K(s, u)) du, \end{aligned}$$

так как (см. (9))

$$\int_0^s (K(u, T) - K(u, s)) \frac{1}{|u - v|^{1-\alpha}} du = \frac{1}{\alpha} ((T - v)^\alpha - (s - v)^\alpha).$$

Таким образом, для $\bar{\sigma}(s, T)$ мы имеем представление

$$\bar{\sigma}(s, T) = \bar{\sigma}_1(s, T) + \bar{\sigma}_2(s, T),$$

где

$$\bar{\sigma}_1(s, T) = C_0(\alpha + 1) \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi\alpha} I_1, \quad \bar{\sigma}_2(s, T) = C_0(\alpha + 1) \frac{\sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2\alpha^2} I_2,$$

и

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^s ((T - u)^\alpha - (s - u)^\alpha) du \frac{d}{du} \int_0^s \frac{\operatorname{sign}(u - t)((T - t)^\alpha - (s - t)^\alpha)}{|u - t|^\alpha} dt, \\ I_2 &= \int_0^s ((T - u)^\alpha - (s - u)^\alpha) du \frac{d}{du} \int_0^s M(u, t) [t(s - t)]^{-\frac{\alpha}{2}} [(T - t)^\alpha - (s - t)^\alpha] dt, \\ M(u, t) &= \int_0^s \frac{\sqrt{t(s - t)} - \sqrt{y(s - y)}}{t - y} \cdot \frac{dy}{|u - y|^\alpha [y(s - y)]^{\frac{1-\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, мы можем считать $T \geq 2$, поскольку при малых T все оценки тривиальны.

Рассмотрим вначале I_1 .

После интегрирования по частям получим:

$$\begin{aligned} I_1 &= (T-s)^\alpha \int_0^s \frac{(T-t)^\alpha - (s-t)^\alpha}{(s-t)^\alpha} dt + (T^\alpha - s^\alpha) \int_0^s \frac{(T-t)^\alpha - (s-t)^\alpha}{t^\alpha} dt \\ &\quad + \alpha \int_0^s ((T-u)^{\alpha-1} - (s-u)^{\alpha-1}) du \int_0^u \frac{(T-t)^\alpha - (s-t)^\alpha}{(u-t)^\alpha} dt \\ &\quad - \alpha \int_0^s ((T-u)^{\alpha-1} - (s-u)^{\alpha-1}) du \int_u^s \frac{(T-t)^\alpha - (s-t)^\alpha}{(t-u)^\alpha} dt. \end{aligned}$$

Производя еще несколько раз интегрирование по частям во внутренних и внешних интегралах, можем написать

$$\begin{aligned} (16) \quad I_1 &= 2(T^\alpha - s^\alpha) \int_0^s \frac{(T-u)^\alpha - (s-u)^\alpha}{u^\alpha} du \\ &\quad - 2\alpha \int_0^s ((T-u)^{\alpha-1} - (s-u)^{\alpha-1}) du \int_u^s \frac{(T-t)^\alpha - (s-t)^\alpha}{(t-u)^\alpha} dt. \end{aligned}$$

Положим $x = T/s$. Ясно, что $x \geq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= s^{1+\alpha} \left[2(x^\alpha - 1) \int_0^1 \frac{(x-u)^\alpha - (1-u)^\alpha}{u^\alpha} du \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha \int_0^1 ((x-u)^{\alpha-1} - (1-u)^{\alpha-1}) du \int_u^1 \frac{(x-t)^\alpha - (1-t)^\alpha}{(t-u)^\alpha} dt \right]. \end{aligned}$$

Далее, с помощью замен во внутренних интегралах $\frac{t-u}{1-u} = t_1$ и $\frac{t-u}{x-u} = t_1$, соответственно, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^1 ((x-u)^{\alpha-1} - (1-u)^{\alpha-1}) du \int_u^1 \frac{(x-t)^\alpha - (1-t)^\alpha}{(t-u)^\alpha} dt \\ &= \int_0^1 ((x-u)^{\alpha-1} - (1-u)^{\alpha-1}) du \\ &\quad \times \left[(u-1) \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t^\alpha} dt - (x-u) \int_0^{\frac{1-u}{x-u}} \frac{(1-t)^\alpha}{t^\alpha} dt \right] \\ &= \int_0^1 ((x-u)^{\alpha-1} - (1-u)^{\alpha-1}) du \\ &\quad \times \left[(x-1) \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t^\alpha} dt - (x-u) \int_{\frac{1-u}{x-u}}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t^\alpha} dt \right]. \end{aligned}$$

Наконец, замена $1-u = (x-1)w$ дает для последнего интеграла выражение

$$\begin{aligned} &\int_0^1 ((x-u)^{\alpha-1} - (1-u)^{\alpha-1}) du \int_u^1 \frac{(x-t)^\alpha - (1-t)^\alpha}{(t-u)^\alpha} dt \\ &= (x-1)^{\alpha+1} \left\{ \int_0^{\frac{1}{x-1}} [w^{\alpha-1} - (1+w)^{\alpha-1}] \right. \\ &\quad \left. \times \left[(1+w) \int_{\frac{w}{1+w}}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t^\alpha} dt - \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t^\alpha} dt \right] dw \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что выражение в фигурных скобках имеет конечный предел при $x \rightarrow 1$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(x-u)^\alpha - (1-u)^\alpha}{u^\alpha} du &= x \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{(1-u)^\alpha}{u^\alpha} du - \int_0^1 \frac{(1-u)^\alpha}{u^\alpha} du \\ &= (x-1) \int_0^1 \frac{(1-u)^\alpha}{u^\alpha} du - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{(1-u)^\alpha}{u^\alpha} du. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I_1 &= s^{1+\alpha} \left\{ 2(x^\alpha - 1) \left[(x-1) \int_0^1 \frac{(1-u)^\alpha}{u^\alpha} du - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{(1-u)^\alpha}{u^\alpha} du \right] \right. \\ &\quad + 2\alpha(x-1)^{\alpha+1} \int_0^{\frac{1}{x-1}} \left(\frac{1}{w^{1-\alpha}} - \frac{1}{(1+w)^{1-\alpha}} \right) \\ &\quad \times \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t^\alpha} dt - (1-w) \int_{\frac{w}{1+w}}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t^\alpha} dt \right) dw \Big\}. \end{aligned}$$

Сформулируем итог всех этих вычислений в виде следующей леммы.

ЛЕММА 3. *Имеет место равенство*

$$I_1 = (T-s)^{\alpha+1} \varphi_1\left(\frac{T}{s}\right),$$

причем $\varphi_1(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow 1$. При малых α и любом x функция $\varphi_1\left(\frac{T}{s}\right) = O(\alpha)$.

То, что I_1 должно иметь подобное представление, можно было предвидеть и из общих соображений.

Исследуем теперь $\frac{\partial I_1}{\partial T}$. Из (16) имеем при $x = T/s$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial T} &= 2\alpha T^{\alpha-1} s \int_0^1 \frac{(x-u)^\alpha - (1-u)^\alpha}{u^\alpha} du \\ &\quad + 2\alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_0^1 \frac{(x-u)^{\alpha-1}}{u^\alpha} du \\ &\quad + 2(1-\alpha)s^\alpha \int_0^1 (x-u)^{\alpha-2} du \int_u^1 \frac{(x-t)^\alpha - (1-t)^\alpha}{t^\alpha} dt \\ &\quad - 2\alpha s^\alpha \int_0^1 ((x-u)^{\alpha-1} - (1-u)^{\alpha-1}) du \int_u^1 \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(t-u)^\alpha} dt \\ &= 2\alpha T^{\alpha-1} s J_1 + (T^\alpha - s^\alpha) J_2 + 2(1-\alpha)s^\alpha J_3 + 2\alpha s^\alpha J_4. \end{aligned}$$

С помощью простых замен переменных получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= (x-1) \int_0^1 \frac{(1-u)^\alpha}{u^\alpha} du - x \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{(1-u)^\alpha}{u^\alpha} du, \\ J_2 &= \int_0^1 \frac{(x-u)^{\alpha-1}}{u^\alpha} du = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{(1-u)^{\alpha-1}}{u^\alpha} du. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл J_3 , где

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^1 (x-u)^{\alpha-2} du \int_u^1 \frac{(x-t)^\alpha - (1-t)^\alpha}{u^\alpha} dt \\ &= \int_0^1 (x-u)^{\alpha-2} du \left(\int_u^1 \frac{(x-t)^\alpha}{(t-u)^\alpha} dt - \int_u^1 \frac{(1-t)^\alpha}{(t-u)^\alpha} dt \right). \end{aligned}$$

После замены $t_1 = \frac{t-u}{1-u}$ во внутреннем интеграле получим

$$J_3 = \int_0^1 (x-u)^{\alpha-2} du (1-u) \left[\int_0^1 \frac{(1-t_1)^\alpha}{t_1^\alpha} dt_1 - \frac{x-u}{1-u} \int_0^{\frac{1-u}{x-u}} \frac{(1-t_1)^\alpha}{t_1^\alpha} dt_1 \right].$$

Во внешнем интеграле произведем замену $\frac{x-u}{1-u}$. Тогда

$$\begin{aligned} J_3 &= -(x-1)^\alpha \int_x^\infty \frac{u_1^{\alpha-2} du}{(u_1-1)^{\alpha+1}} \left[\int_0^1 \frac{(1-t_1)^\alpha}{t_1^\alpha} dt_1 - u_1 \int_0^{\frac{1}{u_1}} \frac{(1-t_1)^\alpha}{t_1^\alpha} dt \right] \\ &= -(x-1)^\alpha \int_x^\infty \frac{u_1^{\alpha-2} du}{(u_1-1)^\alpha} \left[\int_0^1 \frac{(1-t_1)^\alpha}{t_1^\alpha} dt_1 - u_1 \int_{\frac{1}{u_1}}^1 \frac{(1-t_1)^\alpha}{t_1^\alpha} dt \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом для последнего интеграла J_4 в (16) замена во внутреннем интеграле $\frac{t-u}{1-u} = t_1$ дает

$$\begin{aligned} J_4 &= \int_0^1 ((1-u)^{\alpha-1} - (x-u)^{\alpha-1}) du \int_u^1 \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(t-u)^\alpha} dt \\ &= \int_0^1 ((1-u)^{\alpha-1} - (x-u)^{\alpha-1}) du \int_0^{\frac{1-u}{x-u}} \frac{(1-t_1)^\alpha}{t_1^\alpha} dt_1. \end{aligned}$$

Теперь во внешнем интеграле сделаем замену $\frac{x-u}{x-1} = u_1$. В результате получим

$$J_4 = (x-1)^\alpha \int_1^{\frac{x}{x-1}} ((u_1-1)^{\alpha-1} - u_1^{\alpha-1}) du_1 \int_0^{\frac{u_1-1}{u_1}} \frac{(1-t_1)^{\alpha-1}}{t_1^\alpha} dt_1.$$

Мы можем теперь сформулировать результат наших вычислений в виде следующей леммы.

ЛЕММА 4. *Имеет место представление*

$$\frac{\partial I_1}{\partial T} = (T-s)^{\alpha+1} \varphi_2\left(\frac{T}{s}\right),$$

где $\varphi_2(x)$ – ограниченная функция при $x > 1$, имеющая конечный предел при $x \rightarrow 1$.

Рассмотрим теперь

$$I_2 = \int_0^s ((T-u)^\alpha - (s-u)^\alpha) (K_2(T, u) - K_2(s, u)) du,$$

где

$$K_2(z, u) = \frac{d}{du} \int_0^s M(u, t) [t(s-t)]^{-\frac{\alpha}{2}} (z-t)^\alpha dt$$

и

$$M(u, t) = \int_0^s \frac{\sqrt{t(s-t)} - \sqrt{y(s-y)}}{t-y} \cdot \frac{dy}{|u-y|^\alpha [y(s-y)]^{\frac{1-\alpha}{2}}};$$

интеграл I_2 только численным множителем отличается от

$$\bar{\sigma}_2(s, T) = \frac{C_0(\alpha+1) \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2 \alpha^2} \int_0^s ((T-u)^\alpha - (s-u)^\alpha) (K_2(T, u) - K_2(s, u)) du.$$

Сделаем вначале масштабное преобразование $u = u_1 s$, $y = y_1 s$, $t = t_1 s$. Тогда мы получим при $x = T/s$

$$I_2 = s^{\alpha+1} \int_0^1 ((x-u_1)^\alpha - (1-u_1)^\alpha) \frac{d}{du_1} \int_0^1 dt ((x-t_1)^\alpha - (1-t_1)^\alpha) \\ \times \int_0^1 \frac{1-t_1-y_1}{\sqrt{t_1(1-t_1)} + \sqrt{y_1(1-y_1)}} \cdot \frac{dy_1}{|u_1-y_1|^\alpha [y_1(1-y_1)]^{\frac{1-\alpha}{2}}}.$$

Последний двойной интеграл стремится к конечным пределам при $u_1 \rightarrow 0$, $u_1 \rightarrow 1$. Действительно, при $u_1 \rightarrow 0$ сделаем замену $y_1 = u_1 y_2$. Имеем

$$\int_0^{\frac{1}{u_1}} \frac{1-t_1-u_1 y_2}{\sqrt{t_1(1-t_1)} + \sqrt{u_1} \sqrt{y_2(1-u_1 y_2)}} \cdot \frac{u_1^{\frac{1-\alpha}{2}} dy_2}{|1-y_2|^\alpha y_2^{\frac{1-\alpha}{2}} (1-u_1 y_2)^{\frac{1-\alpha}{2}}} \\ \sim \sqrt{\frac{1-t_1}{t_1}} \cdot u^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_0^{\frac{1}{u_1}} \frac{dy_2}{y_2^{\frac{1-\alpha}{2}} |1-y_2|^\alpha} \sim \text{const} \sqrt{\frac{1-t_1}{t_1}}.$$

При $u \rightarrow 1$ этот интеграл ведет себя как $\text{const} \sqrt{\frac{t_1}{1-t_1}}$. Таким образом,

$$I_2 = -\alpha s^{\alpha+1} \int_0^1 ((x-u_1)^{\alpha-1} - (1-u_1)^{\alpha-1}) du_1 \int_0^1 dt_1 ((x-t_1)^\alpha - (1-t_1)^\alpha) \\ \times \int_0^1 \frac{1-t_1-y_1}{\sqrt{t_1(1-t_1)} + \sqrt{y_1(1-y_1)}} \cdot \frac{dy_1}{|u_1-y_1|^\alpha [y_1(1-y_1)]^{\frac{1-\alpha}{2}}}.$$

Нетрудно показать, что при $x \rightarrow \infty$ интеграл $I_2 \sim \text{const} T^{s+1} \left(\frac{s}{T}\right)^{2-\alpha}$. Наоборот, при $x \rightarrow 1$

$$I_2 = (T-s)^{\alpha+1} \varphi_3\left(\frac{T}{s}\right),$$

причем $\varphi_3(x)$ стремится к положительному пределу при $x \rightarrow 1$. Точно так же рассматривается производная $\frac{\partial I_2}{\partial T}$, для которой получается представление

$$\frac{\partial I_2}{\partial T} = (T-s)^\alpha \varphi_4\left(\frac{T}{s}\right),$$

где $\varphi_4(x)$ стремится к положительному пределу при $x \rightarrow 1$. Сформулируем окончательный итог всех вычислений этого параграфа.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место представление*

$$\sigma(s, T) = (T - s)^{\alpha+1} \psi_1\left(\frac{T}{s}\right), \quad \frac{\partial \sigma(s, T)}{\partial T} = (T - s)^\alpha \psi_2\left(\frac{T}{s}\right),$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – ограниченные функции, имеющие положительный предел при $x \rightarrow 1$.

§ 3. Исследование $m(C_\rho)$, $\frac{\partial m(C_\rho)}{\partial T}$

Структура и свойства $m(C_\rho)$ более сложные. Мы воспользуемся формулой (12). Рассмотрим вначале

$$K_1(u, T) - K_1(u, s) = \frac{d}{du} \int_0^s \frac{\text{sign}(u - t)}{|u - t|^\alpha} ((T - t)^\alpha - (s - t)^\alpha) dt.$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} & \int_0^s \frac{\text{sign}(u - t)((T - t)^\alpha - (s - t)^\alpha) dt}{|u - t|^\alpha} \\ &= \int_0^u \frac{(T - t)^\alpha - (s - t)^\alpha}{(u - t)^\alpha} dt - \int_u^s \frac{(T - t)^\alpha - (s - t)^\alpha}{|t - u|^\alpha} dt \\ &= - \frac{(u - t)^{1-\alpha}((T - t)^\alpha - (s - t)^\alpha)}{1 - \alpha} \Big|_0^u \\ & \quad - \frac{(t - u)^{1-\alpha}((T - t)^\alpha - (s - t)^\alpha)}{1 - \alpha} \Big|_u^s \\ &= - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^u (u - t)^{1-\alpha} ((T - t)^\alpha - (s - t)^\alpha) dt \\ & \quad - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^u (t - u)^{1-\alpha} ((T - t)^\alpha - (s - t)^\alpha) dt \\ &= \frac{(u - t)^{1-\alpha}(T^\alpha - s^\alpha)}{1 - \alpha} - \frac{(s - u)^{1-\alpha}(T - s)^\alpha}{1 - \alpha} \\ & \quad - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^u (u - t)^{1-\alpha} ((T - t)^{\alpha-1} - (s - t)^{\alpha-1}) dt \\ & \quad - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^u (t - u)^{1-\alpha} ((T - t)^{\alpha-1} - (s - t)^{\alpha-1}) dt. \end{aligned}$$

Последнее выражение уже можно дифференцировать по u . В результате получим

$$\begin{aligned} K_1(T, u) - K_1(s, u) &= \frac{T^\alpha - s^\alpha}{u^\alpha} + \frac{(T - s)^\alpha}{(s - u)^\alpha} \\ & \quad - \alpha \int_0^u \frac{(T - t)^{\alpha-1} - (s - t)^{\alpha-1}}{(u - t)^\alpha} dt \\ & \quad + \alpha \int_u^s \frac{(T - t)^{\alpha-1} - (s - t)^{\alpha-1}}{(t - u)^\alpha} dt. \end{aligned}$$

Замена $\frac{u-t}{u} = t_1$ дает

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{((T-t)^{\alpha-1} - (s-t)^{\alpha-1})}{(u-t)^\alpha} dt &= \int_0^u \frac{(\frac{T-u}{u} + t_1)^{\alpha-1} - (\frac{s-u}{u} + t_1)^{\alpha-1}}{t_1^\alpha} dt_1 \\ &= \int_0^{\frac{u}{T-u}} \frac{(1+t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} dt - \int_0^{\frac{u}{s-u}} \frac{(1+t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} dt \\ &= - \int_{\frac{u}{T-u}}^{\frac{u}{s-u}} \frac{(1+t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} dt. \end{aligned}$$

и замена $\frac{t-u}{s-u} = t_1$ дает

$$\begin{aligned} \int_u^s \frac{(T-t)^{\alpha-1} - (s-t)^{\alpha-1}}{(t-u)^\alpha} dt &= \int_0^1 \frac{(\frac{T-u}{s-u} - t_1)^{\alpha-1} - (1-t_1)^{\alpha-1}}{t_1^\alpha} dt_1 \\ &= \int_0^{\frac{s-u}{T-u}} \frac{(1-t_1)^{\alpha-1}}{t_1^\alpha} dt_1 - \int_0^1 \frac{(1-t_1)^{\alpha-1}}{t_1^\alpha} dt_1 \\ &= - \int_{\frac{s-u}{T-u}}^1 \frac{(1-t_1)^{\alpha-1}}{t_1^\alpha} dt_1. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} K_1(T, u) - K_1(s, u) &= \frac{T^\alpha - s^\alpha}{u^\alpha} + \frac{(T-s)^\alpha}{(s-u)^\alpha} \\ &\quad + \alpha \int_{\frac{u}{T-u}}^{\frac{u}{s-u}} \frac{(1+t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} dt - \alpha \int_{\frac{s-u}{T-u}}^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} dt. \end{aligned}$$

Мы можем теперь написать

$$m_1(C_\rho) = \int_0^s (K(T, u) - K_1(s, u)) d\xi(u).$$

Как уже отмечалось, при $\alpha > 0$ для написанного стохастического интеграла справедливы обычные формулы интегрирования по частям. Поэтому

$$\begin{aligned} m_1(C_\rho) &= \frac{T^\alpha - s^\alpha}{u^\alpha} \xi(u) \Big|_0^s + \frac{(T-s)^\alpha}{(s-u)^\alpha} (\xi(u) - \xi(s)) \Big|_0^s \\ &\quad + \alpha (\xi(u) - \xi(s)) \int_{\frac{u}{T-u}}^{\frac{u}{s-u}} \frac{(1+t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} dt \Big|_0^s \\ &\quad - \alpha (\xi(u) - \xi(s)) \int_{\frac{s-u}{T-u}}^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} dt \Big|_0^s \\ &\quad + \alpha (T^\alpha - s^\alpha) \int_0^s \frac{\xi(u)}{u^{1+\alpha}} du - \alpha (T-s)^\alpha \int_0^s \frac{\xi(u) - \xi(s)}{(s-u)^{\alpha+1}} du \\ &\quad + \alpha \int_0^s \frac{\xi(u) - \xi(s)}{u^\alpha} \left(\frac{s^\alpha}{s-u} - \frac{T^\alpha}{T-u} \right) du \\ &\quad + \alpha \int_0^s \frac{(\xi(u) - \xi(s))(T-s)^\alpha}{(s-u)^{\alpha+1}(T-u)} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{T^\alpha - s^\alpha}{s^\alpha} a + \frac{(T-s)^\alpha}{s^\alpha} a - \alpha a \int_{\frac{s}{T}}^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} dt \\
&\quad + \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_0^s \frac{\xi(u)}{u^{1+\alpha}} du - \alpha(T-s)^\alpha \int_0^s \frac{\xi(u) - \xi(s)}{(s-u)^{\alpha+1}} du \\
&\quad + \alpha \int_0^s \frac{\xi(u) - \xi(s)}{u^\alpha} du \left(\frac{s^\alpha}{s-u} - \frac{T^\alpha}{T-u} \right) du \\
&\quad + \alpha(T-s)^\alpha \int_0^s \frac{\xi(u) - \xi(s)}{(s-u)^\alpha (T-u)} du.
\end{aligned}$$

При выводе последней формулы мы воспользовались тем, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\xi(u)}{u^\alpha} = \lim_{u \rightarrow s} \frac{\xi(u) - \xi(s)}{(s-u)^\alpha} = 0.$$

Это следует из того, что $\xi(u)$ локально, в окрестности любой точки, удовлетворяют при любом $\gamma > 0$ условию Гёльдера с показателем $\frac{1+\alpha}{2} - \gamma$. Можем теперь написать

$$\begin{aligned}
m_1(C_\rho) &= \frac{T^\alpha - s^\alpha}{s^\alpha} a + \frac{(T-s)^\alpha}{s^\alpha} a - \alpha a \int_{\frac{s}{T}}^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} dt \\
&\quad + \alpha(T^\alpha - s^\alpha) s^{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{1}{s^{\frac{1-\alpha}{2}}} \int_0^s \frac{\xi(u)}{u^{1+\alpha}} du \\
&\quad + \alpha(T-s)^\alpha s^{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{1}{s^{\frac{1-\alpha}{2}}} \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{(s-u)^{\alpha+1}} du \\
&\quad - \alpha T^\alpha s^{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{1}{s^{\frac{1-\alpha}{2}}} \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{u^\alpha} \left(\frac{s^\alpha}{T^\alpha} \frac{1}{s-u} - \frac{1}{T-u} \right) du \\
&\quad - \alpha(T-s)^\alpha s^{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{1}{s^{\frac{1-\alpha}{2}}} \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{(s-u)^{\alpha+1} (T-u)} du.
\end{aligned}$$

Далее,

$$a \frac{(T-s)^\alpha}{s^\alpha} - \alpha a \int_{\frac{s}{T}}^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} dt = -\alpha a \int_{\frac{s}{T}}^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} \left(\frac{1}{t^\alpha} - 1 \right) dt.$$

При $x = \frac{T}{s} \rightarrow 1$ последнее выражение ведет себя как $(x-1)^{\alpha+1}$, а при $x \rightarrow \infty$ оно стремится к положительному пределу. Точно так же

$$\begin{aligned}
&\frac{T^\alpha - s^\alpha}{s^\alpha} a + \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_0^s \frac{\xi(u)}{u^{1+\alpha}} du \\
&= \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_0^1 \frac{\xi(u)}{u^{1+\alpha}} du + \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_1^s \frac{\xi(u) - \xi(s)}{u^{1+\alpha}} du.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом,

$$\begin{aligned}
&\alpha(T-s)^\alpha \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{(s-u)^{\alpha+1}} du - \alpha(T-s)^\alpha \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{(s-u)^\alpha (T-u)} du \\
&= \alpha(T-s)^{\alpha+1} \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{(s-u)^{\alpha+1} (T-u)} du
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{u^\alpha} \left(\frac{s^\alpha}{T^\alpha} \frac{1}{s-u} - \frac{1}{T-u} \right) du \\ = \frac{T^\alpha - s^\alpha}{T^\alpha} \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{u^\alpha(s-u)} du + (T-s) \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{u^\alpha(s-u)(T-u)} du. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} m_1(C_\rho) &= \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_0^1 \frac{\xi(u)}{u^{\alpha+1}} du + \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_1^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{u^{\alpha+1}} du \\ &\quad - \alpha a \int_{\frac{s}{T}}^1 (1-t)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{t^\alpha} - 1 \right) dt + \alpha(T-s)^{\alpha+1} \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{(s-u)^{\alpha+1}(T-u)} du \\ &\quad + \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{u^\alpha(s-u)} du - \alpha(T-s)T^\alpha \int_0^s \frac{\xi(s) - \xi(u)}{u^\alpha(s-u)(T-u)} du. \end{aligned}$$

Исследуем вначале область малых s , т.е. $s \leq T/2$. В этой области все слагаемые имеют одинаковый порядок. Мы воспользуемся нашими предположениями Н1), Н2) (см. § 1), которые дают

$$\begin{aligned} m_1(C_\rho) &= \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_0^1 \frac{\xi(u)}{u^{\alpha+1}} du \\ &\quad + \alpha(T^\alpha - s^\alpha) s^{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{1}{s^{\frac{1-\alpha}{2}}} \int_1^s \frac{\xi(u) - \xi(s)}{u^{\alpha+1}} du - \alpha a \int_{\frac{s}{T}}^1 (1-t)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{t^\alpha} - 1 \right) dt \\ &\quad + \alpha(T-s)^{\alpha+1} s^{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{1}{s^{\frac{1-\alpha}{2}}} \int_0^s \frac{\xi(u) - \xi(s)}{(s-u)^{\alpha+1}} (T-u) du \\ &\quad + \alpha(T^\alpha - s^\alpha) s^{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{1}{s^{\frac{1-\alpha}{2}}} \int_0^s \frac{\xi(u) - \xi(s)}{u^\alpha(s-u)} du \\ &\quad - \alpha T^\alpha s^{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{1}{s^{\frac{1-\alpha}{2}}} \int_0^s \frac{\xi(u) - \xi(s)}{u^\alpha(s-u)} \frac{T-s}{T-u} du \\ &= T^\alpha s^{\frac{1-\alpha}{2}} \eta_1, \end{aligned}$$

где η_1 — случайная величина, $E\eta_1 = O(1)$. Поэтому

$$\frac{m_1(C_\rho)}{\sqrt{\sigma(s, T)}} = \frac{1}{T^{\frac{1-\alpha}{2}}} s^{\frac{1-\alpha}{2}} \eta_2.$$

Аналогичным образом,

$$\frac{\partial m_1(C_\rho)}{\partial T} = T^{\alpha-1} s^{\frac{1-\alpha}{2}} \eta_3, \quad E_s \eta_3 = O(1),$$

и

$$\frac{\sigma_T}{\sigma} \frac{m_1}{\sqrt{\sigma}} - \frac{\partial m_1}{\partial T} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{T^{\frac{3-\alpha}{2}}} s^{\frac{1-\alpha}{2}} \eta_3, \quad E\eta_3 = O(1).$$

Аналогично исследуется $m_2(C_\rho)$.

Поскольку (см. (7))

$$\Phi_T(s, T) = \int e^{-\frac{m^2(C_\rho)}{2\sigma(s, T)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sigma(s, T)} \cdot \frac{\partial \sigma(s, T)}{\partial T} \cdot \frac{m(C_\rho)}{\sqrt{\sigma(s, T)}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma(s, T)}} \cdot \frac{\partial m(C_\rho)}{\partial T} \right),$$

то мы получаем, что при $s \leq T/2$

$$|\Phi_T(s, T)| \leq \text{const} \cdot \alpha \cdot \frac{s^{\frac{1-\alpha}{2}}}{T^{\frac{3-\alpha}{2}}}.$$

Исследование $m_1(C_\rho)$ при $s > T/2$ более сложно. Здесь мы воспользуемся гипотезой НЗ) и некоторыми сокращениями. При рассматриваемых s условное математическое ожидание $m_1(C_\rho)$ принимает значения порядка $\sqrt{\sigma(s, T)}$, и мы выделим главный член в представлении $m_1(C_\rho)$. Имеем

$$\begin{aligned} m_1(s) &= \int m_1(C_\rho) dP(C_\rho; s) \\ &= \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_0^1 \frac{g_1(u, s)}{u^{\frac{1+\alpha}{2}}} du + \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \int_0^1 \frac{g_1(u, s) - au^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{u^{\frac{1+\alpha}{2}}} du \\ &\quad - \alpha a \int_{s/T}^1 (1-t)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{t^\alpha} - 1 \right) dt + \alpha(T-s)^{\alpha+1} \int_0^s \frac{g_2(u, s) du}{(s-u)^{\frac{\alpha+1}{2}}(T-u)} \\ &\quad + \alpha(T^\alpha - s^\alpha)(T-s) \int_0^s \frac{g_2(u, s) du}{u^\alpha(s-u)^{\frac{1-\alpha}{2}}} - \alpha T^\alpha \int_0^s \frac{g_2(u, s) du}{u^\alpha(s-u)^{\frac{1-\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

Максимальным (при $(T-s)/s \rightarrow 0$) слагаемым в этом представлении служит

$$J = \alpha(T-s)^{\alpha+1} \int_0^s \frac{g_2(u, s) du}{(s-u)^{\frac{1-\alpha}{2}}(T-u)}.$$

Перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} J &= \alpha(T-s)^{\alpha+1} g_2(s, s) \int_0^s \frac{du}{(s-u)^{\frac{\alpha+1}{2}}(T-u)} \\ &\quad + \alpha(T-s)^{\alpha+1} \int_0^s \frac{(g_2(u, s) - g_2(s, s)) du}{(s-u)^{\frac{\alpha+1}{2}}(T-u)} \\ &= \alpha(T-s)^{\frac{\alpha+1}{2}} \int_0^{\frac{s}{T-s}} \frac{du}{(s-u)^{\frac{\alpha+1}{2}}(1+u)} \\ &\quad + \alpha(T-s)^{\alpha-1} \int_0^s \frac{(g_2(u, s) - g_2(s, s)) du}{(s-u)^{\frac{\alpha+1}{2}}(T-u)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
m_1(s) = & \alpha(T-s)^{\frac{\alpha+1}{2}} g_2(s, s) \int_0^{\frac{1}{x-1}} \frac{du}{u^{\frac{\alpha+1}{2}}(u+1)} \\
& + \alpha(T-s)^{\alpha+1} \int_0^s \frac{(g_2(u, s) - g_2(s, s)) du}{(s-u)^{\frac{\alpha+1}{2}}(T-u)} \\
& + \alpha(T^\alpha - s^\alpha) \left[\int_0^1 \frac{g_1(u, s)}{u^{\frac{\alpha+1}{2}}} du + \int_1^s \frac{g_1(u, s) - au^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{u^{\frac{1+\alpha}{2}}} du \right] \\
& - \alpha a \int_{s/T}^1 (1-t)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{t^\alpha} - 1 \right) dt \\
& + \alpha(T^\alpha - s^\alpha)(T-s) \int_0^s \frac{g_2(u, s)}{u^\alpha(s-u)} du - \alpha T^\alpha(T-s) \int_0^s \frac{g_2(u, s)}{u^\alpha(s-u)^{\frac{1-\alpha}{2}}} du.
\end{aligned}$$

Теперь видим, что отношение $\frac{m_1(s)}{\sqrt{\sigma(s, T)}}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{m_1(s)}{\sqrt{\sigma(s, T)}} = & \frac{\alpha g_2(s, s)}{\sqrt{\psi(T/s)}} + \frac{\alpha(T-s)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\psi_1(T/s)} \int_0^s \frac{(g_2(u, s) - g_2(s, s)) du}{(s-u)^{\frac{\alpha+1}{2}}(T-u)} \\
& + \frac{\alpha(T^\alpha - s^\alpha)}{(T-s)^{\frac{\alpha+1}{2}} \sqrt{\psi_1(T/s)}} \left[\int_0^1 \frac{g_1(u, s)}{u^{\frac{1+\alpha}{2}}} du + \int_1^s \frac{g_1(u, s) - au^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{u^{\frac{1+\alpha}{2}}} du \right] \\
& - \frac{\alpha a}{(T-s)^{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{\psi(T/s)}} \int_{s/T}^1 (1-t)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{t^\alpha} - 1 \right) dt \\
& + \frac{\alpha(T^\alpha - s^\alpha)(T-s)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{\psi_1(T/s)}} \int_0^s \frac{g_2(u, s)}{u^\alpha(s-u)} du \\
& - \frac{\alpha T^\alpha(T-s)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{\psi_1(T/s)}} \int_0^s \frac{g_2(u, s)}{u^\alpha(s-u)^{\frac{1-\alpha}{2}}} du.
\end{aligned}$$

В этой формуле существенно, что первое слагаемое зависит от T только через регулярную функцию $\psi_1(T/s)$, а остальные слагаемые при малых $(T-s)$ пропорциональны $(T-s)^{\frac{1-\alpha}{2}}, (T-s)^{\frac{3-\alpha}{2}}, \dots$. Поэтому основной вклад в производную $\frac{\partial}{\partial T} \frac{m_1(s)}{\sqrt{\sigma(s, T)}}$ вносит производная второго слагаемого, равная

$$\begin{aligned}
& \alpha \cdot \frac{\alpha+1}{2} \cdot \frac{(T-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{\psi_1(T/s)}} \int_0^s \frac{(g_2(u, s) - g_2(s, s)) du}{(s-u)^{\frac{\alpha+1}{2}}(T-u)} \\
& + \alpha \frac{(T-s)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\sqrt{\psi_1(T/s)}} \int_0^s \frac{(g_2(u, s) - g_2(s, s)) du}{(s-u)^{\frac{\alpha+1}{2}}(T-u)^2} \\
& - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{(T-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}}{(\psi_1(T/s))^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\psi_1'(T/s)}{s} \int_0^s \frac{(g_2(u, s) - g_2(s, s))}{(s-u)^{\frac{\alpha+1}{2}}(T-u)^2} du.
\end{aligned}$$

Здесь для оценки всех интегралов мы должны воспользоваться гипотезами Н2), Н3), из которых следует, что при $T - s \leq 1$

$$\left| \int_0^s \frac{g_2(u, s) - g_2(s, s)}{(s - u)^{\frac{\alpha+1}{2}} (T - u)^2} du \right| \leq \frac{\text{const}}{(T - s)^{\frac{\alpha+1}{2} - \gamma} s^\gamma},$$

$$\left| \int_0^s \frac{g_2(u, s) - g_2(s, s)}{(s - u)^{\frac{\alpha+1}{2}} (T - u)^2} du \right| \leq \frac{\text{const}}{(T - s)^{\frac{3+\alpha}{2} - \gamma} s^\gamma},$$

а при $T - s > 1$ с помощью неравенства $|g_2(u, s) - g_2(s, s)| \leq \text{const} \left| \frac{s - u}{s} \right|$ получаем

$$\left| \int_0^s \frac{g_2(u, s) - g_2(s, s)}{(s - u)^{\frac{\alpha+1}{2}} (T - u)^2} du \right| \leq \frac{\text{const}}{(T - s)^{\frac{\alpha+1}{2} - \gamma} s^\gamma},$$

$$\left| \int_0^s \frac{g_2(u, s) - g_2(s, s)}{(s - u)^{\frac{\alpha+1}{2}} (T - u)^2} du \right| \leq \frac{\text{const}}{(T - s)^{\frac{\alpha+3}{2} - \gamma} s^\gamma}.$$

Таким образом, при $T - s \leq s$

$$\mathbb{E}_s e^{-\frac{m^2(C_\rho)}{2\sigma(s, T)}} \left| \frac{\partial}{\partial T} \frac{m_1(C_\rho)}{\sqrt{\sigma(s, T)}} \right| \leq \frac{\text{const} \cdot \alpha}{(T - s)^{1 - \gamma} s^\gamma}.$$

Интеграл от правой части по T от $T = s$ до $T = 2s$ не превосходит $\text{const} \cdot \alpha$.

Аналогично исследуется $m_2(C_\rho)$.

§ 4. Окончание доказательства основной теоремы. Заключительные замечания

Рассмотрим вначале $\Phi(s, s) = \int dP(C_\rho, T) \lim_{T \rightarrow s} \int_0^{-\frac{m(C_\rho)}{\sqrt{\sigma(s, T)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

В силу гипотез Н2), Н3)

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow s} \frac{m_1(C_\rho)}{\sqrt{\sigma(s, T)}} &= \alpha \cdot \lim_{T \rightarrow s} (T - s)^{\frac{\alpha+1}{2}} \int_0^s \frac{\mathbb{E}_s(\xi(s) - \xi(u))}{(s - u)^{\alpha+1} (T - u)^2} du \\ &= \alpha \cdot \lim_{T \rightarrow s} (T - s)^{\frac{\alpha+1}{2}} \int_0^s \frac{g(u, s)}{(s - u)^{\alpha+1} (T - u)^2} du \\ &= \alpha \cdot \lim_{T \rightarrow s} (T - s) \int_0^{\frac{s}{T-s}} \frac{g(s - v(T - s), s)}{v^{\frac{\alpha+1}{2}} (1 + v)} dv \\ &= \alpha g_2(s, s) \int_0^\infty \frac{dv}{v^{\frac{\alpha+1}{2}} (1 + v)}. \end{aligned}$$

Ввиду наших предположений $g_2(s, s)$ равномерно ограничена. Аналогично исследуется $\lim_{T \rightarrow s} \frac{m_2(C_\rho)}{\sqrt{\sigma(s, T)}}$.

Таким образом, $\Phi(T, T)$ равномерно меньше 1. С вероятностной точки зрения

$$\lim_{T \rightarrow s} \frac{m(C_\rho)}{\sqrt{\sigma(s, T)}}$$

представляет собой “инфинитезимальный прогноз”, который оказывается нетривиальным.

Полученные оценки $\Phi_T(s, T)$ показывают, что

$$\int_0^T |\Phi_T(s, T)| ds \leq \text{const} \cdot \alpha.$$

Поэтому при малых α основное уравнение (5) можно решать методом итераций. Прямая оценка возникающего ряда дает оценку (8).

Для получения окончательного результата необходимо доказать гипотезы Н1)–Н3). Из них гипотеза Н3) представляется наиболее трудной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26. № 2. С. 115–118.
- [2] Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972.
- [3] Mandelbrot B. B. The fractional geometry of nature. San Francisco: Freeman, 1982.
- [4] Kahane J.-P. Some random series of functions. Cambridge Stud. Adv. Math. V. 5. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
- [5] Talagrand M. Lower classes for fractional Brownian motion // J. Theoret. Probab. 1996. V. 9. № 1. P. 191–213.
- [6] Yor M. Remarques sur certaines constructions des mouvements browniens fractionnaires // Lecture Notes in Math. V. 1321. Berlin: Springer-Verlag, 1988. P. 217–224.
- [7] Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.
- [8] Dobrushin R. L. Gaussian and their subordinated self-similar random generalized fields // Ann. Probab. 1979. V. 7. № 1. P. 1–28.
- [9] Dobrushin R. L., Major P. On asymptotical behavior of some self-similar random fields // Selecta Math. Soviet. 1981. V. 1. № 5. P. 256–291.
- [10] Patzschke N., Zaehle M. Random measures IV // Stochastics and Stoch. Reports. 1994. V. 49. P. 87–98.
- [11] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

Отделение математики Принстонского Университета,
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

Поступила в редакцию
15.09.1996