Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Алания, О когомологиях с коэффициентами в локальной системе, близкой к тривиальной, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:31:34

О КОГОМОЛОГИЯХ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ, БЛИЗКОЙ К ТРИВИАЛЬНОЙ

Л. А. Алания

В работе [1] С.П.Новиков поставил вопрос об изучении когомологий “деформированных” дифференциалов типа $\tilde{d} = d + t\omega$ в комплексе Де-Рама гладкого многообразия, где t – комплексный параметр, а ω – замкнутая 1-форма. В этой работе была построена спектральная последовательность, которая сходится к когомологиям со значениями в локальной системе $\rho(\gamma) = \exp \int_{\gamma} \omega$, $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$.

Были поставлены вопросы об изучении когомологий для многомерных комплексных представлений и для обычных когомологий со значениями в произвольном алгебраически замкнутом поле.

Второй вопрос был успешно решен А.В.Пажитновым в работе [2] для многообразий со свободно абелевой фундаментальной группой. В нашей работе будет исследован первый из вышеназванных вопросов.

Пусть M^n – гладкое компактное многообразие и Ω – замкнутая матричнозначная 1-форма (матричные элементы Ω – обычные замкнутые 1-формы).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность $\Omega = \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{k-1}$ 1-форм со значениями в ассоциативной алгебре матриц M_k будем называть *специальной системой Масси*, если выполняются следующие соотношения:

$$(*) \quad d\Omega_1 = 0, \quad d\Omega_2 = -\Omega_1^2, \quad \dots, \quad d\Omega_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \Omega_{i-j}\Omega_j \quad \text{при } i = 1, \dots, k-1,$$

умножение форм – внешнее.

Выражение $-\sum_{j=1}^{k-1} \Omega_{k-j}\Omega_j$ обозначим через $\langle \Omega \rangle^k$ и будем говорить, что специальная степень Масси $\langle \Omega \rangle^k = 0$, если существует специальная система Масси $\Omega = \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$. Выражение $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ будем называть *определяющей системой* для $\langle \Omega \rangle^k$, аналогично Крейнсу [3].

Легко заметить, что условие (*) не зависит от выбора представителя в классе когомологии $[\Omega_1] \in H^1(\cdot, M_k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формальная однопараметрическая система матричнозначных 1-форм $\Omega(t) = \Omega_1 t + \Omega_2 t^2 + \dots$ называется *формально плоской*, если $d\Omega(t) + \Omega(t) \wedge \Omega(t) = 0$ как формальный ряд.

ЛЕММА 1. Если $\Omega(t)$ – формально плоская связность, то все специальные степени Масси ее начального члена Ω_1 равны нулю.

ЛЕММА 2. Формально плоскую связность можно проинтегрировать в явном виде, т.е. представить $\Omega(t)$ как $g(t)^{-1} dg$, где $g(t)$ – формальный ряд, определенный на универсальном накрытии многообразия M^n . Более точно, g_i определены на M_i , где $M_0 = M^n \leftarrow M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow \dots$ есть соответствующая центральному ряду группы $\pi_1(M^n)$, $\pi_1 \supset [\pi_1, \pi_1] \supset [\pi_1, [\pi_1, \pi_1]] \supset \dots$, башня абелевых накрытий.

Рассмотрим выражение $g(a \cdot x)g^{-1}(x)$, где $a \cdot x$ – сдвиг точки x универсального накрытия на $a \in \pi_1(M)$, и разложим его в ряд по t . Коэффициенты этого ряда не должны зависеть от x . Обозначим их через $I_1(a), I_2(a), \dots$. Если для функции на группе ввести оператор дифференцирования δ следующим образом: $(\delta I)(a, b) = I(ab) - I(a) - I(b)$, легко проверить, что I_1 задает класс когомологий, а $I_1, I_2, \dots, I_{k-1}$ есть определяющая последовательность для $\langle I_1 \rangle$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01404).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть Ω — замкнутая матричная 1-форма. Будем говорить, что $\langle \Omega \rangle^\infty = 0$, если существует формально плоское семейство с начальным членом Ω , и коэффициенты этого ряда будем называть определяющей системой для $\langle \Omega \rangle^\infty$.

Аналогично можем определить бесконечные степени Масси и соответствующие определяющие последовательности для групповых 1-коциклов со значениями в матричной алгебре.

ЛЕММА 3. Пусть центральный ряд группы $\pi_1 \supset [\pi_1, \pi_1] \supset [\pi_1, [\pi_1, \pi_1]] \supset \dots$ обрывается с некоторого номера k и I_1 — такой коцикл на группе, что $\langle I_1 \rangle^i = 0$ для всех i . Существует определяющая последовательность для $\langle I_1 \rangle^\infty$ такая, что с некоторого номера N все I_k нулевые.

Из этой леммы легко следуют следующие

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если Ω_1 — замкнутая матричная 1-форма на гладком многообразии M^n , $\langle \Omega_1 \rangle^k = 0$ и ряд из леммы 3 для фундаментальной группы стабилизируется, то $\langle \Omega_1 \rangle^\infty = 0$ и, следовательно, существует формально плоское семейство с начальным членом Ω_1 .

Пусть $\Omega(t) = \Omega_1 t + \Omega_2 t^2 + \dots$ есть формально плоское семейство связностей и x — произвольная замкнутая векторная форма. Если существуют формы $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ такие, что $dx_i = \Omega_i \wedge x + \Omega_{i-1} \wedge x_1 + \dots + \Omega_1 \wedge x_{i-1}$ для $i \leq n$, будем писать, что $\Omega_n \wedge x + \Omega_{n-1} \wedge x_1 + \dots + \Omega_1 \wedge x_{n-1} \in \langle x, \Omega \rangle^n$. По $\Omega(t)$, следуя работам [1], [2], определим спектральную последовательность (E_p^*, d_p) следующим образом: $E_1^* = H^*(M^n, V)$, $d_1 = \Omega_1 \wedge \cdot$, $d_p(x) = \langle x, \Omega \rangle^p$. Корректность этого определения легко проверяется.

ТЕОРЕМА. Пусть для многообразия M^n центральный ряд группы $\pi_1(M^n)$ имеет конечную длину k и Ω_1 — такая 1-форма, что $\langle \Omega_1 \rangle^k = 0$. В этих предположениях существует однопараметрическое семейство представлений $g(t): \pi_1(M^n) \rightarrow GL(k)$, и спектральная последовательность, построенная вышеописанным способом по $g^{-1} dg$, сходится к когомологиям многообразия M^n с коэффициентами в локальной системе $g(t)$ для почти всех значений t .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С.П. // Докл. АН. 1986. Т. 287. № 6. С. 1321–1324. [2] Пажитнов А.В. // Докл. АН. 1988. Т. 300. № 6. С. 1316–1320. [3] Kraines D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. № 3. P. 431–449.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
18.12.1996