Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. К. Ландо, Эквивариантно замкнутые расширения для стандартного действия ортогональной группы, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:56:07

ЭКВИВАРИАНТНО ЗАМКНУТЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ СТАНДАРТНОГО ДЕЙСТВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ

С. К. Ландо

В [2] В. Маттай и Д. Квиллен построили представителя эквивариантного класса Тома с гауссовой плотностью относительно стандартного действия ортогональной группы на $\mathbb{R}^{2m}$. Этот представитель может рассматриваться как функция на алгебре Ли $\mathfrak{so}(2m)$ со значениями в модуле дифференциальных форм с гауссовой плотностью на $\mathbb{R}^{2m}$, равная в начале координат (с точностью до несущественного в настоящий момент числового множителя) форме объема

$$(1) \quad \omega_0 = e^{-(x,x)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2m}.$$

Здесь через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2m}$. Другими словами, они построили *эквивариантно замкнутое продолжение* формы объема относительно действия ортогональной группы. В настоящей заметке мы предлагаем обобщение этого результата. А именно, пусть $P(x) = p((x, x)) = p(R)$ – произвольный многочлен, инвариантный относительно действия ортогональной группы. Мы строим эквивариантно замкнутое расширение для формы вида

$$(2) \quad P(x)\omega_0 = e^{-(x,x)} P(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2m}.$$

В нашей конструкции расширение выражается через итерированные интегралы.

Используя метод эквивариантной локализации (см. [1]), мы получаем равенство между итерированными интегралами и интегралом от формы (2) по всему пространству.

1. Модель Картана и эквивариантно замкнутое продолжение. Эквивариантные когомологии – это когомологии “факторного отображения” по действию компактной группы (см. [1]). В модели Картана это когомологии следующего комплекса. Пусть M – многообразие, G – компактная группа, действующая на M диффеоморфизмами. Пусть $\Lambda = \Lambda(M)$ – какой-нибудь комплекс дифференциальных форм на M , инвариантных относительно действия G . (Можно рассматривать различные комплексы, например, комплекс всех инвариантных форм, комплекс форм с компактным носителем, комплекс инвариантных форм с гауссовой плотностью и т.д.) Обозначим через $S(\mathfrak{g})$ симметрическую алгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Если $\varphi_1, \dots, \varphi_l \in \mathfrak{g}$ образуют базис этой алгебры Ли, то $S(\mathfrak{g})$ отождествляется с кольцом многочленов от переменных $\varphi_1, \dots, \varphi_l$.

Рассмотрим модуль $\Lambda G = \Lambda G(M) = S(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda$ над кольцом $S(\mathfrak{g})$. Элементы этого модуля можно считать многочленами от φ_i с коэффициентами в Λ . Присваивая переменным φ_i вес два, мы превращаем этот модуль в градуированный. Дифференциал D вводится формулой $D = 1 \otimes (d + I)$, где $I = \sum_{k=1}^l i(X_k) \varphi_k$. Здесь X_k – векторное поле на M , соответствующее элементу φ_k алгебры Ли, а $i(\cdot)$ обозначает операцию подстановки векторного поля в дифференциальную форму.

Эквивариантные когомологии в модели Картана – это когомологии указанного комплекса.

Пусть теперь $\omega \in \Lambda$ – замкнутая дифференциальная форма, инвариантная относительно группы G . Мы называем дифференциальную форму $\Omega \in \Lambda G$ *эквивариантно замкнутым продолжением* формы ω , если Ω замкнута относительно эквивариантного дифференциала D и $\Omega(0) = \omega$, т.е. Ω совпадает с ω в нуле алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

2. Эквивариантная локализация. Эквивариантную локализацию можно понимать как способ заменить интегрирование по всему многообразию M интегрированием по множеству неподвижных точек действия группы G (см. [1]). Опишем вкратце процесс локализации.

Пусть ω_0 – n -форма на M (где n – размерность многообразия M), инвариантная относительно действия G . Такая форма автоматически замкнута. Обозначим через $F \subset M$ множество неподвижных точек действия группы. Предположим для простоты, что F связно.

На первом шаге необходимо продолжить ω_0 до эквивариантно замкнутой n -формы Ω на M . Такое продолжение существует не всегда.

Пусть, далее, E обозначает *эквивариантный класс Эйлера* подмногообразия F неподвижных точек (или, точнее, нормального расслоения к этому подмногообразию). Это дифференциальная форма, степень которой равна размерности нормального слоя. Теорема о локализации [1]

утверждает, что в этом случае $\int_M \omega_0 = \int_F \frac{\Omega}{E}$. Таким образом, зная эквивариантно замкнутое

Работа выполнена в институте Макса Планка, Бонн, в 1996 г. при частичной поддержке РФФИ (грант № 95-01-00846а) и INTAS (грант № 4373).

продолжение Ω и эйлеров класс множества неподвижных точек, можно свести интегрирование по M к интегрированию по F .

Несмотря на очевидные преимущества такого подхода, его не так-то легко воплотить в жизнь. Вычислить эйлеров класс, как правило, несложно. Однако построение эквивариантно замкнутого продолжения зачастую сопряжено со значительными трудностями. Единственный известный автору нетривиальный пример такого построения для действия некоммукативной группы – это конструкция Маттай–Квиллена.

3. Конструкция Маттай–Квиллена. В простейшем некоммукативном случае стандартного действия группы $SO(4)$ на $\mathbb{R}^4$ форма Маттай–Квиллена выглядит следующим образом. Алгебру Ли $so(4)$ можно отождествить с пространством кососимметрических (4×4) -матриц. Обозначим естественные координаты в этом пространстве через φ_{ij} , $1 \leq i < j \leq 4$. Тогда эквивариантно замкнутое продолжение 4-формы $\omega = e^{-R} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$, где $R = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega &= e^{-R} \left(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \frac{1}{2} (\varphi_{12} dx_3 \wedge dx_4 - \varphi_{13} dx_2 \wedge dx_4 + \varphi_{14} dx_2 \wedge dx_3 \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{23} dx_1 \wedge dx_4 - \varphi_{24} dx_1 \wedge dx_3 + \varphi_{34} dx_1 \wedge dx_2) + \frac{1}{4} (\varphi_{12} \varphi_{34} - \varphi_{13} \varphi_{24} + \varphi_{14} \varphi_{23}) \right) \\ &= e^{-R} (\omega_0 + \omega_1 + \omega_2), \end{aligned}$$

где ω_j – дифференциальные формы степени $4 - 2j$ по переменным x_i . В частности, эйлеров класс равен $\omega_2 = \frac{1}{4} (\varphi_{12} \varphi_{34} - \varphi_{13} \varphi_{24} + \varphi_{14} \varphi_{23})$.

В общем случае произвольного k эквивариантно замкнутое продолжение имеет аналогичный вид:

$$(3) \quad \Omega = e^{-R} (\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_k),$$

где каждая $2(k - j)$ -форма ω_j замкнута.

4. Обобщение формулы Маттай–Квиллена.

ТЕОРЕМА. Следующая форма является эквивариантно замкнутым продолжением $2k$ -формы $e^{-R} p(R) \omega_0$:

$$(4) \quad \Omega_p = p_0 \omega_0 + p_1 \omega_1 + \dots + p_k \omega_k,$$

где $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k$ – формы, входящие в формулу Маттай–Квиллена (3), $p_0(R) = e^{-R} p(R)$, $p_1(R) = \int_R^\infty p_0(\rho) d\rho$, $p_{j+1}(R) = \int_R^\infty p_j(\rho) d\rho$, $j = 1, \dots, k - 1$.

Из принципа локализации немедленно вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого многочлена p

$$\int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{-R} p(R) \omega_0 = \int_0^\infty \int_{\rho_{k-1}}^\infty \dots \int_{\rho_1}^\infty e^{-\rho_1} p(\rho_1) d\rho_1 \dots d\rho_{k-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. В силу того, что каждая из форм ω_j замкнута, эквивариантная замкнутость формы Маттай–Квиллена означает, что $I(\omega_j) = dR \wedge \omega_{j+1}$, $j = 0, \dots, k - 1$. Эквивариантный дифференциал формы (4) имеет вид

$$\begin{aligned} D\Omega_p &= dp_0 \wedge \omega_0 + p_0 I(\omega_0) + \dots + dp_k \wedge \omega_k + p_k I(\omega_k) \\ &= p_0 dR \wedge \omega_1 + dp_1 \wedge \omega_1 + p_1 dR \wedge \omega_2 + \dots + dp_k \wedge \omega_k = 0, \end{aligned}$$

так как $dp_{j+1} = -p_j dR$ в силу определения функций p_j . Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Atiyah M. F., Bott R. // Topology. 1984. V. 23. P. 1–28. [2] Mathtai V., Quillen D. // Topology. 1986. V. 25. P. 85–110.