Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Бесконечномерные обобщенные цепные дроби, квадратичные вычеты и невычеты и эргодическая теория, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:33:47

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ, КВАДРАТИЧНЫЕ ВЫЧЕТЫ И НЕВЫЧЕТЫ И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

В работах [1], [2] было введено понятие (A, ω) -цепной дроби произвольного вещественного n -мерного вектора, обобщающее обычную цепную дробь действительного числа и зависящее от некоторого преобразования A n -мерного пространства и вектора ω , принадлежащего единичному n -мерному тору. В настоящей работе мы используем конструкцию (A, ω) -цепной дроби из [1] и [2] для определения (A, p, ω) -цепной дроби произвольного бесконечномерного вектора $x = (x_1, x_2, \dots)$ с целочисленными координатами x_n ($n = 1, 2, \dots$), устанавливаем основные свойства этих дробей (теоремы 1, 2) и применяем их к классической проблеме [4] о распределении квадратичных вычетов и невычетов по простому модулю (теорема 3). Доказательство использует эргодическую теорию (теорема 4).

Введем следующие объекты:

- 1) последовательность $p = (p_1, p_2, \dots)$, состоящую из бесконечного числа попарно различных, взаимно простых натуральных чисел p_n ($n = 1, 2, \dots$);
- 2) последовательность $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$, состоящую из целых чисел γ_n , у которой при любом $n = 1, 2, \dots$ число γ_n взаимно просто с p_n ;
- 3) дискретную окружность S_n , состоящую из вычетов $0, 1, \dots, p_n - 1$ по модулю p_n , и такую меру μ_n на S_n , что мера каждого элемента из S_n равна p_n^{-1} ;
- 4) тор T , являющийся декартовым произведением окружностей S_n по всем $n = 1, 2, \dots$, точка которого есть такой вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, что $\omega_n \in S_n$ ($n = 1, 2, \dots$), и меру mes на T , являющуюся произведением мер μ_n по всем n ;
- 5) преобразование A , переводящее вектор $x = (x_1, x_2, \dots)$ в вектор $x' = Ax = (x'_1, x'_2, \dots)$ с координатами

$$x'_n = x_n + \gamma_n \quad (n = 1, 2, \dots);$$

- 6) преобразование $\hat{A}$ тора T , переводящее вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in T$ в вектор $\omega' = \hat{A}\omega = (\omega'_1, \omega'_2, \dots)$ с координатами

$$\omega'_n = \omega_n - \gamma_n \pmod{p_n} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

- 7) для любого вектора $x = (x_1, x_2, \dots)$ вводим векторы

$$[x] = ([x]_1, [x]_2, \dots), \quad \{x\} = (\{x\}_1, \{x\}_2, \dots),$$

у которых при $n = 1, 2, \dots$ координата $[x]_n$ есть целая часть числа x_n/p_n , а $\{x\}_n = x_n - p_n[x]_n$.

Для любого вектора $\omega \in T$ введем (A, p, ω) -цепную дробь произвольного бесконечномерного вектора x с целыми координатами, которая может быть как конечной, так и бесконечной, обозначается через $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A, p, \omega}$, если она конечна, через $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, p, \omega}$, если она бесконечна, и определяется с помощью рекуррентной процедуры, состоящей из конечного или бесконечного числа шагов, а на произвольном шаге с номером k ($k = 0, 1, 2, \dots$) осуществляются следующие три операции:

- а) определяется вектор $q^{(k)} = [x^{(k)}]$, где $x^{(k)}$ — вектор, полученный на $(k - 1)$ -м шаге, а $x^{(0)} = x$;
- б) сравниваются векторы $\delta^{(k)} = \{x^{(k)}\}$ и ω ;
- в) процесс прекращается, если $\delta^{(k)} = \omega$, и определяется вектор $x^{(k+1)} = A\delta^{(k)}$, если $\delta^{(k)} \neq \omega$.

Для (A, p, ω) -цепных дробей справедливы теоремы 1, 2, 3 из [1]. Кроме того, справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Omega \subset T$, $\text{mes } \Omega > 0$. Тогда для почти всех $x \in T$ (в смысле меры mes на T) существует такое $\omega = \omega(x) \in \Omega$, что (A, p, ω) -цепная дробь вектора x конечна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A,p,\omega}$. При $\nu = 0, 1, \dots$ введем (A, p, ω) -подходящие дроби $S^{(\nu)} = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A,p,\omega} : S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots)$ – бесконечномерный вектор, у которого при $n = 0, 1, \dots$ координата

$$S_n^{(\nu)} = q_n^{(0)} p_n + (\dots (-\gamma_n + q_n^{(\nu-1)} p_n + (-\gamma_n + q_n^{(\nu)} p_n + \omega_n)) \dots),$$

где $q_n^{(k)}$ и ω_n ($k = 0, \dots, \nu$) – координаты векторов

$$q^{(k)} = (q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, \dots), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть дана бесконечная (A, p, ω) -цепная дробь вектора $x = (x_1, x_2, \dots)$, $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots)$ – (A, p, ω) -подходящие дроби вектора x . Тогда x есть предельная точка последовательности $S^{(\nu)}$ в следующем смысле: для каждого натурального N существует такое ν , что у вектора $S^{(\nu)}$ координата $S_n^{(\nu)} = x_n$, если $1 \leq n \leq N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Введем преобразование A^* , которое совпадает с преобразованием A , если в его определении положить $\gamma_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\psi(n)$ – произвольная вещественная функция такая, что при всех $n \geq 1$ $\psi(n) \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$ и $|\psi^k(n)| \leq c\sqrt{n}$, где k – натуральное число, k и c – константы, не зависящие от n ; $p = (p_1, p_2, \dots)$ – последовательность, состоящая из попарно различных простых чисел p_n ($n = 1, 2, \dots$) такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi(p_n)|^{-k} < \infty$; $x = (x_1, x_2, \dots) \in T$. Тогда существует и конструктивно строится множество $\Omega \subset T$, такое что выполняются следующие утверждения:

1) если существует такой вектор $\omega \in \Omega$, что (A^*, p, ω) -цепная дробь вектора x конечна и имеет вид $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A^*, p, \omega}$, то существует такая константа d , зависящая только от p и $\psi(n)$, что при всех $n = 1, 2, \dots$ среди целых чисел z , расположенных в области

$$(1) \quad x_n < z < x_n + d + \nu + \psi(p_n),$$

содержатся квадратичные вычет и невычет по модулю p_n , и множество векторов $x \in T$, для которых выполнено это утверждение, имеет в T дополнение, мера mes которого равна нулю;

2) если при $\omega \in \Omega$ вектор x разлагается в бесконечную (A^*, p, ω) -цепную дробь, а $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}, \dots)$ – такая (A^*, p, ω) -подходящая дробь, что при $1 \leq n \leq N$ выполняются равенства $S_n^{(\nu)} = x_n$, то в области (1) содержатся квадратичные вычет и невычет по модулю p_n , если $1 \leq n \leq N$.

ТЕОРЕМА 4. Преобразование $\hat{A}$ на торе T строго эргодично относительно меры mes .

Доказательство теоремы 3 основано на доказательстве теоремы 2 из [3], а доказательство теоремы 4 использует доказательство теоремы 1 из [3] и [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пустыльников Л. Д. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 6. С. 144–147. [2] Pustyl'nikov L. D. Ergodic Theory and some Number Theory Problems. Preprint Eorshungsinstitut für Mathematik ETH. Zürich, July, 1994. [3] Пустыльников Л. Д. // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 185–186. [4] Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1962. [5] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М., 1975.