Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Турчин, Гомологии комплексов двусвязных графов, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:54:41

ГОМОЛОГИИ КОМПЛЕКСОВ ДВУСВЯЗНЫХ ГРАФОВ

В. Э. Турчин

В работе доказано, что гомологии комплексов двусвязных графов нетривиальны только в размерности $2n - 4$, и их ранг равен $(n - 2)!$. Гомологии этих комплексов представляют существенный интерес в вычислении гомологий пространств узлов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, см. [5]. Этот же результат почти одновременно был получен с использованием принципиально иной техники группой математиков [2].

Пусть M_n — множество точек, занумерованное числами $1, 2, \dots, n$. Мы будем рассматривать графы с вершинами из множества M_n без петель и кратных ребер. Связный граф называется двусвязным, если при удалении из него любой вершины он не теряет связность.

Сопоставим множеству M_n симплекс с $n(n - 1)/2$ вершинами. Каждой вершине симплекса соответствует отрезок, соединяющий пару различных точек нашего множества. Тогда каждому графу (с непустым множеством ребер) на M_n отвечает грань симплекса, вершины которой суть ребра графа.

Объединение всех граней, соответствующих несвязным (не двусвязным) графам, является симплициальным комплексом. Рассматривая факторы комплекса всех граней симплекса по этим подкомплексам, получаем комплексы Δ_n, Δ_n^2 связных (соответственно, двусвязных) графов.

Пусть G — произвольная (абелева) группа коэффициентов.

ЛЕММА 0 [4], [1], [3]. $H_i(\Delta_n, *; G) = 0$ при $i \neq n - 2$, и $H_{n-2}(\Delta_n, *; G) = G^{(n-1)!}$.

ТЕОРЕМА. $H_i(\Delta_n^2, *; G) = 0$ при $i \neq 2n - 4$ и $H_{2n-4}(\Delta_n^2, *; G) = G^{(n-2)!}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим фильтрацию в комплексе Δ_n^2 : $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_{n-1} = \Delta_n^2$, где X_i порождено графами с не более чем i ребрами, выходящими из точки $\{1\} \in M_n$.

ЛЕММА 1. $H_j(X_i, X_{i-1}; G) = 0$, если $i \neq n - 1$, $j \neq 2n - 4$, и $H_{2n-4}(X_{n-1}, X_{n-2}; G) \simeq G^{(n-2)!}$.

Теорема есть очевидное следствие этой леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Если $i = n - 1$, то X_{n-1}/X_{n-2} будет комплексом, состоящим из двусвязных графов с $(n - 1)$ ребром, выходящим из первой вершины.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Граф, в котором первая вершина соединена со всеми оставшимися, двусвязен тогда и только тогда, когда его подграф, состоящий из всех точек кроме точки 1, связан.*

Доказательство предложения 1 очевидно.

СЛЕДСТВИЕ. $H_*(X_{n-1}, X_{n-2}; G) \simeq H_{*-(n-1)}(\Delta_{n-1}, *; G)$.

Применяя лемму 0, получаем утверждение теоремы при $i = n - 1$.

Обозначим через $R_i(n)$ подкомплекс комплекса X_i/X_{i-1} , соответствующий графам, в которых точка 1 соединяется только с точками $2, 3, \dots, i + 1$.

Тогда $H_*(X_i, X_{i-1}; G) \simeq (H_*(R_i(n), *; G)) \binom{n-1}{i}$, так как X_i/X_{i-1} является букетом $\binom{n-1}{i}$ изоморфных $R_i(n)$ комплексов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $H_*(R_i(n), *; G) = 0$ (при $0 < i < n - 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Будем доказывать индукцией по i .

Пусть $i = 1$, тогда это очевидно, так как подобных графов просто не существует.

Предположим, что это доказано для всех $i = 1, 2, \dots, k-1$, и докажем это для $i = k > 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ребро двусвязного графа *принципиально*, если для этого ребра граф перестает быть двусвязным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1'. Принципиальное ребро двусвязного графа *принципиально относительно точки* p , если без этого ребра и без точки p граф перестает быть связным.

Рассмотрим следующую фильтрацию на комплексе $R_k(n)$: граф принадлежит члену Y_i фильтрации, если в нем содержится $\leq i$ ребер, не совпадающих с ребром $(2, 3)$. Дифференциал d_0 спектральной последовательности, определенной по этой фильтрации, действует нулем на графах, не содержащих ребро $(2, 3)$, либо же, если оно есть, удаляет его. В частности, первый член E^1 этой спектральной последовательности состоит из графов, в которых ребро $(2, 3)$ принципиально. Итак, используя эту спектральную поверхность, мы получаем, что гомологии комплекса $R_k(n)$ изоморфны гомологиям своего подкомплекса, состоящего только из графов, в которых ребро $(2, 3)$ принципиально. Этот подкомплекс есть букет 2^{n-3} комплексов. Действительно, ребро $(2, 3)$ любого такого графа Γ может быть принципиальным только относительно точки 1 (так как Γ содержит ребра $(1, 2)$ и $(1, 3)$), что означает разбиение множества точек $4, 5, \dots, n$ на два подмножества: M_2 и M_3 , где M_2 (соответственно, M_3) — точки, которые последовательностью ребер, не совпадающих с ребром $(2, 3)$ и не проходящих через первую вершину, можно соединить с точкой 2 (соответственно, с точкой 3).

Для всякого разбиения множества $\{4, 5, \dots, n\}$ на два подмножества M_2 и M_3 мы получаем некоторый комплекс. Мы докажем, что каждый такой комплекс ацикличесен.

Рассмотрим произвольный граф, имеющий ребра $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ и такой, что его подграф, получающийся удалением из него вершины $\{1\}$ и ребра $(2, 3)$, имеет две связные компоненты $M_2 \cup \{2\}$ и $M_3 \cup \{3\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Такой граф двусвязен тогда и только тогда, когда оба подграфа, порожденные вершинами $\{1\} \cup \{2\} \cup M_2$ (соответственно, $\{1\} \cup \{3\} \cup M_3$), двусвязны.

Утверждение доказывается непосредственной проверкой.

СЛЕДСТВИЕ. Любой подкомплекс (из 2^{n-3} возможных) гомотопически эквивалентен двукратной надстройке произведения $R_{k_2}(n_2) \times R_{k_3}(n_3)$, где $k_2 + k_3 = k$, $n_2 + n_3 = n + 1$ ($k_i \geq 1$, $k_i < n_i$). Но $k < n - 1$, следовательно, существует $i \in \{2, 3\}$: $k < n_i - 1$, а значит, $H_*(R_k(n_i), *; G) = 0$ (по предположению индукции). Таким образом, $H_*(\Sigma^2(R_{k_2}(n_2) \times R_{k_3}(n_3)), *; G) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод доказательства предложения 2 применим и для вычисления гомологий комплекса связных графов (лемма 0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Björner A. // Handbook of Combinatorics / ed. R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász. Amsterdam: North-Holland, 1995. P. 1819–1872. [2] Babson E., Björner A., Linusson S., Shareshian J., Welker V. Complexes of not i -connected graphs – extended abstract (to appear). [3] Björner A., Walker J. W. // European J. Combin. 1983. V. 4. № 1. P. 11–19. [4] Vassiliev V. A. // The I. M. Gelfand's Seminars / ed. L. Corwin. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 223–235. [5] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: Фазис, 1997.

Независимый Московский университет

Принято редколлегией
27.12.1996