Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Оревков, Новая аффинная M -секстика. II, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 243–244

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm83>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 09:22:10

НОВАЯ АФФИННАЯ М-СЕКСТИКА. II

С. Ю. ОРЕВКОВ

Аффинная вещественная алгебраическая кривая называется *аффинной М-кривой* если она имеет максимально возможное разрешенное неравенством Харнака число компонент связности, в частности, аффинная М-секстика имеет 16 компонент связности, 10 из которых являются овалами, и остальные 6 получены из 11-го овала проективизации выкидыванием бесконечно удаленных точек. В настоящей заметке мы продолжаем изотопическую классификацию аффинных М-секстик, начатую в [1]–[5], и приводим подробности реализации изотопического типа $A_3(0, 5, 5)$ (см. рис. 1, где L – бесконечно удаленная прямая). Он был ошибочно объявлен запрещенным в [3]. Результат и идея доказательства были анонсированы в [5, §2].

Рис. 1

Рис. 2

Построение похоже на реализацию $B_2(1, 8, 1)$, приведенную в [4]. Однако, мы здесь используем геометрические рассуждения, позволяющие сократить вычисления. Такими же рассуждениями можно упростить доказательство в [4].

Построим плоскую рациональную секстику C с особенностями E_6, A_8, A_2, A_1, A_1 , такую, что прямая, проходящая через E_6 и A_2 (обозначим ее через L), касается C в A_2 . Выберем координаты $(x : y : z)$ как на рис. 2 и рассмотрим параметризацию $t \mapsto (x : y : z)$ кривой C , такую что $0 \mapsto A_8, 1 \mapsto A_2, \infty \mapsto E_6$. Тогда

$$(1) \quad x(t) = t^2(bt^2 + ct + 1)(t - 1)^2, \quad y(t) = t^2(at + 1), \quad z(t) = (t - 1)^3.$$

Особенности E_6 и A_2 обеспечены (1). Условие на A_8 имеет вид

$$(2) \quad \exists \gamma_2, \gamma_3 \text{ такие, что } \text{ord}_{t=0}(vz^2 - \gamma_2u^2z - \gamma_3u^3) = 8,$$

где $u = x + y, v = x - y$. Раскладывая $vz^2 - \gamma_2u^2z - \gamma_3u^3$ в виде $e_3t^3 + e_4t^4 + \dots$ где e_j – полиномиальные выражения от переменных $a, b, c, \gamma_2, \gamma_3$, мы видим, что (2) дает систему уравнений и неравенств $e_3 = \dots = e_7 = 0, e_8 \neq 0$. Эта система имеет 4 решения, два из которых вещественны. Мы выберем решение $a = \alpha, b = -(6\alpha^2 + 11\alpha + 3)/11, c = \alpha + 2, \gamma_2 = (6\alpha^2 + 33\alpha + 36)/44, \gamma_3 = -(111\alpha^2 + 374\alpha + 347)/968$, где $\alpha = -5.1046\dots$ – единственный вещественный корень уравнения

$$(3) \quad 3\alpha^3 + 24\alpha^2 + 51\alpha + 34 = 0.$$

ЛЕММА. C расположена относительно координатных осей как на рис. 2.

СЛЕДСТВИЕ. (см. Лемму в [6].) C можно сгладить так, как изображено на рис. 1.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ-96-01-01218 и DGI-CYT SAB95-0502.

Лемму можно доказать методом работы [4], но это требует компьютерных вычислений. Здесь мы даем геометрическое доказательство, в котором все можно проверить вручную. Корни (с учетом кратностей) многочленов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ таковы:

$$\begin{array}{l} x(t) : -0.53 \dots 0 \quad 0 \quad 0.20 \dots 1 \quad 1 \\ y(t) : \quad 0 \quad 0 \quad 1.19 \dots \quad \infty \quad \infty \quad \infty \\ z(t) : \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \quad \infty \quad \infty \quad \infty \end{array}$$

Значит, C пересекает координатные оси в порядке, показанном на рис. 2. Поскольку $\gamma_2 \approx 0.543 > 0$, ветвь кривой C в A_8 расположена относительно касательной $x = y$ как на рис. 2. Из формулы рода следует, что у C есть еще две точки A_1 . Они вещественны, так как иначе мы получили бы противоречие с правилом чередования ориентаций [7] на отрезке пучка прямых $[L_1 L_2]$ (см. рис. 2). Покажем, что каждая из точек A_1 дает при надлежащем сглаживании пустой овал (овал называется пустым, если внутри него нет других овалов). Координатные оси делят C_0 на 6 дуг. Три из них не могут пересекать остальные, так как они разделены координатными осями. Мы имеем $y(t) - \alpha z(t) = (3\alpha + 1)t^2 - 3\alpha t + \alpha$. Дискриминант равен $-3\alpha^2 - 4\alpha \approx -57.7 < 0$, значит, касательная $y = \alpha z$ в точке E_6 разделяет все остальные пары дуг кроме тех двух дуг, которые выходят из A_8 . Если они пересекались бы в двух точках, то существовало бы M -сглаживание с 6 внутренними овалами, что невозможно. Если же они пересекались бы в одной точке, то три внутренних овала были бы отрицательными, что противоречит формуле Рохлина для комплексных ориентаций [8]. Таким образом, каждая из точек A_1 является либо уединенной точкой, либо точкой самопересечения одной из дуг. В любом случае есть сглаживание, дающее пустой овал. Как мы показали выше, одна из точек A_1 должна быть между L_1 и L_2 . Обозначим через V_2 овал, полученный ее сглаживанием. Те же рассуждения применительно к отрезку $-\infty < \lambda < 0$ пучка прямых $y = \lambda x$ (возмущения прямых $x = 0$ и $y = 0$, а также некоторые комплексные ориентации изображены на рис. 1) показывают, что другая точка A_1 (обозначим соответствующий овал через V_1) должна лежать в полуплоскости $H = \{xy > 0\}$. Предположим, что овал V_1 — внутренний. Тогда он не может лежать в левом секторе множества H (по теореме Безу), но если он лежал бы в правом секторе, то он был бы ориентирован по часовой стрелке, что опять противоречит правилу чередования ориентаций.

Таким образом, овал V_1 — внешний, значит, V_2 — внутренний, так как число внутренних овалов M -секстики не может равняться 4. Из формулы комплексных ориентаций следует, что V_2 ориентирован по часовой стрелке, значит, по правилу чередования ориентаций, V_2 лежит в левом нижнем секторе множества $\mathbf{RP}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$. Из комплексных ориентаций видно (см. рис. 1), что обе точки A_1 — уединенные. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [6] приведено доказательство существования независимого сглаживания особенностей только в случае неприводимой проективной кривой. Однако, аналогичный результат для приводимых кривых доказывается точно также (см. замечание в конце [6]). Наше построение можно свести к неприводимому случаю. Для этого достаточно явно выписать деформацию кривой C , положив $z(t) = (t - 1)^3(1 - \varepsilon t)$ в (1) и сохранив условие (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Полотовский Г. М. $(M - 2)$ -кривые 8-го порядка: построения, открытые вопросы // Депонировано в ВИНТИ, № 1185-85Деп 1984. С. 1–195. [2] Корчагин А. Б., Шустин Е. И. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 6. С. 1181–1199. [3] Шустин Е. И. // Методы качественной теории и теории бифуркаций. Горький: Изд-во ГГУ, 1988. С. 97–105. [4] Ореков С. Ю. // Функц. анализ и его прилож. 1998. Т. 32. № 2. С. 91–94. [5] Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. (to appear). [6] Шустин Е. И. // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 2. С. 180–186. [7] Фидлер Т. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. С. 853–863. [8] Рохлин В. А. // Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 4. С. 71–75.