Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Богуславская, Точное решение одной задачи оптимального управления инвестициями в диффузионной модели, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 05:41:53

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ

Е. В. БОГУСЛАВСКАЯ

В работе [1] Р. С. Пиндик (R.S. Pindyck) рассматривал модель инвестиций в долгосрочные проекты, предполагая, что капитал X_t , необходимый на данный момент для завершения проекта, подчиняется уравнению

$$(1) \quad dX_t = -I_t dt + \beta(I_t X_t)^{1/2} dW_t,$$

где $W = (W_t)_{t \geq 0}$ – стандартный винеровский процесс, $\beta = \text{const}$ – некоторый параметр, I_t – управляющий параметр (плотность потока инвестиций), $\{I_t : 0 \leq I_t \leq I^* = \text{const}\}$ – множество допустимых управлений.

В качестве критерия оптимальности инвестирования рассматривается функция выгоды

$$(2) \quad F(x) = \sup \mathbb{E}_x \left\{ \int_0^\tau (-I_t) e^{-rt} dt + V e^{-r\tau} \right\},$$

где $\mathbb{E}_x$ – математическое ожидание, отвечающее тому, что $X_0 = x$, и $\sup$ берется по всем допустимым управлениям I_t ; $\tau = \inf\{t : X_t = 0\}$; $r = \text{const}$ – процентная ставка; $V = \text{const}$ – стоимость проекта после его завершения.

Для отыскания функции выгоды $F(x)$ и оптимального управления $\tilde{I}_t$ Пиндик использовал численные методы. В настоящей работе получено точное решение.

ТЕОРЕМА. В описанной модели при $\beta \neq 0$ функция выгоды $F = F(x)$ (см. (2)) определяется формулой

$$(3) \quad F(x) = \begin{cases} c_1 x^{\nu/2} I_\nu(2\sqrt{bx}) + c_2 x^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{bx}) + c_3, & x < x^*, \\ 0, & x \geq x^*, \end{cases}$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно, x^* – наименьший положительный корень уравнения

$$c_2 x^{\nu/2} \frac{K_{\nu-1}(2\sqrt{bx})}{I_{\nu-1}(2\sqrt{bx})} I_\nu(2\sqrt{bx}) + c_2 x^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{bx}) + c_3 = 0,$$

ν, b, c_1, c_2 и c_3 – константы, задаваемые формулами

$$\begin{aligned} \nu &= 1 + \frac{2}{\beta^2}, & b &= 2r/(\beta^2 I^*), & c_3 &= -I^*/r, \\ c_2 &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sin(\nu\pi) \Gamma(1-\nu) b^{\nu/2} (V - (1-\nu)/b), & \text{если } \nu \text{ не целое,} \\ \frac{2}{(n-1)!} b^{n/2} (V - (1-\nu)/b), & \text{если } \nu = n \in \mathbb{N}, \end{cases} \\ c_1 &= c_2 \frac{K_{\nu-1}(2\sqrt{bx^*})}{I_{\nu-1}(2\sqrt{bx^*})}. \end{aligned}$$

Оптимальное управление задается формулой

$$(4) \quad \tilde{I}_t = \begin{cases} I^*, & X_t < x^*, \\ 0, & X_t \geq x^*. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы введем функцию

$$(5) \quad F(x, I) = \mathbb{E}_x \left\{ \int_0^\tau (-I_t) e^{-rt} dt + V e^{-r\tau} \right\}.$$

Согласно стандартной технике стохастического оптимального управления для доказательства достаточно установить следующие проверочные свойства (см., например, [2], [3]):

(А) Функция $F = F(x)$, определенная в (3), такова, что для любого допустимого управления $I = I(x)$

$$F(x, I) \leq F(x), \quad x \geq 0.$$

(В) Управление $\tilde{I} = \tilde{I}(x)$, определенное в (4), таково, что

$$F(x, \tilde{I}) = F(x), \quad x \geq 0.$$

Введем операторы $L(I)$, $0 \leq I \leq I^*$, действующие на функции $\Psi = \Psi(x)$, $x \geq 0$, из класса $C^2(0, \infty)$ по формуле

$$L(I)\Psi = I \frac{d\Psi}{dX} - \frac{1}{2}IX \frac{d^2\Psi}{dX^2} + r\Psi.$$

Для доказательства (А) заметим, что функция выгоды $F(x) \in C^2(0, \infty)$ ограничена и удовлетворяет неравенству Беллмана.

Применив к $(e^{-rt}F(X_t))_{t \geq 0}$ формулу Ито и взяв математическое ожидание, получаем, учитывая неравенство Беллмана, что $F(x) \geq F(x, I)$, т.е. выполнено проверочное свойство (А).

Из вида оптимальной стратегии управления очевидно, что свойство (В) выполнено при $x \geq x^*$. Поэтому будем предполагать, что $x \leq x^*$. Тогда $\tilde{I}(X_t) = I^*$. Действуя аналогично предыдущему случаю и учитывая уравнение Беллмана для $F(x)$, получаем, что $F(x, \tilde{I}) = F(x)$.

Для завершения доказательства теоремы докажем существование x^* .

Введем функцию

$$F_1(x) = c_2 x^{\nu/2} \frac{K_{\nu-1}(2\sqrt{bx})}{I_{\nu-1}(2\sqrt{bx})} I_{\nu}(2\sqrt{bx}) + c_2 x^{\nu/2} K_{\nu}(2\sqrt{bx}) + c_3$$

с коэффициентами из формулировки теоремы.

Воспользовавшись асимптотическим представлением модифицированных функций Бесселя, получим, что $F_1(+0) > 0$ и $F_1(+\infty) < 0$. Но $F_1(x)$ — непрерывная функция, следовательно, существует такое положительное x^* , что $F_1(x^*) = 0$. Это завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pindyck R. S. // J. Financial Economics. 1993. V. 34. P. 53–76. [2] Жанблан-Пике М., Ширяев А. Н. // УМН. 1995. Т. 50. № 2 (302). С. 25–46. [3] Крамков Д. О., Мордечки Э. // Теория вероятн. и ее примен. 1994. Т. 39. № 1. С. 201–211.