Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, Предельное распределение энергии квантового идеального газа с точки зрения теории разбиений натуральных чисел, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 139–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm823>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:04:42

УДК 519.2

Памяти Юлика Добрушина

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ
КВАНТОВОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ
ТЕОРИИ РАЗБИЕНИЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А. М. ВЕРШИК

Р. Л. Добрушин был одним из тех, кто умел не только слушать “чужие” задачи, но и находить в них связь со своими проблемами. Я неоднократно обсуждал с ним темы, близкие к тому, о чем пойдет речь ниже. Беседы с ним всегда были интересны и полезны. Его математическое мышление, по преимуществу вероятностное, позволяло ему четко увидеть собственно вероятностную часть проблемы, а таковая всегда присутствует в почти любой асимптотической задаче. Мы часто находили общее, обсуждая и далекие от математики вопросы. Его колоритная личность и математический талант привлекали друзей и молодежь, а сам он безусловно принадлежал к кругу тех, кто в значительной мере определял общую картину нашей математики.

0. Ставя и изучая задачи об асимптотиках и о предельных формах комбинаторных и геометрических объектов, автор часто оглядывался на статистическую физику. Многие проблемы, из которых возникают подобные задачи (случайные разбиения, подстановки, асимптотическая теория представлений, рост конфигураций, статистическая геометрия, теория чисел и т. п.), имеют недвусмысленно статфизический характер. Эти задачи разнообразны по мотивировкам, ответам и связям с другими областями математики. В то же время, помимо собственного интереса они, видимо, должны играть роль полезных алгебраических и геометрических моделей для более сложных проблем (таких, как фазовые переходы в многомерных системах и др.).

Цель этой работы в том, чтобы показать, насколько близки две задачи – о типичной асимптотической форме разбиения натурального числа и о вычислении предельного распределения энергии квантового идеального газа. Мы приводим решение первой и истолковываем его в терминах второй. Нет сомнения в полезности этого параллелизма для обеих областей.

1. Задача о распределении энергии в большом и малом каноническом ансамблях квантового идеального газа с той или иной статистикой замечательным образом включается в широкий класс проблем, к которому относятся задачи аддитивной асимптотической теории чисел с неограниченно растущим числом слагаемых, в частности, задачи о разбиениях натуральных чисел и векторов. В традиционной теории интересуются, как правило, числом или асимптотикой числа решений (разбиений). Нас же интересует более общий вопрос – об асимптотической структуре типичных разбиений

или конфигураций, об их предельной форме, инвариантах и др. В аддитивной теории чисел, как правило, число слагаемых фиксировано (например, в классической проблеме Варинга), но в задачах комбинаторики, геометрии, не говоря уже о статистической физике, число слагаемых растет заданным или случайным образом.

Вот одна из формулировок такого рода. Рассматривается счетное множество $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ без конечных предельных точек и число $E \in \mathbb{R}_+$; на множестве всех разложений числа E : $E = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$, $\lambda_i \in \Lambda$, упорядоченных по убыванию: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, задается мера (статистика) и ставится вопрос об асимптотических свойствах таких мер, когда $E \rightarrow \infty$. Существует ли (после необходимой нормировки разложений) их предел в том или ином смысле; если “да”, то вырожден он или нет? То есть являются ли почти все разложения асимптотически одинаковыми?

Можно заменить $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}_+^n$ или на коммутативную полугруппу, а Λ – на то или иное подмножество в ней; можно налагать различные дополнительные условия на слагаемые и т. п. (рост их числа, размеры и др.). Задача об асимптотике мер и, в частности, о предельной форме (“limit shape”) является ключевой проблемой, она связана со многими областями математики см. [1], [2].

2. Рассмотрим более подробно задачи о *разбиениях* натуральных чисел. В этом случае $\Lambda = \mathbb{N}$, $E \equiv n \in \mathbb{N}$ в предыдущих обозначениях. Будем обозначать множество всех разбиений натурального числа n через $\mathcal{P}_n = \{\lambda : \lambda \vdash n\}$, а сумму для данного разбиения λ как $n(\lambda) = n$, обозначим также $\mathcal{P} = \bigcup_n \mathcal{P}_n$. Для данного разбиения $\lambda = \{\lambda_i\}$ обозначим $r_k(\lambda) = \#\{i : \lambda_i = k\}$ (число слагаемых, равных данному числу) и назовем их *числами заполнения*. Очевидно, $\sum_k k r_k(\lambda) = n(\lambda)$, а число слагаемых есть $\sum_k r_k(\lambda) \equiv N(\lambda)$. Обозначим через $\mathcal{P}_{n,N} = \{\lambda : n(\lambda) = n, N(\lambda) = N\}$ множество разбиений числа n с N слагаемыми. *Распределением разбиения* λ назовем функцию $\varphi_\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$

$$\varphi_\lambda(t) = \sum_{k=[t]}^{\infty} r_k(\lambda),$$

ее подграфик есть *диаграмма Юнга*. Очевидно, $\varphi_\lambda(0) = N(\lambda)$, $\int_0^\infty \varphi_\lambda(t) dt = n(\lambda)$.

Выделим важный класс мер на разбиениях: семейство статистик (мер) μ_x на $\mathcal{P}$ назовем *мультипликативным*, если

- 1) числа заполнения $\{r_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty$ как функции на пространствах с мерой $(\mathcal{P}, \mu_x)$ независимы для всех мер μ_x ;
- 2) ограничения мер μ_x на $\mathcal{P}_n$, $n = 1, 2, \dots$, не зависят от x :

$$\frac{1}{\mu_x(\mathcal{P})} \mu_x|_{\mathcal{P}_n} \equiv \mu^n.$$

ЛЕММА. *Заменой параметра всякое мультипликативное семейство приводится к следующему виду: параметр x пробегает открытый интервал $(0, R_0)$, $R_0 \leq \infty$; существуют функции $\mathcal{F}_k(\cdot)$, аналитические в круге $|z| < R_0$ и имеющие неотрицательные коэффициенты Тэйлора $\mathcal{F}_k(y) = \sum_{r=0}^\infty c_{kr} y^r$, $k = 1, 2, \dots$, $c_{kr} \geq 0$, при этом*

$$\begin{aligned} \mu_x(\{\lambda\}) &= x^{n(\lambda)} \prod_k \mathcal{F}_k(x^k)^{-1} c_{k r_k(\lambda)}, \\ \mu_x(\{\lambda\} : r_k(\lambda) = r) &= c_{kr} x^{kr} \mathcal{F}_k(x^k)^{-1}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Из сравнения вышеприведенных формул вытекает независимость функций $r_1(\lambda), r_2(\lambda), \dots$.
2. Лемма утверждает, что мультипликативное семейство задается одной аналитической в круге $|z| < R_0$ функцией $\mathcal{F}(x)$ и ее разложением в бесконечное произведение $\mathcal{F}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k(x^k)$, где все сомножители $\mathcal{F}_k$ имеют неотрицательные коэффициенты Тэйлора. Функция $\mathcal{F}_k$ есть производящая функция распределения величины $r_k(\cdot)$.
3. Нормированные ограничения μ_x на $\mathcal{P}_n$ выглядят так:

$$\mu^n(\{\lambda\}) \equiv \frac{1}{\mu_x(\mathcal{P}_n)} \mu_x(\{\lambda\}) = Q_n^{-1} \prod_k c_{kr_k(\lambda)},$$

где $Q_n = \sum_{\lambda \vdash n} \prod_k c_{kr_k(\lambda)}$, при этом мера μ_x есть выпуклая комбинация мер μ^n :

$$\mu_x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n Q_n \mathcal{F}(x)^{-1} \mu^n.$$

Те же данные ($\mathcal{F}(x) = \prod_k \mathcal{F}_k(x^k)$) задают мультипликативное семейство на малом каноническом ансамбле — $\mathcal{P}_{n,N}$. В этом случае формулы таковы:

$$\begin{aligned} \mu_{x,z}(\{\lambda\}) &= x^{n(\lambda)} \cdot z^{N(\lambda)} \cdot \prod_k \mathcal{F}_k(zx^k)^{-1} c_{kr_k(\lambda)}; \\ \mu^{n,N}(\{\lambda\}) &\equiv \frac{1}{\mu_{x,z}(\mathcal{P}_{n,N})} \mu_{x,z}(\{\lambda\}) = Q_{n,N}^{-1} \prod_k c_{kr_k(\lambda)}, \end{aligned}$$

где

$$Q_{n,N} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ N(\lambda)=N}} \prod_k c_{kr_k(\lambda)} \quad (\text{малая статсумма}).$$

Аналогии с понятиями статфизики идеального газа здесь очевидны — см. о них далее.

Основная проблема теперь ставится так: *найти асимптотическое поведение мер μ^n , $\mu^{n,N}$ при $n, N \rightarrow \infty$ и мер μ_x , $\mu_{x,z}$ при $x \rightarrow R_0$, $z \rightarrow 1$ и сравнить их.* Совпадение пределов этих мер означает асимптотическую эквивалентность ансамблей $(\mathcal{P}, \mu_x)$ и $(\mathcal{P}_n, \mu^n)$ или $(\mathcal{P}, \mu_{x,z})$ и $(\mathcal{P}_{n,N}, \mu^{n,N})$. Вопрос об асимптотике включает в себя нахождение подходящей *нетривиальной нормировки (скейлинга)*, позволяющей рассматривать все меры в одном масштабе. Этот, в существенном единственный, скейлинг и прямой ответ на поставленный выше вопрос в случае классических статистик для квантового идеального газа и их обобщений будет дан ниже.

3. Из всего обширного класса мультипликативных мер рассмотрим лишь следующий:

$$\mathcal{F}_{\{b_k\}}^{BE}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)^{b_k}}, \quad \mathcal{F}_{\{b_k\}}^{FD}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k)^{b_k},$$

где $b_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$. В силу предыдущего эти функции задают статистики на $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n,N} - \mu_{x,\{b_k\}}$ и т. д. Мы опускаем указание на $\{b_k\}$, когда это возможно. Если

$b_k = j_d(k) = \#\{(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : k_1^2 + \dots + k_d^2 = k\}$, то эти статистики совпадают со статистиками Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака d -мерного квантового идеального газа.

Определим число $\alpha = \alpha(\{b_k\})$:

$$\alpha = \inf \left\{ \alpha' : \text{ряд Дирихле } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k^s} \text{ есть аналитическая функция от } s \text{ в полуплоскости } \operatorname{Re} s \geq \alpha' \right\}.$$

Для $b_k = j_k(d)$ по известной теореме Зигеля $\alpha = d/2$.

Параметр α – единственная характеристика функций $\mathcal{F}^{BE}$ и $\mathcal{F}^{FD}$, которая нужна для ответов на поставленные вопросы. Мы будем считать, что $\alpha < \infty$.

Нижеследующая теорема утверждает, что существует и притом единственный скейлинг, при котором меры μ_x и μ^n сходятся, и предел есть вырожденная мера, сосредоточенная на одной замечательной кривой, однозначно определяемой по числу α .

ТЕОРЕМА. Для любых $a, b > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \mu_x \left\{ \lambda \in \mathcal{P} : \sup_{t \in [a, b]} \left| n^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \sum_{k \geq tn^{\frac{1}{1+\alpha}}} r_k(\lambda) - \int_t^{\infty} u^{\alpha-1} \frac{e^{-cu}}{1 \mp e^{-cu}} du \right| < \varepsilon \right\} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n \left\{ \lambda \vdash n : \sup_{t \in [a, b]} \left| n^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \sum_{k \geq tn^{\frac{1}{1+\alpha}}} r_k(\lambda) - \int_t^{\infty} u^{\alpha-1} \frac{e^{-cu}}{1 \mp e^{-cu}} du \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Выбор знака $\mp$ отвечает статистикам BE и FD , соответственно, константа c определена ниже.

Таким образом, скейлинг с точностью до констант определяется так: $(n^{\frac{1}{\alpha+1}}, n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}})$; предельные меры на обоих ансамблях совпадают и являются δ -мерой на кривой, определяемой уравнением

$$(*) \quad \Gamma_{\alpha}(t) = \int_t^{\infty} u^{\alpha-1} \frac{e^{-cu}}{1 \mp e^{-cu}} du.$$

Функция $\Gamma_{\alpha}(t)$ есть плотность распределения, поэтому константа c определяется из условия

$$\int_0^{\infty} \Gamma_{\alpha}(t) dt = 1.$$

Заметим, что для $\alpha > 1$ (т.е. $d > 2$) $\Gamma_{\alpha}(0) < \infty$, а для $0 < \alpha \leq 1$ $\Gamma_{\alpha}(0) = \infty$. Случай $\alpha = 1$ соответствует, с одной стороны, равномерному распределению на $\mathcal{P}_n$ и эйлеровым функциям

$$\mathcal{F}^{BE}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}, \quad \mathcal{F}^{FD}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k),$$

а с другой – двумерному идеальному газу ($\alpha = d/2$). Кривая $\Gamma_1(t)$ в симметричной форме записывается уравнением (ВЕ–случай)

$$\exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{6}}x\right) + \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{6}}y\right) = 1,$$

а скейлинг – $(\sqrt{n}, \sqrt{n})$.

Любопытно, что ее поведение в нуле (логарифмическая особенность) объясняет старую теорему П. Эрдеша о том, что в типичном разбиении числа n число слагаемых растет как $c\sqrt{n} \ln n$, что имеет прямое отношение к вопросу о фазовом переходе (точнее, его отсутствию при $d \leq 2$ – см. далее).

Фиксация роста числа слагаемых приводит к аналогичной теореме для мер $\mu^{n,N}$, а именно, если $N = vn^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, $v > 0$, то соответствующая формула для $\Gamma_{\alpha,v}$ при $\alpha \leq 1$ такова:

$$\Gamma_{\alpha,v}(t) = \int_t^\infty u^{\alpha-1} \frac{e^{-cu}}{1 \mp ve^{-cu}} du.$$

Если $\alpha > 1$, то при достаточно больших v к графику кривой добавляется атом в 0 (“конденсация Бозе–Эйнштейна” – см. далее). Кривые Γ_α , $\Gamma_{\alpha,v}$ есть пределы диаграмм Юнга в подходящей нормировке, т.е. предельные распределения разбиений. Функции Γ_α и $\Gamma_{\alpha,v}$ содержат информацию о главном члене асимптотик любых функционалов от типичных разбиений.

4. Остановимся кратко на основном вопросе – связи со статистикой идеального квантового газа. Автору была полезна конструктивная критика Л. А. Халфина, способствовавшая уточнению некоторых соответствий.

Состояние (= точка ансамбля = конфигурация) определяется в этом случае набором импульсов частиц, входящих в конфигурацию, т.е. набором собственных значений (с кратностями) задачи Дирихле для оператора Лапласа с периодическими граничными условиями. Пусть V – объем d -мерного тора, ω – состояние системы. Тогда энергия состояния задается формулой

$$E_\omega = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m} \sum_{q \in \omega \subset \mathbb{Z}^d} \frac{1}{V^{\frac{2}{d}}} \|q\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ – d -мерная евклидова норма. Приняв систему единиц, в которой множитель перед суммой равен 1, мы получаем с точностью до обозначений ситуацию, рассмотренную выше, в которой

$$\mathcal{F}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)^{j_d(k)}}$$

(ВЕ-статистика).

Асимптотики всех величин (число частиц, объем) соотносятся с ростом энергии, которая является для нас основным параметром; в этом, быть может, некоторое методическое отличие от традиции. Грубо говоря, энергия и есть то натуральное число, которое мы разбиваем: $E = n$. Слагаемые, с точностью до множителя (в который входит обратная температура), есть натуральные числа, поделенные на некоторую степень объема.

Из приведенной выше теоремы следует, что скейлинг по осям с точностью до констант таков:

$$(n^{\frac{1}{\alpha+1}}, n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}) = (E^{\frac{2}{d+2}}, E^{\frac{d}{d+2}}),$$

напомним, что $\alpha = d/2$. Поэтому $V = V(E) \simeq E^{\frac{d}{d+2}}$, $N = N(E) \simeq E^{\frac{2}{d+2}}$ (по порядку). Здесь мы рассматриваем случай, в котором число частиц не фиксируется, а является случайным (химический потенциал равен нулю). Константа в скейлинге не имеет значения, когда речь идет о мерах μ^n , но для скейлинга мер μ_x константа уже существенна (см. ниже) – она зависит от x , а x в статфизической интерпретации есть экспонента от обратной температуры со знаком минус, деленной на нужную степень объема.

Простой подсчет показывает, что соотношение между объемом (т.е. между размером слагаемых или, иначе, энергией частиц), с одной стороны, и числом частиц, с другой, автоматически устанавливается таким, каким оно должно быть при термодинамическом предельном переходе. Таким образом, *наш предельный переход в точности соответствует термодинамическому пределу*, в котором N и V имеют одинаковый порядок роста. Если же зафиксировать предел отношения числа частиц (слагаемых) к объему, то мы приходим к аналогичной проблеме для условного распределения, т.е. для малого канонического ансамбля – см. далее.

Заметим, что в теоретико-числовых и геометрических задачах уместно рассматривать ситуации, когда соотношение между $V = V(E)$ и $N = N(E)$, т.е. между числом и размером слагаемых или суммой, необязательно столь жесткое, как в термодинамическом пределе. Например, число слагаемых может быть заранее заданной функцией суммы.

Вернемся к статфизической интерпретации теоремы, сформулированной выше. Пусть $r_k(\omega)$ – число частиц с энергией, равной k , т.е. сумма обычных чисел заполнения по сфере радиуса k в импульсной решетке. Сформулируем теорему в подходящих терминах. Пусть $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА. *При достаточно больших энергиях $E > E_\varepsilon$ множество состояний идеального ВЕ-газа (число частиц случайно), для которых выполнено нижеследующее свойство (*), имеет гиббсовскую меру, большую $1 - \varepsilon$:*

$$(*) \quad \sup_{0 < a \leq t \leq b < \infty} \left| E(\omega)^{-\frac{d}{d+2}} \cdot \sum_{k \geq t E^{\frac{2}{d+2}}} r_k(\omega) - \Gamma_{\frac{d}{2}}(t) \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, кривая $\Gamma_{\frac{d}{2}}$ есть график предельной плотности распределения $E(\omega)$ – энергии типичной конфигурации по нормированной на $E^{\frac{2}{d+2}}$ энергии частиц.

Отсюда следует, например, что в типичной конфигурации суммарная энергия всех частиц, каждая из которых имеет энергию, лежащую в интервале $(aE^{\frac{2}{d+2}}, bE^{\frac{2}{d+2}})$, асимптотически равна $\int_a^b \Gamma_{\frac{d}{2}}(t) dt \cdot E$, а число частиц с энергией, большей, чем $tE^{\frac{2}{d+2}}$, равно $\Gamma_{\frac{d}{2}}(t) E^{\frac{2}{d+2}}$.

Принципиально важным является вопрос о конечности $\Gamma_{\frac{d}{2}}(0)$: если это число конечно, то число частиц (слагаемых) в типичной конфигурации растет, как $\Gamma_{\frac{d}{2}}(0) E^{\frac{2}{d+2}}$,

если же бесконечно, то чуть (на степень логарифма) быстрее. Заметим, что все формулы имеют смысл и для дробных размерностей d ; в этом случае $b_k = [k^{\alpha-1}]$, если $1 \leq \alpha$ и, по-прежнему, $d = 2\alpha$; значение нашей плотности в нуле конечно в размерностях $d > 2$.

Приведем более явную формулу для $d = 3$ – трехмерного идеального ВЕ-газа:

$$\Gamma_{\frac{3}{2}}(t) = \int_t^\infty \sqrt{u} \frac{e^{-cu}}{1 - e^{-cu}} du, \quad c = \left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \right]^{\frac{2}{5}}.$$

Здесь Γ есть гамма-функция, а ζ – дзета-функция Римана. В нуле плотность распределения $\Gamma_\alpha(t)$ ограничена.

О размерности $d = 2$ ($\alpha = 1$) мы уже говорили – этот случай в точности совпадает с классическим равномерным распределением на разбиениях. Функция $\Gamma_1(\cdot)$ была выписана выше. Ее значение в нуле неограниченно. Асимптотики многих конкретных функционалов найдены П.Эрдешем и его последователями, но связи со статфизикой, как будто бы, не отмечались, как и не ставилась задача о предельной форме. Теорема Эрдеша о типичном числе слагаемых в равномерно распределенных разбиениях натурального числа ($c\sqrt{n} \ln n$) становится теоремой о типичном числе частиц, т.е. об асимптотике Γ_α в нуле. Она также может быть выведена из теоремы о предельной форме.

С теоретико-числовой точки зрения любопытен и одномерный случай $d = 1$, не представляющий, конечно, интереса для статфизики; здесь $\alpha = \frac{1}{2}$, а $b_k = 1$, если k есть полный квадрат, и $b_k = 0$, если k не есть полный квадрат, – он отвечает задаче о предельной плотности разбиения натурального числа в сумму квадратов с неограниченным числом слагаемых – иначе говоря, это неограниченная квадратичная проблема Варинга; ответ здесь также дается формулой, приведенной в теореме при значении $\alpha = \frac{1}{2}$.

Для комбинаторики очень интересна размерность $d = 4$, $\alpha = 2$, это – асимптотическая теория плоских разбиений или трехмерных диаграмм Юнга; о ней пойдет речь в другой работе.

Если мы зафиксируем рост числа слагаемых (частиц) в естественном диапазоне с точностью до константы – $N \sim cE^{\frac{d}{d+2}}$ (а тогда, как уже упоминалось, автоматически фиксируется и $\frac{N}{V} \rightarrow v$, где v – конечная плотность), то ответ также может быть получен аналогичными методами. Здесь речь идет уже о малом каноническом ансамбле и о слабых пределах при надлежащем скейлинге мер $\mu_{x,z}$ и $\mu^{n,N}$; в этом случае химический потенциал отличен от нуля. Пределы этих мер могут и не совпадать, даже если соотношения между взаимным ростом N , n и скоростью взаимного стремления к 1 переменных x, z согласована – см. [3]. Слабый предел мер $\mu^{n,N}$ снова даст δ -меру, сосредоточенную или на некоторой кривой, или на кривой с дополнительным атомом в нуле (см. выше).

Различие между размерностями (в том числе и дробными) $d > 2$ и $d \leq 2$ (т.е. между $\alpha > 1$ и $\alpha \leq 1$) выражается в наличии *эффекта конденсации Бозе–Эйнштейна*, суть которого в наших терминах объясняется так. Если $\Gamma_\alpha(0) = \infty$ (а это так в размерностях $d \leq 2$), то любое заданное конечное значение числа частиц, т.е. слагаемых, (нормированного на нужную степень энергии) будет меньше по порядку, чем число частиц, в том случае, когда оно случайно. Действительно, последнее для типичной

конфигурации, как отмечалось выше, растёт с ростом энергии E несколько быстрее, чем $E^{\frac{d}{d+2}}$, что, собственно, и означает бесконечность $\Gamma_\alpha(0)$. В этом случае предел мер $\mu^{n,N}$ в нужном скейлинге концентрируется на кривой – плотность распределения энергии, формула которой приводилась. Если же $\Gamma_\alpha(0) < \infty$ (т.е. $d > 2$), то при заданном нормированном числе частиц (слагаемых) большем, чем $\Gamma_\alpha(0)$, “заказанное” число будет больше, даже чем в случае, когда число частиц случайно, “недостающее” число частиц может быть восполнено только за счет частиц с нулевым импульсом, т.е. за счет нулевых слагаемых, и предел мер $\mu^{n,N}$ будет сосредоточен на кривой с атомом в нуле – в этом и состоит явление конденсации Бозе–Эйнштейна: доля нулевых частиц с нулевым импульсом (нулевых слагаемых) – положительна.

Это объяснение слегка отличается от обычных (см. [4]) той ролью, которую играет случай нулевого химпотенциала (случайного числа частиц): мы сравниваем значения $\Gamma_\alpha(0)$ и нормированного числа частиц при фиксированной плотности. Напомним, что в нормировку числа частиц и, тем самым, функции $\Gamma_\alpha(\cdot)$ и ее значения в нуле неявно входит температура (см. выше – скейлинг был определен с точностью до константы). Поэтому вышеприведенное рассуждение в конце концов приводит в обычному критерию: параметр конденсации определяется тем же известным выражением от плотности и температуры (см., например, [4; формула (55.5)]), которое и следует сравнивать с нашим $\Gamma_\alpha(0)$.

С другой стороны, ничего, кроме комбинаторных терминов, связанных с разбиениями натуральных чисел, во всем предыдущем, в частности в объяснении конденсации Бозе–Эйнштейна, не использовалось. Таким образом, конденсацию Бозе–Эйнштейна в равной мере можно “наблюдать” и в статфизике, и в этой, а также подобных ей, комбинаторно-числовых задачах. Я думаю, что имеется много таких обоюдополезных пересечений.

Кривые Γ_α являются экстремалами некоторых вариационных задач. Соответствующий вариационный принцип сформулирован автором (см. [1], [2]), но подробнее будет обсужден в другом месте. Вариационный принцип тесно связан с методом больших уклонений и энтропией. Р. Л. Добрушин был одним из пионеров применения этих методов в статистической физике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вершик А. М. Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные формы // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30. № 2. С. 19–39.
- [2] Vershik A. M. Asymptotic combinatorics and algebraic analysis // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, 1994. V. 2. Basel: Birkhäuser, 1995. P. 1384–1394.
- [3] Lewis J. T. The Free Boson Gas // LMS Sympos. Math. Contemp. Phys. New York: Acad. Press, 1972. P. 209–226.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.

С.-Петербургское отделение
Математического института РАН

Поступила в редакцию
15.09.1996