Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Е. Панов, Эллиптический род для многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$,
УМН, 1997, том 52, выпуск 2, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm841>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 11:58:04

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ РОД ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ С ДЕЙСТВИЕМ ГРУППЫ $\mathbb{Z}/p$

Т. Е. ПАНОВ

В работах Э. Виттена каждому ориентированному $2n$ -мерному многообразию был сопоставлен инвариант – индекс оператора Дирака на пространстве петель этого многообразия. С. Ошанин в [1] показал, что этот индекс является родом Хирцебруха, соответствующим эллиптическому синусу, и поэтому он был назван эллиптическим родом. Действия $\mathbb{Z}/p$ на гладких многообразиях изучались с точки зрения теории кобордизмов в работах [2], [3]. В работе [4] был предложен подход для вычисления родов Хирцебруха, соответствующих индексам эллиптических комплексов гладких многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$ на основе формулы Атьи–Ботта–Лефшеца [5] и указаны явные формулы для рода Тодда. В данной работе мы реализуем этот подход для эллиптического рода. Также в [4] была получена другая формула для рода Тодда, вытекающая из теории кобордизмов и показано что разность между двумя формулами есть в точности сумма уравнений Коннера–Флойда. В нашей работе аналогичная связь устанавливается между соответствующими формулами для эллиптического рода (см. теорему 2).

Пусть M^{2n} – квазикомплексное многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [1]). *Эллиптическим родом* называется род Хирцебруха $\varphi(M^{2n}) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{f(x_i)} \right) [M^{2n}]$, где $f(x) = \operatorname{sn} x$ – эллиптический синус Якоби.

Функция $f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4$, где δ и ε можно рассматривать как алгебраически независимые переменные. Эллиптический род задает гомоморфизм кольца комплексных кобордизмов Ω_U в кольцо $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$ или $\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]$, $p > 2$.

Рассмотрим теперь $\{L_i^{(q)} = \sum_{p=0}^n \Lambda^{p,i} \otimes (\bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbb{C}} M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbb{C}} M)\}$, где $T_{\mathbb{C}} M$ – комплексификация касательного расслоения к M , $\Lambda_t E := \sum_{k=0}^{\infty} (\Lambda^k E) \cdot t^k$, $S_t E := \sum_{k=0}^{\infty} (S^k E) \cdot t^k$. Это ряд от q , коэффициентами которого являются эллиптические комплексы расслоений над M . Его индекс, $\operatorname{ind}(L^{(q)}) = \operatorname{sign}(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbb{C}} M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbb{C}} M)$ (“скрученная” сигнатура, см. [6]), – степенной ряд от q с целыми коэффициентами, т.е. элемент $\mathbb{Z}[[q]]$, равный $L(M) = \operatorname{sign} M$ при $q = 0$ (см. [6]). Известно следующее соотношение, вытекающее из формулы Атьи–Зунгера для индекса [7] и разложения $f(x) = \operatorname{sn} x$ в бесконечное произведение (см. [8]):

$$(1) \quad \varphi(M) = \operatorname{sign} \left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbb{C}} M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbb{C}} M \right) \cdot \varepsilon^{n/4}.$$

Пусть теперь на многообразии M^{2n} действует оператор g , $g^p = 1$ с конечным числом неподвижных точек $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r$, т.е. задано действие группы $\mathbb{Z}/p$. Пусть якобиан $\mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g)$ отображения g в точке $\mathcal{P}_j$ имеет собственные числа $\lambda_k^{(j)} = \exp(2\pi i x_k^{(j)}/p)$, $x_k^{(j)} \neq 0 \pmod{p}$, $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, r$. Как следует из результатов [7], см. также [6], эквивариантный индекс $\operatorname{ind}(g, L^{(q)})$ комплекса $L^{(q)}$, равен сумме функций неподвижных точек $\sigma_{L^{(q)}}(\mathcal{P}_j)$, которые получаются стандартным способом из формулы для индекса $L^{(q)}$. Далее, $\frac{1}{p} \sum_{l \in \mathbb{Z}/p} \operatorname{ind}(g^l, L^{(q)}) =$

$s(q)$ – степенной ряд от q , коэффициентом которого при q^k является альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g в когомологиях комплекса, который является коэффициентом при q^k в разложении $L^{(q)}$. Таким образом, $s(q)$ – ряд с целыми коэффициентами. Кроме того, $\operatorname{ind}(1, L^{(q)}) = \operatorname{sign}(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbb{C}} M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbb{C}} M)$.

Поэтому (далее $\zeta = e^{2\pi i/p}$)

$$\begin{aligned} \text{sign}(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbb{C}} M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbb{C}} M) &= \text{ind}(1, L^{(q)}) = - \sum_{l=1}^{p-1} \text{ind}(g^l, L^{(q)}) + ps(q) \\ &= - \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \zeta^{lx_k^{(j)}}}{1 - \zeta^{lx_k^{(j)}}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + q^i \zeta^{-lx_k^{(j)}})(1 + q^i \zeta^{lx_k^{(j)}})}{(1 - q^i \zeta^{-lx_k^{(j)}})(1 - q^i \zeta^{lx_k^{(j)}})} \right) + ps(q). \end{aligned}$$

Левая часть этого соотношения лежит в $\mathbb{Z}[[q]]$. Погрузим обе части в p -адические пополнения соответствующих полей и рассмотрим теоретико-числовой след $\text{Tr}: \mathbb{Q}_p\{q\}(\zeta) \rightarrow \mathbb{Q}_p\{q\}$, где $\mathbb{Q}_p\{q\}$ – поле лорановских рядов от q с рациональными p -адическими коэффициентами, а $\mathbb{Q}_p\{q\}(\zeta)$ – его расширение элементом ζ . Тогда из последнего соотношения и (1) получаем

$$\varphi(M) \equiv - \sum_{j=1}^r \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{1 + \zeta^{x_k^{(j)}}}{1 - \zeta^{x_k^{(j)}}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + q^i \zeta^{-x_k^{(j)}})(1 + q^i \zeta^{x_k^{(j)}})(1 - q^i)^2}{(1 - q^i \zeta^{-x_k^{(j)}})(1 - q^i \zeta^{x_k^{(j)}})(1 + q^i)^2} \right) \right) \pmod{p\mathbb{Z}_p[[q]]}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $P(\delta, \varepsilon)$ – многочлен от δ, ε такой, что $P(\delta, \varepsilon) \equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p[[q]]}$. Тогда $P(\delta, \varepsilon) \equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]}$, т.е. все коэффициенты $P(\delta, \varepsilon)$ лежат в $p\mathbb{Z}_p$.

Из этой леммы, последнего соотношения и разложения $f(x)$ получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Если на M^{2n} действует трансверсальный эндоморфизм g такой, что $g^p = 1$, то имеет следующая формула для эллиптического рода $\varphi(M^{2n})$:

$$\varphi(M) \equiv - \sum_{j=1}^r \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{f(\tau, -2\pi i x_k^{(j)}/p)} \right) = - \sum_{j=1}^r \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k}} \right) \pmod{p\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]},$$

где в правой части стоит теоретико-числовой след $\text{Tr}: \mathbb{Q}_p(\delta, \varepsilon)(\zeta) \rightarrow \mathbb{Q}_p(\delta, \varepsilon)$; $\theta = f(-2\pi i/p)$, $[u]_m = f(mf^{-1}(u))$ – степенная система, связанная с эллиптическим родом (см. [4]).

В работе [3] были введены уравнения Коннера–Флойда для наборов весов $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, x_k^{(j)} \in \mathbb{Z}/p$ действия группы $\mathbb{Z}/p$ на многообразии M^{2n} . Для эллиптического рода $\varphi: \Omega_U \rightarrow \mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]$,

они имеют следующий вид: $\sum_{j=1}^r \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_m \equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]}$, $m = 0, \dots, n-1$, $\langle \rangle_k$

обозначает коэффициент при u^k .

ТЕОРЕМА 2. Имеется следующее соотношение $\pmod{p\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]}$, связывающее формулу из теоремы 1 и уравнения Коннера–Флойда для эллиптического рода:

$$- \sum_{j=1}^r \text{Tr} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{[\theta]_{x_k^{(j)}}} \right) \equiv \sum_{j=1}^r \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_n + \sum_{m=0}^{n-1} H_{n-m} \sum_{j=1}^r \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_m$$

где H_i – коэффициенты из кольца $\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]$.

Автор выражает благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. В.М. Бухштаберу и акад. С.П. Новикову за постановку задачи и В.М. Бухштаберу за полезные рекомендации и стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ochanine S. // Topology. 1987. V. 26. P. 143–151. [2] Новиков С.П. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 855–951. [3] Новиков С.П. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. С. 1245–1263. [4] Бухштабер В.М., Новиков С.П. // Матем. сб. 1971. Т. 84. С. 81–118. [5] Атья М., Ботт Р. // Математика. 1966. Т. 10. № 4. С. 101–139. [6] Hirzebruch F., Berger T., Jung R. Manifolds and Modular Forms // A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn. Second Edition, 1994. [7] Атья М., Зингер И. // УМН. 1969. Т. 24. № 1. С. 127–182.