Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Серебряный, Определимость множества всех истинных предложений арифметики с помощью предельного перехода, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm843>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:41:51

ОПРЕДЕЛИМОСТЬ МНОЖЕСТВА ВСЕХ ИСТИННЫХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ АРИФМЕТИКИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА

А. И. СЕРЕБРЯНЫЙ

Пусть V_n – множество гёделевых номеров предложений формальной арифметики (первого порядка), каждое из которых содержит не более n вхождений логических связок и кванторов и истинно в стандартной интерпретации. Известно (см., например, [1, теорема 19.1]), что множество V_n определимо в арифметике. Иначе говоря, существует арифметическая формула $V^n(x)$ с одной свободной переменной x , такая, что для каждого натурального k принадлежность $k \in V_n$ содержательно эквивалентна истинности предложения $V^n(k)$.

С другой стороны, теорема Тарского утверждает, что множество V гёделевых номеров *всех* истинных предложений, т.е. объединение всех V_n , не определимо в арифметике.

Мы покажем, что V_n и V могут быть охарактеризованы как представители класса так называемых L -множеств; последние порождаются с помощью некоторой операции предельного перехода. Хотя построение иерархии L -множеств предполагает выход за рамки арифметической определимости, из дальнейшего будет видно, что при этом не привлекаются неконструктивные средства.

Мы будем предполагать, что фиксирована одна из обычных нумераций вычислимых функций, рекурсивно перечислимых (тем самым также и рекурсивных) множеств, а также упорядоченных пар натуральных чисел.

L -множества являются некоторыми множествами натуральных чисел. Определим L -множества уровня n и их L -номера при $n = 0, 1, 2, \dots$. Рекурсивные множества, и только их, будем называть L -множествами уровня 0; если g – номер некоторого рекурсивного множества, то L -номером этого множества является, по определению, номер упорядоченной пары $(0, g)$. Пусть теперь $n > 0$ и L -множества уровня $n - 1$ вместе с их L -номерами уже определены. Пусть φ – вычислимая функция, перечисляющая (возможно, с повторениями) L -номера последовательности L -множеств уровня $n - 1$, сходящейся к некоторому множеству E (в смысле обычной сходимости последовательности соответствующих характеристических функций). Тогда E называется L -множеством уровня n , а его L -номер определяется как номер упорядоченной пары (n, g) , где g – номер функции φ . Будем называть L -множествами уровня n только множества E , полученные описанным образом. Это определение можно продолжить очевидным образом по трансфинитной индукции. В частности, всякое L -множество первого “бесконечного” уровня ω определяется как предел последовательности L -множеств конечного уровня с вычислимой последовательностью их L -номеров.

Обозначим через K класс множеств из иерархии Клини–Мостовского. Элементами каждого множества класса K являются кортежи натуральных чисел, имеющие одинаковую длину. Пусть K_1 – класс тех множеств $E \in K$, для которых эта длина равна 1 (т.е. элементами E служат натуральные числа). Справедливы следующие утверждения (см. [2]–[4]): (1) каждое L -множество конечного уровня принадлежит K_1 ; (2) каждое множество из K_1 является L -множеством конечного уровня.

Хорошо известно, что каждое множество, определяемое в арифметике, принадлежит классу K . Поскольку множества V_n определимы, имеем $V_n \in K_1$, и ввиду утверждения (2) имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Каждое из множеств V_n является L -множеством конечного уровня.*

Нам понадобится следующая лемма, дополняющая утверждение (2):

ЛЕММА 1. *Существует примитивно-рекурсивная функция α , такая что для каждого s , являющегося гёделевым номером некоторой формулы $W(x)$, определяющей некоторое множество E (так что $E \in K_1$), число $\alpha(s)$ является L -номером этого E .*

Анализ доказательства теоремы 19.1 в книге [1] приводит к следующему выводу:

ЛЕММА 2. *Существует примитивно-рекурсивная функция β , перечисляющая гёделевы номера последовательности вышеупомянутых формул $V^n(x)$, определяющих множества V_n .*

ТЕОРЕМА 2. *Множество V гёделевых номеров истинных предложений арифметики первого порядка является L -множеством уровня ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку, очевидно, $V = \lim V_n$, утверждение теоремы получается путем применения сначала леммы 2, затем леммы 1.

Ввиду упомянутой теоремы Тарского отсюда, в частности, вытекает существование L -множеств уровня ω , отличных от всех L -множеств конечного уровня.

КОММЕНТАРИЙ. Согласно Брауэру, а также согласно философии квазиэмпиризма (см., например, [5]) математические утверждения о бесконечных множествах, полученные путем экстраполяции свойств конечных множеств, не вполне достоверны. Брауэр предлагал исключить экстраполяцию из математики. Можно идти в противоположном направлении и пытаться формализовать экстраполяцию. Настоящая работа идейно связана с одной попыткой такого рода [8], [2], [4], [9].

В работах С. Феффермана и др. (см. [10]) множество V характеризуется способом, аналогичным описанному здесь, но менее конструктивным. Эти авторы используют не любые, а только монотонно возрастающие последовательности множеств.

Первые результаты, относящиеся к конструктивному пределу множеств, см. в [6], [7] и [8]. В [2], [3] и [4] рассмотрена операция “итерированного” перехода к пределу и показано, что она порождает в точности класс K_1 . В [9] опубликовано (без доказательства) утверждение, соответствующее теореме 2 настоящей работы.

Автор благодарен Ю. Т. Медведеву за помощь при превращении чернового варианта работы в окончательный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994. [2] Серебряный А. И. // Научно-техническая информация. Сер. 2. 1973. № 2. С. 8–15. [3] Shubert L. K. // Assoc. Comput. Machinery. 1974. V. 21. № 3. Р. 436–445. [4] Серебряный А. И. Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода. Вып. 5. М.: ВИНТИ, 1974. [5] Lakatos Imre. // Brit. J. Phil. Sci. 1976. V. 27. Р. 201–223. [6] Gold E. M. // J. Symb. Logic. 1965. V. 30. № 1. Р. 28–48. [7] Gold E. M. // Inform. and Control. 1967. V. 10. № 5. Р. 447–474. [8] Серебряный А. И. Семантические проблемы информатики. М.: ВИНТИ, 1971. [9] Серебряный А. И. // Семиотика и информатика. Вып. 28. 1986. С. 167–170. [10] Фефферман С. // Математика. 1971. Т. 15. № 5. С. 84–139.

Принято редколлегией
29.10.1996