Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Вайнтроб, Алгеброиды Ли и гомологические векторные поля, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm831>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:16:56

АЛГЕБРОИДЫ ЛИ И ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

А. Ю. ВАЙНТРОБ

Понятие алгеброида Ли, введенное Дж. Прадине, является аналогом алгебры группы Ли для дифференцируемых группоидов. Алгеброиды Ли сочетают в себе свойства алгебр Ли и многообразий и находят применение в дифференциальной геометрии, симплектической геометрии и теории представлений (см. [1]–[3]). Цель этой заметки – продемонстрировать, что теория алгеброидов Ли является частным случаем теории гомологических векторных полей на супермногообразиях [4], [5], и указать на возможные применения такого подхода.

1. Определения. Векторное расслоение $A \rightarrow M$ со скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$ на пространстве сечений $\Gamma(A)$ и гомоморфизмом расслоений $a: A \rightarrow TM$, называемым *якорем*, называется *алгеброидом Ли*, если a – гомоморфизм алгебр Ли и $[x, fy] = (a(x)f)y + f \cdot [x, y]$ для $x, y \in A$, $f \in C^\infty(M)$.

Стандартные примеры алгеброидов Ли – это расслоения алгебр Ли ($a = 0$), касательное расслоение многообразия и кокасательное расслоение пуассонова многообразия.

Нечетное векторное поле V на супермногообразии называется *гомологическим векторным полем*, если $[V, V] = 2V^2 = 0$. Многие объекты из различных областей математики можно описывать и изучать в терминах гомологических полей (см. [4], [5]).

2. ТЕОРЕМА. Обозначим через $\mathcal{M} = (M, \Lambda^\bullet A^*)$ и $\mathcal{M}' = (M, \Lambda^\bullet A)$ два супермногообразия, ассоциированных с расслоением $A \rightarrow M$. Следующие три класса объектов находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии:

- (i) структуры алгеброида Ли на $A \rightarrow M$;
- (ii) гомологические векторные поля степени 1 на $\mathcal{M}$;
- (iii) нечетные линейные пуассоновы структуры на $\mathcal{M}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В локальной системе координат (x, ξ) на $\mathcal{M}$ (где (x^α) – координаты на M , а (ξ^i) – локальный базис сечений A^*) любое векторное поле степени 1 имеет вид $V = \sum c_{ij}^k \xi^i \xi^j \partial_{\xi^k} + \sum a_i^\alpha \xi^i \partial_{x^\alpha}$, где c и a – функции, зависящие от x^α . Обозначим через (ε_i) локальный базис сечений A , дуальный к (ξ^i) . Положим $a: A \rightarrow TM: a(X) = \sum f^i a_i^\alpha \partial_{x^\alpha}$ и $[X, Y] = \sum f^i g^j c_{ij}^k \varepsilon_k + \sum a(X)(g^j) \varepsilon_j - \sum a(Y)(f^i) \varepsilon_i$, где $X = \sum f^i(x) \varepsilon_i$ и $Y = \sum g^i(x) \varepsilon_i \in \Gamma(A)$. Обратно, по скобке $[\cdot, \cdot]$ и отображению $a: A \rightarrow TM$ мы можем найти функции c_{ij}^k и a_i^α и определить векторное поле V . Непосредственно проверяется, что пара $([\cdot, \cdot], a)$ задает структуру алгеброида Ли тогда и только тогда, когда V – гомологическое векторное поле.

Каноническое спаривание между A и A^* преобразует ξ^i в ∂_{ε_i} , ∂_{ξ^i} в ε_i , и V превращается в нечетное бивекторное поле $\pi = \sum c_{ij}^k \varepsilon_k \partial_{\varepsilon_i} \wedge \partial_{\varepsilon_j} + \sum a_i^\alpha \partial_{\varepsilon_i} \wedge \partial_{x^\alpha}$ на $\mathcal{M}'$. Из гомологической интерпретации пуассоновых структур [4] следует, что π задает пуассонову структуру на $\mathcal{M}'$ тогда и только тогда, когда V – гомологическое поле. Это можно также проверить непосредственным вычислением. Скобка, задаваемая π , является нечетным вариантом линейной пуассоновой структуры на A^* , введенной Курантом [6].

3. Морфизмы. Ясно, что следует называть морфизмом алгеброидов Ли над одной базой M , в то время как общее определение, данное Аламейдой и Кумперой [7] (см. также [8]), нетривиально. Применять это определение трудно, и даже то, что композиция двух морфизмов является морфизмом, не очевидно. При переходе на язык гомологических векторных полей ситуация полностью меняется. Напомним, что морфизм двух векторных полей V на P и W на Q это отображение $h: P \rightarrow Q$ такое, что $h_*(V_p) = W_{h(p)}$ для любого $p \in P$.

ТЕОРЕМА. Пусть V и W – гомологические векторные поля на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, соответствующие алгеброидам Ли $A \rightarrow M$ и $B \rightarrow N$. Морфизм расслоений $\varphi: A \rightarrow B$, $f: M \rightarrow N$ является морфизмом алгеброидов Ли тогда и только тогда, когда индуцированное отображение супермногообразий $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ является морфизмом гомологических полей V и W .

4. Модули над алгеброидами Ли. Напомним, что модуль над гомологическим векторным полем V на супермногообразии P – это расслоение $E \rightarrow P$ с плоской V -связностью ∇ (т.е. линейным отображением $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ таким, что $\nabla(fe) = V(f)e + (-1)^{|f|} f \cdot \nabla e$ и $\nabla^2 = 0$). Это приводит к следующему определению. *Модуль над алгеброидом Ли* $A \rightarrow M$ – это однородное расслоение E над $\mathcal{M}$ (т.е. $\mathbb{Z}$ -градуированный $C^\infty(\mathcal{M})$ -модуль) с плоской V -связностью ∇ степени 1. Пространство гомологий $H^\bullet(A; E) := H(\nabla) = \text{Ker}(\nabla) / \text{Im}(\nabla)$ называется *когомологиями A с коэффициентами в E* .

Представления алгеброида $A \rightarrow M$ в смысле Макензи [1] соответствуют специальному типу модулей, у которых $E = \pi^* F$, где F – расслоение над M , а $\pi: \mathcal{M} \rightarrow M$ – каноническая проекция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Расслоение $F \rightarrow M$ с линейным отображением $t: \Gamma(A) \otimes \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F)$ является представлением алгеброида Ли $A \rightarrow M$ тогда и только тогда, когда индуцированное отображение $t^*: \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F) \otimes \Gamma(A^*)$, продолженное до V -связности ∇ на $E = \pi^* F \rightarrow \mathcal{M}$, является A -модулем (т.е. $\nabla^2 = 0$).*

5. Пример: тензорные модули. Для гомологического векторного поля V на $\mathcal{M}$ пространство тензоров на $\mathcal{M}$ определенного типа является V -модулем с $\nabla = L_V$, производная Ли. В частности, если V – гомологическое векторное поле, соответствующее алгеброиду Ли $A \rightarrow M$, мы получаем *тензорные A -модули*. За исключением тривиального случая, когда $a = 0$ (т.е. когда A – это расслоение алгебр Ли), произвольный тензорный модуль не является представлением в смысле [1]. Тем не менее, к этому типу относятся такие важные модули, как присоединенный $Ad = T\mathcal{M}$, коприсоединенный $Ad^* = \Omega^1 \mathcal{M}$ и дуализирующий $\text{Ber} = \text{Vol}(\mathcal{M})$. Если $\mathcal{M}$ компактно, интегрирование задает невырожденное спаривание между $\text{Vol}(\mathcal{M})$ и $C^\infty(\mathcal{M})$, совместимое с $\mathbb{Z}$ -градуировкой. Оно индуцирует каноническую двойственность между $H^\bullet(A)$ и $H^\bullet(A; \text{Ber})$, обобщающую как классическую двойственность Пуанкаре, так и ее аналог для алгебр Ли.

6. Деформации. Как и в случае алгебр Ли, когомологии алгеброида Ли с коэффициентами в присоединенном модуле возникают при изучении деформаций. Результаты о деформациях гомологических векторных полей [5] дают следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Пусть $Ad = T\mathcal{M}$ есть присоединенный модуль алгеброида Ли $A \rightarrow M$. Тогда*

- (i) *алгебра Ли группы автоморфизмов A изоморфна $H^0(A, Ad)$;*
- (ii) *пространство инфинитезимальных деформаций A изоморфно $H^1(A, Ad)$;*
- (iii) *препятствия к продолжению деформаций принадлежат $H^2(A, Ad)$;*
- (iv) *если $\dim H^1(A, Ad) = d < \infty$ и $H^2(A, Ad) = 0$, то у алгеброида A существует версальная деформация с гладкой базой размерности d .*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mackenzie K. Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry // London Math. Soc. Lect. Note Ser. V. 124. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. [2] Coste A., Dazord P., Weinstein A. // Publ. Dép. Math. Univ. Claude-Bernard, Lyon. Nouvelle Sér. A. 1987. V. 2. P. 1–62. [3] Beilinson A., Bernstein J. // Advances in Soviet Math. 1993. V. 16. № 1. P. 1–50. [4] Vaintrob A. On homological vector fields: Preprint. [5] Vaintrob A. Normal forms of homological vector fields // J. Math. Sciences. (to appear). [6] Courant T. // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 319. P. 631–661. [7] Alameida R., Kumpera A. // Ann. Acad. Brasil. Ciênc. 1981. V. 53. P. 247–250. [8] Higgins Ph., Mackenzie K. // J. Algebra. 1990. V. 129. P. 194–230.