Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Мальцев, Усреднение локальных теоретико-полевых скобок Пуассона,
УМН, 1997, том 52, выпуск 2, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm839>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:41:46

УСРЕДНЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВЫХ СКОБОК ПУАССОНА

А. Я. МАЛЬЦЕВ

В работах [1]–[2] Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым была предложена процедура усреднения локальных теоретико-полевых гамильтоновых структур, дающая скобку Пуассона для уравнений Уизема, описывающих эволюцию медленно промодулированных m -фазных решений систем нелинейных уравнений [3], [4]. Опишем кратко эту процедуру.

Пусть эволюционная система

$$(1) \quad \varphi_t^i = Q^i(\varphi, \varphi_x, \dots), \quad i = 1, \dots, n,$$

является гамильтоновой относительно локальной теоретико-полевой скобки Пуассона вида:

$$(2) \quad \{\varphi^i(x), \varphi^j(y)\} = \sum_{k \geq 0} B_k^{ij}(\varphi, \varphi_x, \dots) \delta^{(k)}(x - y)$$

(в сумме присутствует конечное число слагаемых), с гамильтонианом:

$$(3) \quad H = \int \mathcal{P}_H(\varphi, \varphi_x, \dots) dx.$$

Пусть система (1) имеет N -параметрическое семейство (не считая сдвигов начальных фаз θ_0^α) m -фазных решений:

$$(4) \quad \varphi^i(x, t) = \Phi^i(\mathbf{k}(\mathbf{U})x + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{U})t + \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{U}),$$

где $\mathbf{U} = (U^1, \dots, U^N)$ – параметры семейства, $\Phi^i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{U})$ – 2π -периодические функции $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \dots, \theta^m)$, и N коммутирующих между собой первых интегралов вида

$$(5) \quad I^\nu = \int \mathcal{P}^\nu(\varphi, \varphi_x, \dots) dx, \quad \nu = 1, \dots, N,$$

попарные скобки Пуассона локальных плотностей которых имеют вид:

$$(6) \quad \{\mathcal{P}^\nu(\varphi, \varphi_x, \dots), \mathcal{P}^\mu(\varphi, \varphi_y, \dots)\} = \sum_{k \geq 0} A_k^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots) \delta^{(k)}(x - y),$$

причем $A_0^{\nu\mu} = \partial_x Q^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$.

Мы без нарушения общности будем считать, что значения параметров U^ν совпадают со значениями интегралов I^ν на соответствующих функциях семейств (4). При этом, потоки, порожденные в силу (2) интегралами I^ν (среди которых может быть и гамильтониан H), коммутируют между собой и с потоком (1) и оставляют семейство (4) инвариантным, порождая на нем линейную зависимость сдвига начальных фаз $\boldsymbol{\theta}_0$ от времен τ^ν , и оставляя неизменными значения параметров U^ν . Т.е.

$$(7) \quad \varphi^i(x, \tau^1, \dots, \tau^N) = \Phi^i(\mathbf{k}x + \boldsymbol{\omega}^{(1)}(\mathbf{U})\tau^1 + \dots + \boldsymbol{\omega}^{(N)}\tau^N + \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{U})$$

(H соответствует $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{U})$).

В этой ситуации скобку Дубровина–Новикова на пространстве полей $U^\nu(X)$ можно записать в виде

$$(8) \quad \{U^\nu(X), U^\mu(Y)\} = \langle A_1^{\nu\mu} \rangle(\mathbf{U}(X)) \delta'(X - Y) + \frac{\partial \langle Q^{\nu\mu} \rangle}{\partial U^\lambda} U_X^\lambda \delta(X - Y),$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение на семействе m -фазных решений (1), $U^\nu(X)$ – медленно меняющиеся функции координаты $x = X/\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке KFA Forschungszentrum Jülich GmbH и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01623).

Теория скобок (8) тесно связана с Римановой геометрией. В частности, если матрица $\langle A_1^{\nu\mu} \rangle$ невырождена, то (8) задает скобку Пуассона тогда и только тогда, когда величины $g_{\nu\tau}(\mathbf{U})$ и $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = -g_{\mu\tau}\partial\langle Q^{\tau\nu}\rangle/\partial U^\lambda$, где $g_{\nu\tau}\langle A_1^{\tau\mu}\rangle \equiv \delta_\nu^\mu$, задают на пространстве параметров $\mathbf{U}$ симметричную плоскую метрику и согласованную с ней симметричную связность, соответственно. Из тождества Лейбница для (8) вытекает при этом, что при заменах координат на пространстве параметров $\mathbf{U}$ величины $g_{\nu\tau}$ и $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ преобразуются соответствующим образом. Теория скобок (8) с вырожденным тензором $\langle A_1^{\nu\mu} \rangle$ более сложна, но также имеет красивую геометрическую интерпретацию (см. [5]).

В [1]–[2], однако, отсутствовало доказательство тождества Якоби для полученной таким образом скобки (8), о чем сообщалось в [6]. Здесь мы сформулируем доказанные в [7] (с помощью процедуры ограничения по Дираку скобки Пуассона на подмногообразии в функциональном пространстве) теоремы о том, что (8) действительно однозначно задает скобку Пуассона на пространстве полей $U^\nu(X)$. Именно:

ТЕОРЕМА 1. *При сформулированных выше условиях, а также выполнении некоторых свойств регулярности (см. [7]), соответствующих общему положению:*

- 1) *скобка Дубровина–Новикова, определяемая формулой (8), удовлетворяет тождеству Якоби;*
- 2) *в силу (8) выполняются соотношения:*

$$\{k^\alpha(\mathbf{U}(X)), U^\nu(Y)\} = \omega^{\alpha(\nu)}(\mathbf{U}(X))\delta'(X - Y) + \frac{\partial\omega^{\alpha(\nu)}(\mathbf{U}(X))}{\partial X}\delta(X - Y),$$

$$\{k^\alpha(\mathbf{U}(X)), k^\beta(\mathbf{U}(Y))\} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, N.$$

Потоки, порожденные интегралами $\int U^\nu(X) dX$ на пространстве полей $\mathbf{U}(X)$ в силу скобки (8), коммутируют между собой и дают уравнения Уизема для нелинейных систем, порожденных интегралами I^ν на пространстве полей $\varphi(x)$ в силу (2), соответственно.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть у системы (1) имеется два несовпадающих набора интегралов вида (5), $\{I^1, \dots, I^N\}$ и $\{\bar{I}^1, \dots, \bar{I}^N\}$, обладающих всеми требуемыми свойствами. Тогда скобки Дубровина–Новикова, полученные с помощью этих наборов, совпадают, т.е. если на семействе (4): $U^\nu = I^\nu$, $\bar{U}^\nu = \bar{I}^\nu$, то скобка (8), полученная с помощью набора $\{I^1, \dots, I^N\}$, после замены параметров на семействе m -фазных решений вида $U^\nu = U^\nu(\bar{\mathbf{U}})$ переходит в скобку, полученную с помощью набора $\{\bar{I}^1, \dots, \bar{I}^N\}$.*

Из теорем 1 и 2 вытекает также, что любой интеграл I вида (5), коммутирующий с гамильтонианом и со всеми I^ν , при ограничении на семейство (4) дает плотность закона сохранения для систем, порожденных интегралами $\int U^\nu(X) dX$ в силу (8), а уравнения Уизема для нелинейной системы, порожденной I в силу (2), дают коммутирующий поток к этим системам. Этот факт, как нетрудно видеть, следует из того, что интеграл I можно включить в набор (5) вместо любого из имеющихся там интегралов I^ν , и это не изменит скобки (8).

В заключение автор благодарит С. П. Новикова за постановку задачи и внимание к работе, а также В. Л. Алексеева, О. И. Мохова, М. В. Павлова и Е. В. Ферапонтова за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.
 [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98. [3] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. [4] Luke J. C. // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1966. V. 292. № 1430. P. 403–412. [5] Гринберг Н. И. // УМН. 1985. Т. 40. № 4. С. 217–218. [6] Новиков С. П., Мальцев А. Я. // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 155–156. [7] Maltsev A. Ya. // solv-int/9611008, 1996 (to appear).