Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Наследственные π -инъективные кольца, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm844>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:57:11

НАСЛЕДСТВЕННЫЕ π -ИНЪЕКТИВНЫЕ КОЛЬЦА

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Через $E(M)$ обозначается инъективная оболочка модуля M . Модуль M называется π -инъективным при выполнении следующих эквивалентных [1] условий: (1) для любых подмодулей N_1, N_2 модуля M таких, что $N_1 \cap N_2 = 0$, существует такое прямое разложение $M = M_1 \oplus M_2$, что $N_i \subseteq M_i$; (2) $f(M) \subseteq M$ для любого идемпотентного эндоморфизма f модуля $E(M)$. Модуль M называется *непрерывным*, если каждый его подмодуль является существенным подмодулем прямого слагаемого модуля M , причем каждый подмодуль модуля M , изоморфный прямому слагаемому модуля M , является прямым слагаемым модуля M . Все инъективные модули непрерывны. Непрерывные модули π -инъективны [1]. Кольцо целых чисел является наследственным π -инъективным, но не непрерывным кольцом. В [2] доказана

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Наследственное справа самоинъективное справа кольцо является полупростым артиновым кольцом.*

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 2. *A – наследственное справа π -инъективное справа кольцо $\iff A$ – конечное прямое произведение простых артиновых колец и наследственных справа нётеровых справа областей.*

Доказательство теоремы 2 разобьем на ряд лемм. Через $Q_{\max}(A)$ обозначается максимальное правое кольцо частных кольца A . Модуль, не содержащий бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей, называется *конечномерным*.

ЛЕММА 1. *Пусть M – π -инъективный модуль. Тогда:*

- (1) *если $\text{End}(M)$ не содержит бесконечного ортогонального множества идемпотентов, то M – конечномерный модуль;*
- (2) *если Q – существенное расширение модуля M , $f \in \text{End}(Q)$, $f^2 = f$, то $f(M) \subseteq M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) проверяется непосредственно. (2) Пусть $E = E(Q)$. Тогда $E = E(M) = E_1 \oplus E_2$, где $E_1 = E(f(Q))$, $E_2 = E((1-f)(Q))$. Пусть $g: E \rightarrow E_1$ – проекция с ядром E_2 . По условию $f(M) = g(M) \subseteq M$.

ЛЕММА 2. *Пусть A – кольцо, $Q \equiv Q_{\max}(A)$. Тогда:*

- (1) *если B – ненулевой правый идеал кольца A , то BQ – ненулевой правый идеал кольца Q , $A \cap BQ$ – ненулевой правый идеал кольца A , причем $(BQ)_A$ и $A \cap BQ$ – существенные расширения модуля B_A ;*
- (2) *если B – замкнутый правый идеал кольца A , то $B = A \cap BQ$;*
- (3) *если B, C – такие правые идеалы кольца A , что $B \cap C = 0$, то $BQ \cap CQ = 0$;*
- (4) *если $B_A = \bigoplus_{i \in I} B_i$ – правый идеал кольца A , то $(BQ)_Q = \bigoplus_{i \in I} (B_i Q)$;*
- (5) *если A – π -инъективное справа кольцо, то A содержит все идемпотенты кольца Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Достаточно доказать, что $(BQ)_A$ – существенное расширение модуля B_A . Пусть $0 \neq x = \sum_{i=1}^n b_i q_i \in BQ$, $b_i \in B$, $q_i \in Q$. Так как Q_A – рациональное расширение модуля A_A , то существует такой элемент $a_1 \in A$, что $0 \neq x a_1 = \sum_{i=1}^n b_i q_i a_1 \in BQ$, $q_1 a_1 \in A$, $b_1 q_1 a_1 \in B$. Аналогично, существует такой элемент $a_2 \in A$, что $0 \neq x a_1 a_2 = \sum_{i=1}^n b_i q_i a_1 a_2 \in BQ$, $q_2 a_1 a_2 \in A$. Кроме того, $b_1 q_1 a_1 a_2 \in B$. Поэтому существуют такие элементы $a_1, \dots, a_n \in A$, что $0 \neq x a_1 \cdots a_n \in B$. (2) следует из (1). (3) Пусть $\overline{B}, \overline{C}$ – замыкания правых идеалов B и C в кольце A . Тогда $\overline{B} \cap \overline{C} = 0$. По (2) $\overline{B} = A \cap \overline{BQ}$, $\overline{C} = A \cap \overline{CQ}$. Тогда $0 = (A \cap \overline{BQ}) \cap (A \cap \overline{CQ}) = A \cap (\overline{BQ} \cap \overline{CQ})$. Так как Q_A – существенное расширение модуля A_A , то $\overline{BQ} \cap \overline{CQ} = 0$. Поэтому $BQ \cap CQ = 0$. (4) следует из (3) и того, что $(\sum_{i \in J} B_i)Q = \sum_{i \in J} (B_i Q)$ для любого подмножества $J \subseteq I$. (5) следует из леммы 1(2) и того, что Q_A – существенное расширение модуля A_A .

ЛЕММА 3. Пусть A – несингулярное справа кольцо, $Q \equiv Q_{\max}(A)$. Тогда Q – самоинъективное справа регулярное кольцо, $Q = S \times T$, где S – строго регулярное самоинъективное кольцо, T порождается (как кольцо) идемпотентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3, 2.31, 2.34, 2.35, 2.37].

ЛЕММА 4.

Пусть A – несингулярное справа π -инъективное справа кольцо, $Q = Q_{\max}(A)$, S – правый идеал кольца Q . Тогда:

- (1) $A = B \times T$, где $Q_{\max}(B) \equiv S$ – строго регулярное самоинъективное кольцо, B – редуцированное кольцо, содержащее все идемпотенты кольца S , T – самоинъективное справа регулярное кольцо, порожденное (как кольцо) идемпотентами;
- (2) $S = (S \cap A)Q$;
- (3) если t – кардинальное число, причем $S \cap A$ – t -порожденный правый идеал кольца A , то S – t -порожденный правый идеал кольца A ;
- (4) если $(S \cap A)_A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, то $S_Q = \bigoplus_{i \in I} A_i Q$;
- (5) если $S \cap A$ является прямой суммой счетно порожденных правых идеалов кольца A , то S – проективный правый идеал кольца Q ;
- (6) если $S \cap A$ – проективный правый идеал кольца A , то S – проективный правый идеал кольца Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из лемм 3 и 2(5). (2) По лемме 3 Q – регулярное кольцо. Поэтому существует такое множество $\{e_i\}$ идемпотентов кольца Q , что $S = \sum_{i \in I} e_i Q$. По лемме 2(5) все идемпотенты e_i лежат в $S \cap A$. Поэтому $S = (S \cap A)Q$. (3) следует из (2). (4) следует из (2) и леммы 2(4). (5) По (3) и (4) $S = \bigoplus_{i \in I} S_i$, где все S_i – счетно порожденные правые идеалы регулярного кольца Q . Тогда все правые идеалы S_i проективны [4, 2.15]. Поэтому S_A – проективный модуль. (6) следует из (5) и того, что по теореме Капланского каждый проективный модуль является прямой суммой счетно порожденных модулей.

ЛЕММА 5. (1) A – π -инъективная справа область $\iff A$ – конечномерная справа область;

(2) A – несингулярное справа π -инъективное справа кольцо, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов $\iff A$ – конечное прямое произведение простых артиновых колец и конечномерных справа областей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как конечномерная справа область является правой областью Оре, то (1) проверяется непосредственно. (2) Импликация $\Leftarrow$ проверяется с помощью (1). Импликация $\Rightarrow$ следует из леммы 4(1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Импликация $\Leftarrow$ следует из леммы 5(2). Докажем импликацию $\Rightarrow$. Пусть $Q \equiv Q_{\max}(A)$. Наследственное справа кольцо A несингулярно справа. По лемме 4(6) Q наследственно справа. По лемме 3 Q – самоинъективное справа кольцо. По теореме 1 Q – полупростое артиново кольцо. Тогда A конечномерно справа. Наследственное справа конечномерное справа кольцо A является нётеровым справа кольцом [3, следствие 5.20]. Далее применим лемму 5(2).

СЛЕДСТВИЕ 1. Наследственное справа непрерывное справа кольцо является полупростым артиновым кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 2 и того, что непрерывное справа несингулярное справа кольцо является регулярным (см., например, [1, теорема 7.1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jeremy L. // Canad. Math. Bull. 1974. V. 17. № 2. P. 217–228. [2] Osofsky B. L. // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V. 19. № 6. P. 1383–1384. [3] Goodearl K. R. Ring Theory. Nonsingular Ring and Modules. New York: Marcel Dekker, 1976. [4] Goodearl K. R. Von Neumann Regular Rings. London: Pitman, 1979.