Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Б. Комраков, Четырехмерные лоренцевы однородные неразрешимые пространства Эйнштейна, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:40:43

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ЛОРЕНЦЕВЫ ОДНОРОДНЫЕ НЕРАЗРЕШИМЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА

Б. Б. КОМРАКОВ

Псевдориманово пространство называется *пространством Эйнштейна*, если метрика g удовлетворяет уравнению Эйнштейна $R - \lambda g = 0$, где R – тензор Риччи, λ – произвольное вещественное число.

В данной работе представлена локальная классификация четырехмерных лоренцевых (допускающих инвариантную псевдориманову метрику сигнатуры $(3,1)$) однородных неразрешимых пространств Эйнштейна. Локальная классификация всех четырехмерных лоренцевых однородных пространств Эйнштейна насчитывает 44 пространства.

Глобальная классификация в случае римановой метрики может быть найдена в [1]. Известна также полная классификация всех четырехмерных римановых однородных пространств [2], [3]. Полная локальная классификация четырехмерных псевдоримановых однородных пространств произвольной сигнатуры представлена в [4] [5].

Пусть $(\bar{G}, M)$ – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стационарная подгруппа произвольной точки $x \in M$, и $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – пара алгебр Ли, соответствующая паре групп Ли $(\bar{G}, G)$. Заметим, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ локально однозначно определяет однородное пространство $(\bar{G}, M)$. Глобальное строение всех однородных пространств, соответствующих данной паре, приводится в [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем называть *лоренцевой*, если соответствующее однородное пространство $(\bar{G}, M)$ допускает инвариантную лоренцеву метрику.

Пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем называть *эйнштейновой*, если эта метрика удовлетворяет уравнению Эйнштейна.

Пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем называть *неразрешимой*, если алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима.

ЗАМЕЧАНИЕ.

- 1) Через $\mathfrak{r}_2 = \langle p, q \rangle$ мы будем обозначать следующую алгебру Ли: $[p, q] = p$.
- 2) Через $\mathfrak{n}_3 = \langle h, p, q \rangle$ мы будем обозначать алгебру Ли со следующим ненулевым коммутационным соотношением: $[p, q] = h$.

ТЕОРЕМА 1. Любая неразрешимая симметрическая эйнштейнова лоренцева пара коразмерности 4 эквивалентна одной и только одной из следующих пар:

- 1) $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(1, 1)$
- 2) $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(1, 1)$
- 3) $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(2, 1) \ltimes \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1)$
- 4) $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(3) \ltimes \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$
- 5) $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(4, 1)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, 1)$
- 6) $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3, 2)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, 1)$
- 7) $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^4$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, 1)$

ТЕОРЕМА 2. Любая неразрешимая несимметрическая эйнштейнова лоренцева пара коразмерности 4 эквивалентна одной и только одной из следующих пар:

- 1) $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1)$
- 2) $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$
- 3) $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$
- 4) $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & -x \end{pmatrix} \right) \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \ltimes \mathfrak{n}_3$, $\mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - h, p \right\rangle$
- 5) $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x+t & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix} \right) \middle| x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \ltimes \mathfrak{n}_3$, $\mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - h, p \right\rangle$
- 6) $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R} \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \ltimes \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1)$
- 7) $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R} \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \ltimes \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jensen G. R. // J. Differential Geom. 1969. V. 3. P. 309–349. [2] Берап-Бержери Л. // Четырехмерная риманова геометрия. М.: Мир, 1985. С. 45–60. [3] Ishihara S. // J. Math. Soc. Japan. 1955. V. 7. P. 345–370. [4] Комраков В., Jnr. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. Classification of complex pairs II // Preprint Univ. Oslo. V. 25 (May 1995). [5] Комраков В., Jnr. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. Classification of real pairs. // Preprint Univ. Oslo. V. 32 (June 1995). [6] Mostow G. // Ann. of Math. 1950. V. 32.

Принято редколлегией
18.04.1996