Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Б. Воробец, Асимптотика спектра оператора Лапласа–Бельтрами на торах с лиувиллевыми и инфралиувиллевыми метриками, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm832>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:10:30

**АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА
ЛАПЛАСА–БЕЛЬТРАМИ НА ТОРАХ С ЛИУВИЛЛЕВЫМИ
И ИНФРАЛИУВИЛЛЕВЫМИ МЕТРИКАМИ**

Я. Б. ВОРОБЕЦ

Рассмотрим двумерный тор $T_{a,b} = \mathbb{R}^2 / (a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z})$ ($a, b > 0$), с естественными циклическими координатами x_1, x_2 . Риманова метрика на торе $T_{a,b}$ вида

$$(1) \quad ds^2 = (U_1(x_1) - U_2(x_2))(dx_1^2 + dx_2^2)$$

называется *метрикой Лиувилля*. Здесь U_1, U_2 – непрерывные периодические функции на $\mathbb{R}$ с периодами a и b , соответственно, причем $\min_{x \in \mathbb{R}} U_1(x) > \max_{x \in \mathbb{R}} U_2(x)$. Частным случаем таких метрик являются метрики вращения на торе. Они получаются из формулы (1) при $U_2 \equiv 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Лиувиллева метрика* на двумерном торе – это риманова метрика, которая в каких-либо циклических координатах x_1, x_2 на торе представима в виде (1).

Пусть лиувиллева метрика вида (1) на торе $T_{a,b}$ инвариантна относительно некоторой конечной группы G сдвигов тора. Тогда она факторизуется до римановой метрики на торе $T_{a,b}/G$. Фактор-метрика локально представима в виде (1). Если группа G не разлагается в прямую сумму двух подгрупп G_1 и G_2 , где G_1 содержит сдвиги только вдоль x_1 , а G_2 – сдвиги только вдоль x_2 , то глобального представления вида (1), вообще говоря, нет, т.е. метрика не лиувиллева. А. М. Стёпин предложил называть такие метрики *инфралиувиллевыми*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Риманова метрика на торе называется *инфралиувиллевой*, если она не лиувиллева, но конечнолистно накрывается лиувиллевой метрикой.

В настоящей работе рассматривается оператор Лапласа–Бельтрами на торах с лиувиллевыми и инфралиувиллевыми метриками. В *лиувиллевых координатах* (т.е. координатах, в которых метрика имеет вид (1)) он задается формулой

$$\Delta = (U_1(x_1) - U_2(x_2))^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

Оператор Δ является самосопряженным неположительным оператором с дискретным спектром в гильбертовом пространстве $L_2(T, \mu)$, где T – рассматриваемый тор, μ – элемент площади соответствующей метрики.

Оператор Лапласа–Бельтрами можно рассматривать как квантовый гамильтониан, соответствующий классическому гамильтониану геодезического потока на T . Геодезический поток имеет дополнительный интеграл, квадратичный по импульсам (согласно [1], [2], только рассматриваемые метрики обладают таким свойством). Это находит свое отражение в том, что спектральная задача для оператора Δ в случае лиувиллевой метрики оказывается задачей с разделяющимися переменными (а именно, переменные разделяются в лиувиллевых координатах). В случае инфралиувиллевой метрики переменные не разделяются, однако наличие лиувиллевого накрытия позволяет свести спектральную задачу к задаче (точнее, к нескольким независимым задачам) с разделяющимися переменными.

Для произвольного $x > 0$ обозначим через $N(x)$ число собственных значений (с учетом кратности) оператора $-\Delta$, не превосходящих x . Согласно формуле Вейля, $N(x) = \frac{\text{Area } T}{4\pi} x + o(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Теорема 1, приводимая ниже, дает для типичной лиувиллевой или инфралиувиллевой метрики более точную оценку остаточного члена в этой асимптотической формуле. Чтобы придать строгий смысл понятию типичности, введем пространства лиувиллевых и инфралиувиллевых метрик. Через $\mathcal{L}^r(a, b)$ обозначим множество метрик вида (1) на торе $T_{a,b}$, для которых функции U_1 и U_2 непрерывно дифференцируемы r раз ($0 \leq r \leq \infty$). Иными словами,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00713).

это пространство лиувиллевых метрик гладкости C^r на торе, имеющих фиксированные лиувиллевы координаты. Каждая метрика из $\mathcal{L}^r(a, b)$ задается парой функций $U_1, U_2 \in C^r(\mathbb{R})$, что позволяет перенести на метрики топологию из $C^r(\mathbb{R}) \times C^r(\mathbb{R})$. Далее, пусть G – произвольная конечная группа сдвигов тора $T_{a,b}$, которая не разлагается в прямую сумму групп, содержащих сдвиги только вдоль одной координаты. Через $\mathcal{L}_{\text{infra}}^r(a, b; G)$ обозначим пространство метрик на торе $T_{a,b}/G$, которые являются проекциями метрик из $\mathcal{L}^r(a, b)$, с топологией, унаследованной от $\mathcal{L}^r(a, b)$. Это пространство инфралиувиллевых метрик гладкости C^r на торе, для которых фиксируется лиувиллево накрытие, к тому же на накрывающем торе зафиксированы лиувиллевы координаты. Заметим, что пространство $\mathcal{L}_{\text{infra}}^r(a, b; G)$ содержит и лиувиллевы метрики, однако последние нигде не плотны в нем.

ТЕОРЕМА 1. При $r \geq 5$ в пространствах $\mathcal{L}^r(a, b)$ и $\mathcal{L}_{\text{infra}}^r(a, b; G)$ найдутся остаточные подмножества, для метрик из которых спектральная функция оператора Лапласа–Бельтрами имеет вид

$$N(x) = \frac{\text{Area } T}{4\pi} x + x^{1/4} \theta(x^{1/2}),$$

где θ – почти-периодическая по Безиковичу функция из пространства $B^1[0, \infty)$.

Отметим, что, ввиду почти-периодичности, функция θ является ограниченной “в среднем”. В то же время для некоторых значений аргумента она может принимать (и в типичных случаях принимает) сколь угодно большие по модулю значения, как положительные, так и отрицательные. Теорема 1 ничего не утверждает о порядке таких “больших отклонений”.

Теорема 1 обобщает аналогичное утверждение Д. В. Косыгина, А. А. Минасова и Я. Г. Синай [3], доказанное ими для одного специального класса лиувиллевых метрик, а именно, метрик из пространства $\mathcal{L}^r(1, 1)$, для которых соответствующие функции U_1, U_2 имеют на периоде всего две невырожденные критические точки – один максимум и один минимум.

Основные отличия в доказательстве теоремы 1 по сравнению с [3] относятся к выводу асимптотических формул для собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами (правил квантования). Остановимся на этом чуть подробнее. После разделения переменных мы от двумерной спектральной задачи переходим к некоторому числу одномерных задач на собственные значения, каждая из которых приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \psi''(x) + L^2(U(x) - c)\psi(x) &= 0, \quad x \in [0, a], \\ \psi(a) &= e^{2\pi i \alpha} \psi(0), \quad \psi'(a) = e^{2\pi i \alpha} \psi'(0), \quad 0 \leq \alpha < 1. \end{aligned}$$

Это индефинитная задача Штурма–Лиувилля, к тому же зависящая от параметра c , принадлежащего некоторому конечному промежутку I . Пусть $L_0(c), L_1(c), \dots$ – собственные значения задачи при фиксированном значении c , а $\tilde{L}_0(c), \tilde{L}_1(c), \dots$ – ВКБ-спектр задачи, т.е. приближенные собственные значения, полученные с помощью ВКБ-приближения.

ТЕОРЕМА 2. 1) $|L_n(c) - \tilde{L}_n(c)| \leq \text{Const}_1$, 2) $|L_n(c) - \tilde{L}_n(c)| \leq \frac{\text{Const}_2}{d^\delta \tilde{L}_n(c)}$. Здесь d – расстояние от c до ближайшего критического уровня функции U , $\delta = 7/4$. Постоянные Const_1 и Const_2 не зависят от параметра $c \in I$.

Автор благодарен А. М. Стёпину за постановку задачи и многочисленные обсуждения. Автор благодарен Р. О. Гриниву за консультации в области спектральной теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колокольцов В. Н. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 994–1010.
- [2] Бабенко И. К., Нехорошев Н. Н. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 643–652.
- [3] Косыгин Д. В., Минасов А. А., Синай Я. Г. // УМН. 1993. Т. 48. № 4. С. 3–130.