Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Белов, О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 11:30:22

О РАЦИОНАЛЬНОСТИ РЯДОВ ГИЛЬБЕРТА ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ АЛГЕБР

А. Я. Белов

Введение. Основным результатом данной работы заключается в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА. Пусть A – конечно-порожденная относительно свободная PI-алгебра над бесконечным полем. Тогда H_A – ряд Гильберта алгебры A -рационален.

При доказательстве рациональности рядов Гильберта естественно воспользоваться известным результатом А.Р.Кемера [1] о представимости относительно свободных алгебр над бесконечным полем. Однако существуют примеры представимых алгебр с трансцендентным рядом Гильберта. Необходимо использование специфики относительно свободного случая.

Доказательство основного результата. Пусть A – относительно свободная алгебра, она представима так, что $A \in \text{Var}(A')$, где A' – конечномерная алгебра. Обозначим через $\{A^{(i)}\}$ набор алгебр с меньшей полупростой частью, чем алгебра A' . Точнее, $A^{(i)} = E_i A E_i$, где E_i – пирсовская компонента единицы. Пусть A_0 – прямая сумма простых компонент A_j алгебры A' , которые мы иногда будем называть *клетками*. Итак, $A_0 = \bigoplus_{j=1}^s A_j$; $A = A_0 + R$, $R = R(A)$ – радикал алгебры A . Пусть $F\langle\theta\rangle$ – относительно свободная алгебра, порожденная элементами θ_i . Через $A(d)$ обозначается алгебра, получаемая из A_0 свободным присоединением радикала степени d в многообразии $\text{Var}(A)$. Иными словами, $A(d) = A_0 * F\langle\theta\rangle / (\theta^{(d)} + T(A))$, где $\theta^{(d)}$ обозначает степень идеала, порожденного $\{\theta_i\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) Пусть $f \notin T(A^{(i)})$ для некоторого i . Тогда имеются следствия $g \in T(f)$ и элементы b_i , а также $a_j \in A_j$, $j = 1, \dots, s$ (j пробегает полный набор значений) такие, что $g(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_q) \not\equiv 0 \pmod{T(A)}$.

б) Если E_{lm}^j означает матричную единицу, отвечающую j -й клетке – алгебре A_j , то в качестве a_j можно взять произведения вида

$$Q_j (E_{11}^j E_{11}^j E_{11}^j E_{12}^j E_{21}^j \cdots E_{1m}^j E_{mn}^j E_{n1}^j \cdots)^t T_j$$

(между прокладками E_{1m}^j и E_{n1}^j встречаются всевозможные матричные единицы E_{mn}^j).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если E_{mn}^j заменить на другое $E_{m'n'}^{j'}$, то произведение станет нулевым. Поэтому если выбрать набор из разных сомножителей E_{mn}^j в произведении g и проальтернировать, то результат альтернирования будет равен исходному многочлену g .

Основная идея доказательства рациональности ряда Гильберта состоит в нахождении T -идеала I такого, что H_I рационален. Тогда $H_A = H_I + H_{A/I}$, и мы приходим к доказательству рациональности $H_{A/I}$. Остается воспользоваться свойством обрыва возрастающих цепей для T -идеалов. Кроме того, заметим, что нам достаточно также найти конечный набор T -идеалов с нулевым пересечением. В самом деле: если $I \cap J = 0$, то $H_{A/I} + H_{A/J} = H_A$. В случае нескольких идеалов проходит очевидная индукция.

Итак, мы строим либо T -идеал с рациональным рядом Гильберта, либо конечный набор T -идеалов с нулевым пересечением.

Основные обозначения. Мы следуем работе А.Р. Кемера. Пусть $\text{bl}(A)$ обозначает $\dim(A_0)$, $c(A)$ – индекс нильпотентности $R(A')$, $S_\Lambda(f)$ – результат альтернирования полилинейного тождества f по набору переменных Λ , $b(A)$ – максимальное целое b такое, что для любого числа k наборов Λ_i по b переменных в каждом существует g такое, что $S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_k}(g) \not\equiv 0 \pmod{T(A)}$. Для T -идеала Γ определяется аналогично $b(A, \Gamma)$, только на g накладывается дополнительное условие принадлежности $g \in \Gamma$. Ясно, что $b(A) < \text{bl}(A)$. Положим $d(A) = q + 1$,

q – минимальное целое такое, что существуют многочлен g и q наборов из $b(A) + 1$ переменной в каждом такие, что $S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_q}(g) \not\equiv 0 \pmod{(T(A))}$. Аналогично определяется относительная величина $d(A, \Gamma)$.

Из замечания после предложения 1 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $b(A) < b_1(A)$, то $T(A) = \cap T(A^{(i)})$.

Итак, мы можем считать, что $b(A) = b_1(A)$. В этом случае нетрудно убедиться, что $d(A) < c(A)$. Пусть $f \in \cap_i T(A^{(i)})$ и $f \notin T(A)$. Тогда $b(A) = b(A, f)$ и $d(A, f) < d(A) < c(A)$. Пусть d – максимум таких $d(A, f)$, и пусть $d < c(A)$. В этом случае тем же методом, что и в работе А. Р. Кемера, доказывается следующее редукционное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $b(A) = b_1(A)$, и пусть $d < c(A)$. Тогда $T(A(d))$ и $T(A^{(i)})$ образуют конечный набор T -идеалов с нулевым пересечением.

Редукционные леммы позволяют считать, что $b_1(A) = b(A) = b$, $d(A) = c(A) = c$. Пусть множество Λ_0 состоит из b переменных, множества Λ_i , где $i = 1, \dots, c - 1$, состоят из $b + 1$ переменной, I – T -идеал, порожденный многочленами, кососимметричными по каждому набору переменных из группы Λ_j . В силу сказанного выше, $I \neq 0$. Покажем, что этот T -идеал искомым, т.е. обладает структурой нётерова модуля.

Прежде всего отметим, что в каждом Λ_i , где $i = 1, \dots, c - 1$, должно находиться по одной радикальной компоненте алгебры A' , поэтому в Λ_0 могут подставляться только полупростые части элементов. Остается воспользоваться следующими предложениями:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть A – представимая ассоциативная алгебра, $\hat{A}$ – расширение A следами. Тогда $\hat{A}$ конечномерна над центром.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (Ю. П. Размыслов). Пусть A – алгебра $(n \times n)$ -матриц, $f(\vec{x}, \vec{y})$ – многочлен, кососимметричный по x_i , $i = 1, \dots, n^2$. Тогда $\sum_i f(x_1, \dots, ax_i, \dots, x_{n^2}, \vec{y}) = n \cdot \text{Tr}(A) \cdot f(\vec{x}, \vec{y})$.

Из предложения 5 легко выводиться следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть f кососимметричен по наборам переменных Λ_i , описанным выше, $\{x_m\}$ – набор переменных из Λ_0 , $m = 1, \dots, b$. Тогда $\text{Tr}(A) \cdot f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i f(x_1, \dots, ax_i, \dots, x_b, \vec{y})$.

Здесь след понимается с кратностями, элемент, отвечающий клетке, умножается на ее размер.

Таким образом, для случая характеристики нуль рациональность рядов Гильберта доказана. В случае бесконечного поля положительной характеристики проходят почти те же рассуждения (представимость конечно порожденных относительно свободных алгебр над бесконечным полем доказана А. Р. Кемером в 1990 г.). Единственная дополнительная трудность связана с тем, что размер клетки может делиться на p -характеристику основного поля. В этом случае вместо формулы (*) следует воспользоваться формулой

$$\sum_i f(x_1, \dots, Ax_i B, \dots, x_{n^2}, y) = \text{Tr}(A \otimes B) \cdot f(x, y),$$

в которую множитель n не входит. При этом итоговые “глобальные” следы будут учитываться без кратностей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически мы вывели рациональность рядов Гильберта из представимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кемер А. Р. // Алгебра и логика 1988. Т. 27. № 2. С. 274–294.