Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, Об одном критерии равномерной ограниченности нормированных собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с положительной весовой функцией на конечном отрезке, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm825>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:44:35

**ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ
НОРМИРОВАННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ
ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ**

Г. А. Айгунов

1. Пусть $0 < m \leq M < \infty$ – фиксированные числа. Обозначим через Q множество всех измеримых на сегменте $[0, 1]$ функций $\rho(x)$, удовлетворяющих условию

$$(1) \quad 0 < m \leq \rho(x) \leq M < \infty.$$

В дальнейшем такие функции будем называть *весовыми* функциями.
Пусть $\rho(x) \in Q$, рассмотрим спектральную задачу

$$(2) \quad -y''(x) = \lambda \rho(x)y(x) \quad (0 < x < 1),$$

$$(3) \quad y(0) = y(1) = 0,$$

$$(4) \quad \int_0^1 \rho(x)y^2(x) dx = 1.$$

Спектр задачи (2)–(4) дискретен, собственные числа λ_k ($k = 1, 2, \dots$) положительны, и каждому собственному числу λ_k соответствует одна собственная функция $y_k(x)$. Для собственных чисел λ_k хорошо известны оценки Р. Куранта ($k = 1, 2, \dots$)

$$(5) \quad \frac{\pi^2 k^2}{M} \leq \lambda_k \leq \frac{\pi^2 k^2}{m}.$$

Цель настоящей работы – получить оценки для собственных функций $y_k(x)$ спектральной задачи (2)–(4) при каждом $k \in \mathbb{N}$ и, в частности, выяснить условие, при котором совокупность всех нормированных собственных функций равномерно ограничена, т.е. выполнено условие

$$(6) \quad \sup_n \max_{0 \leq x \leq 1} |y_n(x)| \leq C_0.$$

Заметим, что при различных предположениях на весовую функцию $\rho(x)$ эта задача изучалась в работах [1]–[7].

2. Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение задачи Коши ($\rho(x) \in Q$)

$$-\varphi''(x) = \lambda \rho(x)\varphi(x) \quad (0 < x \leq 1),$$

$$\varphi(0, \lambda) = 0; \quad \varphi'(0, \lambda) = 1.$$

Если λ_k – собственное число спектральной задачи (2)–(4), то

$$(7) \quad y_k(x) = \left(\int_0^1 \rho(x)\varphi^2(x, \lambda_k) dx \right)^{-1/2} \varphi(x, \lambda_k).$$

Известно, что функция $\varphi(x, \lambda_k)$ на сегменте $[0, 1]$ имеет ровно $k + 1$ нулей

$$0 = z_0 < z_1 < \dots < z_k = 1.$$

Фиксируем число $k \in \mathbb{N}$ и введем обозначения:

$$t_i = \inf \rho(x); \quad T_i = \sup \rho(x); \quad x \in [z_i, z_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$\beta_i = \varphi'(z_i, \lambda_k); \quad h_i(k) = \max |\varphi(x, \lambda_k)|, \quad x \in [z_i, z_{i+1}].$$

Очевидно, что $\beta_i \neq 0$ ($i = 0, 1, \dots, k$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\rho(x) \in Q$, $k \in \mathbb{N}$, тогда для всех $x \in [0, 1]$ справедливы оценки

$$(8) \quad \frac{m^3}{\pi M^2} \max_{0 \leq i \leq k-1} \frac{\beta_i^2}{\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^2} \lambda_k^{1/2} \leq |y_k(x)|^2 \leq \frac{12 M^{3/2}}{\pi m^2} \max_{0 \leq i \leq k-1} \frac{\beta_i^2}{\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^2} \lambda_k^{1/2}.$$

Оценка сверху в формуле (8) была доказана ранее в [5]. Поэтому в доказательстве нуждается только оценка снизу. Это доказательство опирается на лемму [2].

ЛЕММА. Пусть $\rho(x) \in Q$, а λ_k – собственное число спектральной задачи (2)–(4). Тогда для всех номеров $i = 0, 1, \dots, k-1$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{\sqrt{T_i}} \leq \frac{(z_{i+1} - z_i) \sqrt{\lambda_k}}{\pi} \leq \frac{1}{\sqrt{t_i}}; \\ 2) \quad & \frac{1}{\sqrt{T_i \lambda_k}} \leq \left| \frac{h_i(k)}{\beta_i(k)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t_i \lambda_k}}; \\ 3) \quad & \sqrt{\frac{t_i}{T_i}} \leq \left| \frac{\beta_{i+1}(k)}{\beta_i(k)} \right| \leq \sqrt{\frac{T_i}{t_i}}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\rho(x) \in Q$, $k \in \mathbb{N}$, тогда для собственных функций спектральной задачи (2)–(4) справедливы оценки

$$(9) \quad \frac{m^3}{M^{5/2}} \max_{0 \leq i \leq k-1} \frac{\beta_i^2}{\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^2} k \leq y_k^2(x) \leq \frac{12 M^{3/2}}{m^{5/2}} \max_{0 \leq i \leq k-1} \frac{\beta_i^2}{\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^2} k.$$

Справедливость неравенств (9) сразу же следует из неравенств (8) и оценок Р. Куранта (5).

3. Во многих вопросах анализа представляет значительный интерес выяснение условий, при которых собственные функции задачи (2)–(4) ограничены в совокупности, т.е. выполнено неравенство (6).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\rho(x) \in Q$. Для того, чтобы совокупность всех собственных функций $y_k(x)$ спектральной задачи (2)–(4) была равномерно ограничена необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(10) \quad k \left(\max_{0 \leq i \leq k-1} \frac{\beta_i^2}{\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^2} \right) \leq C_0 \quad (C_0 > 0).$$

Доказательство теоремы 2 вытекает из неравенств (9). В частности, если $\rho(x)$ является функцией ограниченной вариации [6], то выполнено условие (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Йо И., Ильин В. А. // Дифференц. уравн. 1979. Т. 15. №7. С. 1164–1174.
 [2] Гехтман М. М., Загиров Ю. М., Якубов В. Я. // Функц. анализ и прил. 1983. Т. 17. №3. С. 71–72. [3] Гехтман М. М. // Матем. сб. 1987. Т. 133 (175). №2. С. 184–199.
 [4] Гехтман М. М. (мл.) // ДАН СССР. 1991. Т. 319. №4. С. 798–800. [5] Гехтман М. М., Загиров Ю. М., Гехтман М. М. (мл.) // Докл. РАН. 1994. Т. 334. №4. С. 258–270.
 [6] Гехтман М. М., Айгунов Г. А. // УМН. 1995. Т. 50. №4. С. 157–158. [7] Айгунов Г. А. // Известия Вузов. Северо-Кавказский Регион. Естеств. науки. 1996. №1. С. 15–17.