Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Зиглин, Об отсутствии дополнительного первого интеграла в частном случае задачи Г. К. Сулова, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm834>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:30:41

ОБ ОТСУТСТВИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ Г. К. СУСЛОВА

С. Л. Зиглин

Рассматривается задача Г. К. Суслова [1] о движении твердого тела около неподвижной точки с неголономной связью – проекция угловой скорости на направление, неподвижное в системе координат, связанной с вращающимся телом, равна нулю. Предположим [2], что указанное направление является направлением одной из главных осей инерции в точке подвеса, и тело находится в однородном поле тяжести. Тогда движение описывается системой

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{M}_1 &= \mu(\gamma_2 Z - \gamma_3 Y), & \dot{M}_2 &= \mu(\gamma_3 X - \gamma_1 Z), \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3 M_2 / I_2, & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 M_1 / I_1, & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 M_2 / I_2 - \gamma_2 M_1 / I_1. \end{aligned}$$

Здесь M_1, M_2 – проекции кинетического момента на главные оси инерции в точке подвеса, ортогональные указанной и составляющие с ней правую тройку; I_1, I_2 – соответствующие им моменты инерции; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ и $\mathbf{I} = (X, Y, Z)$ – единичный вертикальный вектор, направленный против силы тяжести, и единичный вектор, направленный из точки подвеса к центру тяжести, в проекциях на указанные оси инерции; μ – параметр Пуанкаре – произведение веса на расстояние от центра тяжести до точки подвеса.

Система (1) бездивергентна и имеет функционально независимые первые интегралы $E = M_1^2 / 2I_1 + M_2^2 / 2I_2 + \mu \langle \gamma, \mathbf{I} \rangle$ (энергии) и $C = \gamma^2$ (геометрический). Согласно теореме Якоби о последнем множителе (см., например, [3]), для ее интегрирования в квадратурах достаточно наличия еще одного (функционально независимого от указанных) первого интеграла. До сих пор такой первый интеграл известен только в трех случаях: Г. К. Суслова [1]: $\mu = 0$ – аналоге случая Эйлера движения твердого тела около неподвижной точки без дополнительных связей; Е. И. Харламовой-Забелиной [4]: $Z = 0$ и $I_1 = I_2$, $X = Y = 0$ [2] – аналоге случая Лагранжа движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки без дополнительных связей.

В [2] было высказано предположение, что при $\mu \neq 0$, $X = Y = 0$ система (1) имеет дополнительный аналитический первый интеграл только в случае $I_1 = I_2$. Основным результатом настоящей работы составляет следующая теорема, подтверждающая это предположение.

Пусть $M^4 = \mathbf{C}^2 \times \mathbf{S}_{\mathbf{C}}^2$ – прямое произведение комплексной плоскости $\mathbf{C}^2$ с координатами M_1, M_2 на комплексифицированную сферу Пуассона $\mathbf{S}_{\mathbf{C}}^2 = \{\gamma \in \mathbf{C}^3 \mid \gamma^2 = 1\}$.

ТЕОРЕМА. При $X = Y = 0$, $\mu \neq 0$ система (1) имеет в фазовом пространстве M^4 дополнительный мероморфный первый интеграл только в случае $I_1 = I_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [5]). Покажем, что если указанный первый интеграл существует, то отношение I_2 / I_1 является целым. Аналогично доказывается, что отношение I_1 / I_2 является целым, чем и доказывается теорема.

Условимся одинаково обозначать функцию на множестве, инвариантную относительно некоторой группы преобразований, и порожденную ей функцию на фактор-множестве.

При $X = Y = 0$ система (1) и ее первый интеграл E инвариантны относительно инволютивного диффеоморфизма $J: M \rightarrow M$, $J: (M_1, M_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \mapsto (-M_1, M_2, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3)$. Отсюда, согласно лемме п. 1.6 из [6], следует, что если система (1) имеет дополнительный мероморфный первый интеграл, то индуцированная система на фактор-многообразии $\widehat{M} = M' / J$, $M' = \{x \in M \mid J(x) \neq x\}$, также имеет дополнительный, т.е. функционально независимый с E , мероморфный первый интеграл.

Выберем единицы измерения так, что $I_1 = \mu = 1$, а направление выделенной оси инерции так, что $Z = 1$. Система (1) имеет однопараметрическое семейство частных решений $x = \varphi(t, k)$, $0 < k < 1$, задаваемое формулами $M_2 = \gamma_1 = 0$, $M_1 = 2k \operatorname{cn}(t, k)$, $\gamma_2 = -2k \operatorname{sn}(t, k) \operatorname{dn}(t, k)$, $\gamma_3 = 2k^2 - 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2(t, k)$, $k = \sqrt{(1+h)/2}$, где h – постоянная интеграла энергии, $\operatorname{sn}(t, k)$, $\operatorname{cn}(t, k)$, $\operatorname{dn}(t, k)$ – эллиптические функции Якоби с модулем k .

Обозначим комплексные фазовые кривые соответствующих им решений на $\widehat{M}$ через $\Gamma(k)$. Обозначая $M'_2 = dM_2$, $\gamma'_1 = d\gamma_1$, запишем приведенную систему в вариациях вдоль $\Gamma(k)$ [6], т.е.

ограничение системы в нормальных вариациях на поверхность уровня ее первого интеграла dE , в виде $M'_2 = -\gamma'_1, \dot{\gamma}'_1 = -\gamma_3 M'_2/I_2$ или

$$(2) \quad \ddot{M}'_2 - \gamma_3 M'_2/I_2 = 0.$$

Согласно предложению п. 1.2 из [6], если индуцированная система на многообразии $\widehat{M}$ имеет дополнительный мероморфный первый интеграл, то группа монодромии уравнения (2) имеет (непостоянный) рациональный первый интеграл.

Уравнение (2) совпадает с уравнением (1) из [5], если положить в последнем $H = 1/2$, $\alpha = 1/I_2$. Из результатов [5] следует, что при нецелых α и всех k , кроме, может быть, счетного числа, группа монодромии этого уравнения не имеет рационального первого интеграла. Это доказывает теорему.

Пользуясь случаем, исправим следующие замеченные неточности в [5]: 1) условие $h \leq 0$ излишне и не используется; 2) $\tilde{H} = H - h^2/2$, а не $\tilde{H} = H - h^2/4$, вследствие чего формулы упрощаются; 3) в формуле для следа преобразования за время $\bar{\tau} = \pi$ пропущен множитель π перед z .

Автор благодарен А. И. Нейштадту за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. [2] Козлов В. В. // Усп. механики. 1985. Т. 8. № 3. С. 85–107. [3] Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. [4] Харламова-Забелина Е. И. // Вест. МГУ. Сер. матем., мех. 1957. № 6. С. 25–34. [5] Зиглин С. Л. // ДАН СССР. 1987. Т. 292. № 4. С. 804–807. [6] Зиглин С. Л. // Функ. анализ и его прил. 1982. Т. 16. № 3. С. 30–41.

Институт радиотехники и электроники РАН

Принято редколлегией
03.12.1996