Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Нечаев, Структура оптимальной инвестиционной стратегии на фьючерсном рынке, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm840>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:15:55

СТРУКТУРА ОПТИМАЛЬНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ НА ФЬЮЧЕРСНОМ РЫНКЕ

М. Л. НЕЧАЕВ

Пусть дан стохастический базис $((\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ (см. [1]), где Ω – пространство непрерывных функций $\omega = (\omega_t)_{t \geq 0}$, $\omega_0 = 0$; $\mathcal{F}$ – борелевская σ -алгебра на Ω , порожденная цилиндрическими множествами; P – винеровская мера на $(\Omega, \mathcal{F})$; $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – фильтрация, $\mathcal{F}_t$ есть σ -алгебра $\sigma(\omega_s, s \leq t)$, пополненная множествами нулевой вероятности из $\mathcal{F}$. Все рассматриваемые ниже процессы согласованы с $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Предположим, на рынке (см. [2]) имеется три актива: банковский счет, фьючерсный контракт на некоторый актив (сам актив не участвует в рассмотрении) и маржинальный счет в клиринговой палате.

Инвестор может положить деньги на банковский счет и заключить некоторое число фьючерсных контрактов. Фьючерсные контракты, заключенные в момент t , для инвестора ничего не стоят. Клиринговая палата, через которую происходит заключение контрактов, обязывает инвестора внести определенную сумму на маржинальный счет как гарантию платежеспособности. Количество средств, вносимых на маржинальный счет, определяется как α -часть от суммы заключенных фьючерсных контрактов, $\alpha \in (0, 1)$.

В качестве компенсации за отвлечение средств из оборота инвестора, на маржинальный счет начисляются проценты. Они могут отличаться от процентов, начисляемых на банковский счет.

Пусть стоимость в момент t единицы банковского и маржинального счета есть B_t и M_t соответственно. Фьючерсную (котировочную) цену актива в момент t обозначим S_t .

Изменения цен происходят в соответствии с уравнениями (см. [2])

$$\begin{aligned} (1) \quad & B_t = B_0 \exp(rt), \quad r > 0, \quad B_0 = 1; \\ (2) \quad & M_t = M_0 \exp(mt), \quad 0 < m \leq r, \quad M_0 = 1; \\ (3) \quad & S_t = S_0 \exp\left(\sigma w_t - \frac{\sigma^2 t}{2} + \eta t\right), \quad \text{где } (w_t)_{t \geq 0} \text{ – стандартный винеровский процесс,} \\ & \sigma > 0, \quad \eta > \alpha(r - m), \quad S_0 > 0. \end{aligned}$$

Инвестиционным портфелем называется процесс $\pi = ((\pi_t)_{t \geq 0}, \pi_t = (\beta_t, \mu_t, \gamma_t))$, где β_t – число единиц банковского счета, μ_t – число единиц маржинального счета и γ_t – количество заключенных фьючерсных контрактов. При этом в каждый момент t выполняется условие, вытекающее из требований клиринговой палаты,

$$(4) \quad \mu_t M_t = \alpha \gamma_t S_t.$$

Капиталом инвестора в момент t будем называть процесс X_t такой, что

$$(5) \quad X_t = \beta_t B_t + \mu_t M_t.$$

В соответствии с механизмом расчетов на рынке фьючерсов, изменение капитала происходит следующим образом:

$$(6) \quad dX_t = \beta_t dB_t + \mu_t dM_t + \gamma_t dS_t.$$

Уравнениями (1)–(6) определен фьючерсный рынок.

Обозначим через Z_t следующий процесс:

$$Z_t = Z_0 \exp\left(\sigma w_t - \frac{\sigma^2 t}{2} + (\eta - \alpha(r - m))t\right), \quad Z_0 = S_0.$$

Определим также меру P_α так, что

$$dP_\alpha|_{\mathcal{F}_t} = Q_t dP, \quad \text{где } Q_t = \exp\left\{-\frac{\eta - \alpha(r - m)}{\sigma} w_t - \frac{(\eta - \alpha(r - m))^2 t}{2\sigma^2}\right\}.$$

Инвестиционный портфель $\pi = ((\pi_t)_{t \geq 0}, \pi_t = (\beta_t, \mu_t, \gamma_t))$, называется α -стратегией, если выполнены условия (4)–(6) и

i) $\gamma_t \exp((\alpha - 1)r - \alpha m)t$ – случайный процесс, интегрируемый по Z_t ;

ii) γ_t удовлетворяет условию $E \int_0^T (\gamma_t Z_t)^2 dt < \infty$.

Множество всех α -стратегий обозначим SF_α .

Представим на фьючерсном рынке инвестора, который, обладая начальным капиталом x , стремится в момент T получить терминальный капитал X_T , наиболее близкий к инвестиционной цели g (g — неотрицательная константа). Задача инвестора состоит в том, чтобы: при заданных x и g найти стратегию $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_t)_{t \geq 0}$, $\hat{\pi}_t = (\hat{\beta}_t, \hat{\mu}_t, \hat{\gamma}_t)$, из SF_α такую, что

$$E(X_T^{\hat{\pi}} - g)^2 = \inf_{\pi \in SF_\alpha} E(X_T^\pi - g)^2$$

или, эквивалентно,

$$E(Y_T^{\hat{\pi}} - g_T)^2 = \inf_{\pi \in SF_\alpha} E(Y_T^\pi - g_T)^2, \quad \text{где } Y_t^\pi = \frac{X_t^\pi}{B_t} - X_0^\pi, \quad g_T = \frac{g}{B_T} - X_0^\pi.$$

Из формулы Ито вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Для стратегии $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0} \in SF_\alpha$ справедливо соотношение $dY_t^\pi = \gamma_t^\pi \exp[(\alpha - 1)r - \alpha m]t) dZ_t$.

Из теоремы Гирсанова (см. [1]) вытекает, что процессы Z_t и Y_t^π являются мартингалами относительно P_α .

Определим множество $\Phi_0 = \{\phi \in L_2(\Omega, P_\alpha) \mid E_{P_\alpha}(\phi) = 0\}$. Заметим, что $Y_T^\pi \in \Phi_0$ для произвольной α -стратегии $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$.

ЛЕММА 2. Пусть $\phi \in \Phi_0$, $x \in \mathbb{R}_+$, тогда существует $\pi(\phi) = (\pi_t)_{t \geq 0} \in SF_\alpha$ такая, что $X_0^{\hat{\pi}} = x$ и $Y_T^{\hat{\pi}} = \phi$.

Доказательство основано на теореме Ито–Кларка о представлении мартингалов (см. [1]).

ЛЕММА 3. Положим $\hat{\phi} = g_T - g_T \frac{Q_T}{\|Q_T\|_P^2}$, где $\|Q_T\|_P^2 = E_P(Q_T^2)$. Тогда

$$E_P(\hat{\phi} - g_T)^2 = \inf_{\phi \in \Phi_0} E_P(\phi - g_T)^2.$$

Доказательство леммы 3 основано на стандартной проекционной технике пространства L_2 .

Из лемм 1–3 вытекает следующая теорема о существовании и структуре оптимальной инвестиционной стратегии.

ТЕОРЕМА. Пусть заданы неотрицательные константы x и g , тогда существует стратегия $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_t)_{t \geq 0}$, $\hat{\pi}_t = (\hat{\beta}_t, \hat{\mu}_t, \hat{\gamma}_t)$, из SF_α такая, что $X_0^{\hat{\pi}} = x$ и $E(X_T^{\hat{\pi}} - g)^2 = \inf_{\pi \in SF_\alpha} E(X_T^\pi - g)^2$. При этом

$$\begin{aligned} \gamma_t^{\hat{\pi}} &= \frac{B_t(\eta - \alpha(r - m))}{S_t \sigma^2} (g_T - Y_t^{\hat{\pi}}), & \mu_t^{\hat{\pi}} &= \alpha \frac{(\eta - \alpha(r - m))B_t}{\sigma^2 M_t} (g_T - Y_t^{\hat{\pi}}), \\ \beta_t^{\hat{\pi}} &= Y_t^{\hat{\pi}} - \alpha \frac{(\eta - \alpha(r - m))}{\sigma^2} (g_T - Y_t^{\hat{\pi}}). \end{aligned}$$

Аналогичные вопросы для модели фьючерсного рынка с дискретным временем изучаются в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
[2] Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. // Теория вероятн. и ее примен. 1994. Т. 39. № 1. С. 80–129. [3] Мельников А. В., Нечаев М. Л., Степанов В. М. О дискретной модели финансового рынка и методах расчетов с ценными бумагами. Препринт № 3. М.: АФЦ, 1996.