Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Мушруб, Расширенный центроид кольца косых многочленов, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm824>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 08:17:49

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

РАСШИРЕННЫЙ ЦЕНТРОИД КОЛЬЦА КОСЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. А. МУШРУБ

Если K – кольцо, то через $\mathbf{Q}(K)$ обозначим максимальное левое кольцо частных кольца K , через $\mathcal{Z}(K)$ – центр кольца K , через $\mathbf{C}(K)$ – центр $\mathcal{Z}(\mathbf{Q}(K))$ кольца $\mathbf{Q}(K)$. Всяду далее R – кольцо и F – инъективный эндоморфизм кольца R .

Напомним, что умножение в кольце косых многочленов $R[x, F]$ определяется равенствами $ax^n \cdot bx^m = aF^n(b)x^{m+n}$ ($\forall a, b \in R \forall n, m \geq 0$). Идеал I кольца R называется F -идеалом, если $F^{-1}(I) = I$. Везде далее мы будем предполагать, что кольцо R является F -полупервичным (т.е. $I^2 \neq 0$ для любого ненулевого F -идеала I).

Строение расширенного центроида колец косых многочленов над первичными и F -первичными кольцами было описано в работах [1]–[3]. Предложенный А. В. Михалёвым и К. И. Бейдаром метод ортогональной полноты, изложение которого можно найти в работе [4], позволяет обобщить результаты этих работ на F -полупервичные кольца.

Пусть (A, f) – расширение Кона–Жордана пары (R, F) (см. [5]), $Q = \mathbf{Q}(A)$, $B = \{b \in \mathcal{Z}(Q) : f(b) = b = b^2\}$ и $Q^* = \mathbf{Q}(Q\langle x, f \rangle)$. Тогда кольцо $Q\langle x, f \rangle$ полупервично и Q^* является ортогонально полной алгеброй над булевым кольцом B . Для всякого подмножества M кольца Q^* существует наименьший идемпотент $\mathcal{E}(M) \in B$ такой, что $\mathcal{E}(M)M = M$. Пусть T – ортогональное пополнение кольца $Q\langle x, f \rangle$ в алгебре Q^* над булевым кольцом B (см. [4, определение 1.2.6]), $Z = \mathcal{Z}(T)$ и $Z_* = \{z \in Z : z \text{ обратим в кольце } Z\}$.

ТЕОРЕМА. Если кольцо косых многочленов $R[x, F]$ полупервично, расширенный центроид этого кольца изоморфен кольцу $Z_*^{-1}Z$.

Доказательство теоремы, эскиз которого приведен ниже, основано на методе ортогональной полноты. Заметим сначала, что $\mathbf{C}(R[x, F]) = \mathbf{C}(Q\langle x, f \rangle) = \mathbf{C}(T)$. Пусть $c \in \mathbf{C}(T)$ и I – ортогональное пополнение идеала $(Q\langle x, f \rangle : c)$. Если $e \in B$, то положим число $n(e)$ равным наименьшей длине ненулевого многочлена из множества eI , если множество eI содержит ненулевые многочлены, и положим $n(e) = 0$, если множество eI не содержит ненулевых многочленов.

ЛЕММА. Если $a, b \in Q^*$ и $aQ^*b = 0$, то $\mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Существует плотное ортогональное подмножество E кольца B такое, что каждый идемпотент $e \in E$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $e = \mathcal{E}(QaeQ)$ для некоторого ненулевого элемента $a_e \in Ie$;
- 2) для любого идемпотента $b \in B$ справедлива импликация $0 < b \leq e \implies n(b) = n(e)$;
- 3) $c = \sum_{e \in E}^{\perp} c \cdot e$;
- 4) существуют многочлены $q_e(x), p_e(x) \in \mathcal{Z}(Q\langle x, f \rangle)$ такие, что $\mathcal{E}(q_e(x)) = e$, $\mathcal{E}(p_e(x)) \leq e$, $q_e(x) \cdot QaeQ \subset eI$ и $p_e(x) \cdot r = q_e(x)c \cdot r$ для всех элементов $r \in QaeQ$.

Применим теперь теорему 1.3.11 из [4], которая показывает, что для любого максимального идеала M булева кольца B факторалгебра Q^*/Q^*M будет первичной.

Пусть M — произвольный максимальный идеал кольца B и $\varphi: Q^* \rightarrow Q^*/Q^*M$ — каноническая проекция, и $e \in E$. Докажем, что $\varphi(q_e(x)c) \in \varphi(T)$. Если $e \in M$, то $\varphi(q_e(x)c) = 0 \in \varphi(T)$. Пусть теперь $e \notin M$. Тогда $\varphi(QaeQ) \neq 0$ и $(\varphi(p_e(x)c) - q_e(x))\varphi(QaeQ) = 0$. Так как $\varphi(p_e(x)c - q_e(x)) \in \mathcal{Z}(Q^*/Q^*M)$, то $(\varphi(p_e(x)c) - q_e(x))\varphi(Q^*aeQ^*) = 0$. Поэтому $\varphi(p_e(x)c) = \varphi(q_e(x)) \in \varphi(T)$. Следствие 1.2.11 из [4] показывает, что $p_e c \in T$.

Положим $p = \sum_{e \in E}^{\perp} p_e$. Тогда $pc = \sum_{e \in E}^{\perp} p_e c \in T$ и, следовательно, $c \in p^{-1}Z \subset Z_*^{-1}Z$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mushrub V. // Moscow-Tainan Workshop in Algebra. Tainan, 1994 (to appear).
 [2] Matczuk J. // Math. J. Okayama Univ. 1988. V. 30. P. 13–20. [3] Cisneros E., Ferrero M., Gonzalez M. I. // Math. J. Okayama Univ. 1990. V. 32. P. 61–72. [4] Beidar K. I., Mikhalev A. V. // J. Math. Sci. 1995. V. 73. № 1. P. 1–44. [5] Мушруб В. А. // УМН. 1992. Т. 47. № 6. С. 201–202.

Московский педагогический
 государственный университет
E-mail: Mushrub.algebra@mpgu.msk.su

Принято редколлегией
 18.12.1996