Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, Теория возмущений со сходящимися рядами для функциональных интегралов по фейнмановской мере, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm828>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:11:24

**ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СО СХОДЯЩИМИСЯ
РЯДАМИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ
ПО ФЕЙНМАНОВСКОЙ МЕРЕ**

В. В. БЕЛОКУРОВ, Ю. П. СОЛОВЬЕВ, Е. Т. ШАВГУЛИДЗЕ

Заметка посвящена распространению метода вычисления функциональных интегралов с помощью аппроксимации их сходящимися рядами [1]–[3] на функциональные интегралы по фейнмановским мерам вида

$$(1) \quad I(g) = \int_H F(x) e^{-\beta g P(x)} \Phi_{\alpha, A}(dx).$$

Мы будем иметь дело с обобщенными фейнмановскими мерами $\Phi_{\alpha, A}(dx)$ на сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H , преобразование Фурье которых задается формулой

$$\int_H e^{i(x, y)} \Phi_{\alpha, A}(dx) = e^{-\frac{\alpha}{2}(A^{-1}y, y)}, \quad x, y \in H,$$

где $A: H \rightarrow H$ – самосопряженный положительно определенный ядерный оператор и $\alpha \neq 0$ – комплексный параметр такой, что $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$. (Определение интеграла по обобщенным мерам см. в [4].) В выражении (1) через $P(x)$ обозначен непрерывный однородный полином на H степени $2m$, $F(x)$ – непрерывный функционал, удовлетворяющий условию

$$|F(x)| \leq C \exp(\delta \|x\|^2), \quad 0 < \delta < \frac{1}{2} \lambda_1^{-1},$$

где λ_1 – наибольшее собственное значение оператора A . Относительно параметров β и g полагаем $\beta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \beta \geq 0$; $g \in \mathbb{R}$, $g \geq 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть для функционального интеграла (1) по обобщенной фейнмановской мере выполняются сформулированные выше условия. Тогда для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, найдется такое число R_0 ($\sim \ln(1/\varepsilon)$), что при $R > R_0$ интеграл (1) может быть представлен в виде

$$(2) \quad I(g) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(R) g^{k/m} + \omega(g, R),$$

где $|\omega(g, R)| < \varepsilon$ и

$$a_k(R) = \frac{(-1)^k}{2\pi(2k)!} \int_{-R}^{+R} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i\rho r - \beta r^{2m}\} dr \right) \rho^{2k} d\rho \int_H F(x) P(x)^{k/m} \Phi_{\alpha, A}(dx).$$

При любых положительных g ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(R) g^{k/m}$ сходится.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Из работы [4] следует, что $I(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(g)$, где

$$I_n(g) = Z_n^{-1} \int_{H_n} F(x) e^{-\frac{\alpha}{2}(A^{-1}x, x) - \beta g P(x)} dx, \quad Z_n = \int_{H_n} e^{-\frac{\alpha}{2}(A^{-1}x, x)} dx,$$

и H_n – подпространство в H , натянутое на первые n собственных векторов оператора A .

Обозначим через $\tilde{\varphi}(\rho)$ образ Фурье функции $e^{-r^{2m}}$:

$$\tilde{\varphi}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho r} e^{-\beta r^{2m}} dr.$$

Тогда

$$e^{-\beta g P(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{ig^{1/(2m)} \rho Q(x)\} \tilde{\varphi}(\rho) d\rho,$$

где $Q(x) = P^{1/(2m)}(x)$ — однородная функция первого порядка.

Следовательно, интеграл $I_n(g)$ имеет вид

$$I_n(g) = Z_n^{-1}(\alpha) \int_{H_n} F(x) e^{-\frac{\alpha}{2}(A^{-1}x, x)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{ig^{1/(2m)} \rho Q(x)\} \tilde{\varphi}(\rho) d\rho \right) dx.$$

Заметим теперь, что выполняется следующее неравенство

$$|e^{-\frac{\alpha}{2}(A^{-1}x, x)} \exp\{ig^{1/(2m)} \rho Q(x)\} \tilde{\varphi}(\rho)| \leq C e^{-\operatorname{Re} \alpha \frac{1}{2}(A^{-1}x, x)} \exp\{-|\rho|^{1+\frac{1}{2m}}\} |\tilde{\varphi}(\rho)|.$$

В результате получим

$$I_n(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\rho) \left(Z_n^{-1}(\alpha) \int_{H_n} F(x) e^{-\frac{\alpha}{2}(A^{-1}x, x)} \exp\{ig^{\frac{1}{2m}} \rho Q(x)\} dx \right) d\rho.$$

С помощью замен переменных интегрирования в интеграле $I_n(g)$ функциональный интеграл $I(g)$ приводится к интегралу по гауссовской мере, для которого утверждение теоремы доказано в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. // ТМФ. 1996. Т. 109. № 1. С. 51–59. [2] Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. // ТМФ. 1996. Т. 109. № 1. С. 60–69. [3] Belokurov V. V., Solovyov Yu. P., Shavgulidze E. T. // Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. № 39. P. 3033–3041. [4] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: belokur@rector.msu.su; solo@difgeo.math.msu.su; shav@nw.math.msu.su

Принято редколлегией
07.06.1996