Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, О мере односторонне осциллирующих движений для модели А. Н. Колмогорова и его обобщения в задаче n -тел, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 245–246

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 05:03:06

**О МЕРЕ ОДНОСТОРОННЕ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ
ДВИЖЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ А.Н. КОЛМОГОРОВА
И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ В ЗАДАЧЕ n -ТЕЛ**

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

Рассмотрим n материальных точек $P_0, \dots, P_{n-1}$, взаимодействующих друг с другом согласно закону Ньютона с гравитационной постоянной $\gamma > 0$. В дальнейшем будем изучать только такие движения, которые не приводят к столкновениям и при которых ни одно из парных расстояний между точками не стремится к бесконечности при $t \rightarrow \pm\infty$, где t — время.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Движение точек называется осциллирующим при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$), если хотя бы одно из попарных расстояний между точками не ограничено при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$), но не стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Движение точек называется односторонне осциллирующим при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$), если оно осциллирующее при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$), а при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) все точки находятся друг от друга на ограниченном расстоянии.

Следуя [1] рассмотрим следующий частный случай задачи n тел при $n \geq 3$. Предположим, что точки $P_1, \dots, P_{n-1}$ имеют одну и ту же массу $m > 0$ и в некоторой прямоугольной системе координат x, y, z в плоскости $z = 0$ совершают периодические движения с одним периодом так, что они всегда расположены в вершинах правильного $(n-1)$ -угольника, у которого центр лежит на оси z (обобщенные решения Лагранжа [2]), а точка P_0 нулевой массы движется вдоль оси z . Частным случаем этой модели, соответствующим $n = 3$, является пример А. Н. Колмогорова, для которого впервые в задаче трех тел были построены осциллирующие движения [3], односторонне осциллирующие движения [4], а также доказано, что ограниченные, осциллирующие и неограниченные движения при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$ могут сочетаться в любых комбинациях [4]. Точно такие же результаты справедливы для любого $n \geq 3$ [1]. Однако вопрос о лебеговой мере начальных данных, приводящих к осциллирующим движениям в указанных моделях (также как и общей задаче n тел при $n \geq 3$) остается открытым.

В настоящей работе эта проблема решается для односторонне осциллирующих движений. Указание на нее содержится, например, в [5].

ТЕОРЕМА. *Лебегова мера начальных данных, приводящих к односторонне осциллирующим при $t \rightarrow \pm\infty$ движениям, равна нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $x_k(t), y_k(t), z_k(t)$ значения координат x, y, z в момент времени t точек P_k ($k = 0, \dots, n-1$). Тогда в силу постановки задачи имеем равенство $x_0(t) \equiv y_0(t) \equiv 0$, а переменная $z_0(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1) \quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = -Q(z_0, t),$$

где

$$(2) \quad Q(z_0, t) = m\gamma z_0 \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^2(t) + y_k^2(t) + z_0^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Пусть траектории точек $P_1, \dots, P_{n-1}$ имеют период $T > 0$, и поэтому согласно (2) $Q(z_0, t) = Q(z_0, t + T)$, $Q(z_0, t) = -Q(-z_0, t)$. Далее, в силу (2) функция $Q(z_0, t)$ удовлетворяет всем условиям, используемым в работе [4] при исследовании уравнения (1), и поэтому из работы [4] следует, что решения $z_0(t)$ уравнения (1) обладают ниже перечисленными свойствами.

1). Любое решение $z_0(t)$, не стремящееся к бесконечности при $t \rightarrow \pm\infty$, бесконечное число раз пересекает плоскость $z = 0$ как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$.

2). Решения $z_0^+(t), z_0^-(t)$ с начальными данными $z_0^+(\tau) = 0, \frac{dz_0^+}{dt}(\tau) = v$ и $z_0^-(\tau) = 0, \frac{dz_0^-}{dt}(\tau) = -v$ соответственно при всех t связаны равенством $z_0^+(t) = -z_0^-(t)$, а те же решения с

начальными данными $z_0^+(\tau) = 0$, $\frac{dz_0^+}{dt}(\tau) = v$ и $z_0^-(\tau + T) = 0$, $\frac{dz_0^-}{dt}(\tau + T) = v$ соответственно при всех t связаны равенством $z_0^+(t) = z_0^-(t + T)$.

3). На плоскости R с полярными координатами τ , r (τ – угол, r – радиус), которые пробегают область $0 \leq \tau < T$, $r \geq 0$, (здесь полный угол равен T) существуют открытые области Π_+ и Π_- , ограниченные замкнутыми непрерывными кривыми, такие что если точка $(\tau, v) \in \Pi_+$ ($(\tau, v) \in \Pi$), то решение $z_0(t)$ с начальными данными $z_0(\tau) = 0$, $\frac{dz_0}{dt}(\tau) = v$ при $t > \tau$ ($t < \tau$) пересечет плоскость $z = 0$, а, если $(\tau, |v|) \notin \Pi_+$ ($(\tau, |v|) \notin \Pi_-$), то решение $z_0(t)$ в области $\tau < t < +\infty$ ($-\infty < t < \tau$) монотонно стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

4). Преобразование A области Π_- , переводящее точку $(\tau_-, r_-) \in \Pi_-$ в точку $(\tau_+, r_+) \in \Pi_+$ такую, что τ_+ есть ближайшее к τ_- значение t в области $t < \tau_-$, взятое по модулю T , для которого решение $z_0(t)$ с начальными данными $z_0(\tau_-) = 0$, $\frac{dz_0}{dt}(\tau_-) = r_-$ удовлетворяет равенствам $z_0(\tau_+) = 0$, $\left| \frac{dz_0}{dt}(\tau_+) \right| = r_+$, сохраняет площадь.

Докажем, что для любой константы $c > 0$ множество Ω_c , состоящее из точек $(\tau, v) \in \Pi_+ \cap \Pi_-$, для которых решение $z_0(t)$ с начальными данными $z_0(\tau) = 0$, $\frac{dz_0}{dt}(\tau) = v$ удовлетворяет неравенству $\sup_{t \leq \tau} |z_0(t)| \leq c$ и существует такое $t^* > \tau$, что $|z_0(t^*)| > 2c$, имеет лебегову меру ноль на плоскости τ , r . С этой целью рассмотрим все значения t_k ($k = 1, 2, \dots$), удовлетворяющие неравенствам $t_1 > \tau$, $t_{k+1} > t_k$, для которых $z_0(t_k) = 0$ и при $k = 1, 2, \dots$ введем множество $\Omega_c^{(k)}$, состоящее из таких точек $(\tau, v) \in \Omega_c$, что в области $\tau \leq t \leq t_{k-1}$ ($t_0 = \tau$) соответствующее решение $z_0(t)$ удовлетворяет неравенству $|z_0(t)| \leq 2c$, а в области $t_{k-1} < t \leq t_k$ существует такое $t = t_*$, что $|z_0(t_*)| > 2c$. Так как $\Omega_c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_c^{(k)}$, то, обозначая лебегову меру на плоскости τ , r через mes и предполагая, что $\text{mes } \Omega_c > 0$, получим, что существует такое k_* , что $\text{mes } \Omega_c^{(k_*)} > 0$. При $s = 1, 2, \dots$ введем множества $\tilde{\Omega}_c^{(s)} = A^s(\Omega_c^{(k_*)})^c$. Из определения множества Ω_c и отображения A^c в формулировке свойства 4) следует, что при всех s $\tilde{\Omega}_c^{(s)} \subset \Omega_c^{(k_*+s)}$, $\text{mes } \tilde{\Omega}_c^{(s)} = \text{mes } \Omega_c^{(k_*)} > 0$, и так как множества $\Omega_c^{(k)}$ при разных k попарно не пересекаются, то $\text{mes } \Omega_c \geq \sum_{s=1}^{\infty} \text{mes } \Omega_c^{(k_*+s)} = \infty$. Но это противоречит свойству 3), согласно которому $\text{mes } \Omega_c < \infty$. Таким образом, при любом $c > 0$ $\text{mes } \Omega_c = 0$. Теперь утверждение теоремы следует из свойства 2) и из того, что начальные данные, принадлежащие $\Pi_+ \cap \Pi_-$ на плоскости $z = 0$ и порождающие односторонне осциллирующие движения при $t \rightarrow +\infty$, содержатся в объединении $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_{\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пустыльников Л. Д. // ПММ. 1990. Т. 54. № 2. С. 329–331. [2] Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. Москва: ИЛ, 1959. [3] Ситников К. А. // ДАН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306. [4] Алексеев В. А. // Мат. Сборник. 1968. Т. 77 (119). С. 545–601; 1969. Т. 78 (120). С. 3–50. [5] Алексеев В. А. Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики // Девятая летняя математическая школа. Лекции. Кашивели: АН ИССР, 1972. С. 212–341.

Принято редколлегией
19.08.1998