Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Малешич, Гипотеза Гильберта–Смита для гёльдеровых действий, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm837>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 10:58:18

ГИПОТЕЗА ГИЛЬБЕРТА–СМИТА ДЛЯ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ДЕЙСТВИЙ

ЙОЖЕ МАЛЕШИЧ

1. Введение. Гипотеза Гильберта–Смита утверждает – всякая компактная группа, эффективно действующая на многообразии, является группой Ли. Известно, что для ее решения достаточно доказать, что группа p -адических чисел не может эффективно действовать на многообразии. В статье [1] было доказано, что p -адические числа не могут действовать на многообразии посредством липшицевых гомеоморфизмов. В настоящей заметке показано, что это же справедливо и для гильдеровых действий с большим показателем гильдеровости.

2. Гильдеровы отображения. Пусть (M, ρ) – метрическое пространство, и пусть $g: M \rightarrow M$ – отображение. Если существуют такие положительные постоянные C и α , что

$$\rho(g(x), g(y)) \leq C\rho^\alpha(x, y)$$

для каждой пары точек $x, y \in M$, то g называется *гильдеровым* отображением, а число α называется *показателем гильдеровости*. Липшицевы отображения – это частный случай гильдеровых (при показателе 1).

Для пространства M конечного диаметра каждое гильдерово отображение с показателем α является гильдеровым с показателем β для любого $\beta < \alpha$.

Гильдеровый автогомеоморфизм с показателем α – это такой автогомеоморфизм g пространства M , что g и g^{-1} есть гильдеровы отображения с тем же показателем α . Эквивалентное определение таково: существуют такие положительные постоянные C и α , что

$$\frac{1}{C}\rho^{1/\alpha}(x, y) \leq \rho(g(x), g(y)) \leq C\rho^\alpha(x, y).$$

Из последнего определения сразу следует, что гильдеровы автогомеоморфизмы с показателем больше 1 вообще существовать не могут; имеющие показатель меньше 1 существуют только для пространства M конечного диаметра, а с показателем 1 существуют всегда (например, тождественное отображение). Следующее предложение доказывается аналогично предложению для липшицевых отображений из [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если компактная группа G действует на метрическом пространстве M гильдеровыми автогомеоморфизмами, то их показатели в совокупности ограничены снизу. Кроме того, постоянные множители в неравенствах, определяющих гильдеровость, в совокупности ограничены сверху.*

3. Оценка для нижней границы показателей.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть группа A_p p -адических чисел (p простое) эффективно действует гильдеровыми автогомеоморфизмами на замкнутом многообразии M^m . Согласно предположению 2.1 множество показателей гильдеровости элементов группы A_p ограничено снизу некоторым числом $\alpha \in (0, 1]$. Для числа α имеет место следующая оценка:*

$$\alpha < \frac{m}{m+2}.$$

Доказательство. Согласно предложению 2.1 существует такая положительная постоянная C , что для каждого элемента g группы $G = A_p$ и для любой пары точек $x, y \in M$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{C} \rho^{1/\alpha}(x, y) \leq \rho(g(x), g(y)).$$

Беря нормированную меру на группе G [2, XI, 58, Theorem B], построим эквивариантную метрику ρ_G на пространстве M :

$$\rho_G(x, y) = \int_G \rho(g(x), g(y)) dg.$$

Проинтегрировав предыдущую оценку, получим

$$\frac{1}{C} \rho^{1/\alpha}(x, y) \leq \rho_G(x, y).$$

Отсюда следует оценка для хаусдорфовых мер

$$\frac{1}{C^s} \mathcal{H}^s / \alpha \leq \mathcal{H}_G^s$$

при любом действительном числе s и далее оценка для хаусдорфовых размерностей

$$\dim_\rho(M) \geq \dim_{\rho_G}(M).$$

Эквивариантная метрика ρ_G на пространстве M порождает метрику на пространстве орбит M/G , которую также обозначим ρ_G . Она определена формулой

$$\rho_G(p(x), p(y)) = \min\{\rho_G(x, g(y)) \mid g \in G\},$$

где $x, y \in M$ — любые точки, а $p: M \rightarrow M/G$ есть факторное отображение. Из определения метрики ρ_G следует оценка для хаусдорфовых размерностей:

$$\dim_{\rho_G}(M) \geq \dim_{\rho_G}(M/G).$$

Наконец отметим следующие факты:

$$\begin{aligned} \dim_{\rho_G}(M/G) &\geq \dim(M/G) \geq \dim_Z(M/G), \\ \dim_Z(M/G) &= 2 + \dim(M), \quad \dim_\rho(M) = \dim(M). \end{aligned}$$

Первое неравенство следует из [3, теорема 7.3], второе — классический результат теории размерностей (см. [4]). Первое равенство — теорема Янга (см. [5]), второе — классический результат (см. [6]).

Складывая все неравенства и равенства, получим оценку

$$\dim(M) \geq \alpha(2 + \dim(M)),$$

из которой следует оценка в теореме 3.1.

В заключение автор выражает свою благодарность Е. В. Щепину за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Repovč D., Ščepin E. V. A proof of the Hilbert-Smith conjecture for actions by Lipschitz maps // Math. Ann. (to appear). [2] Halmos P. R. Measure Theory. Amsterdam: Van Nostrand, 1969. [3] Hurewicz W., Wallman H. Dimension Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941. [4] Александров П. С. Введение в гомологическую теорию размерности. М.: Наука, 1975. [5] Yang C. T. // Michigan Math. J. 1960. V. 7. P. 201–218. [6] Nash J. // Ann. Math. 1956. V. 63. №2. P. 20–63.

Принято редколлегией
03.12.1996