Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Фикера, Об одной граничной задаче, связанной с реакцией полупространства на короткий лазерный импульс, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm846>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 04:42:15

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С РЕАКЦИЕЙ ПОЛУПРОСТРАНСТВА НА КОРОТКИЙ ЛАЗЕРНЫЙ ПУЛЬС

Г. ФИКЕРА

Задача, которая изучается в этой заметке, была рассмотрена Р. Хетнарским и Ж. Игнацаком [1] в рамках обобщенной термоупругости. Из анализа задачи они вывели важные механические следствия. Здесь приводится математическое исследование этой задачи. Она сводится к рассмотрению следующей смешанной граничной задачи

$$(1) \quad \begin{aligned} \Gamma \varphi = f(x, t) \quad \text{в } Q, \quad \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad x > 0, \\ \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(0, t) = 0, \quad k = 0, 2, \quad t > 0, \end{aligned}$$

где $\Gamma \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + t_0 \frac{\partial^4}{\partial t^4} - (1 + t_0 + \varepsilon t^0) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^3}{\partial t^3} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}$, $Q = \{x, t : x > 0, t > 0\}$, t_0, t^0, ε — некоторые положительные постоянные.

Предполагается, что выполнено условие H_0 : функции $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$ непрерывны в $\overline{Q}$. Решение задачи (1) ищется в классе $C^3(\overline{Q}) \cap H^4(E)$, где E — любая ограниченная область, содержащаяся в Q . Для решения задачи (1) рассматривается вспомогательная задача

$$(2) \quad \begin{aligned} \Gamma u = f(x, t) \quad \text{в } R_{a,T}, \quad u(0, t) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = u(a, t) = \frac{\partial^2 u(a, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < t < T, \\ \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad 0 < x < a, \quad \text{где } R_{a,T} = \{x, t : 0 < x < a, 0 < t < T\}. \end{aligned}$$

Решение задачи (2) получено в виде

$$(3) \quad u(x, t) = 2a^{-1} \sum_{h=1}^{\infty} u^h(t) \sin \lambda_h x, \quad \lambda_h = \frac{h\pi}{a}.$$

Доказано, что ряд (3) и ряды, полученные его дифференцированием q раз по t и p раз по x , сходятся абсолютно и равномерно в $R_{a,T}$ при $p + q \leq 3$ и сходятся в $L^2(R_{a,T})$ при $p + q = 4$. Получены оценки для сумм этих рядов. Рассматривается также вспомогательная задача Коши: найти функцию $v(x, t)$ такую, что $v \in C^3(\overline{D_{\alpha,\beta}}) \cap H^4(D_{\alpha,\beta})$,

$$(4) \quad \Gamma v = f(x, t) \quad \text{в } D_{\alpha,\beta}, \quad \frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

где $D_{\alpha,\beta}$ — характеристический треугольник с основанием $\alpha \leq x \leq \beta$, $\alpha, \beta = \text{const}$. Задача Коши (4) сводится к задаче Коши для системы уравнений для вектор-функции $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\nu \frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{1}{2}\nu \frac{\partial w_2}{\partial t} + t_0 \frac{\partial w_4}{\partial t} &= (1 + \varepsilon)w_2 - w_4 + f(x, t), \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w_4}{\partial x} - \frac{\partial w_3}{\partial t} = 0, \quad \nu = 1 + t_0 + \varepsilon t^0. \end{aligned}$$

Эта гиперболическая система приводится к каноническому виду. Решение задачи Коши получено методом последовательных приближений и даны оценки решения в соответствующих нормах. Далее, используя совпадения решений задачи (2) и (4) в $R_{a,T} \cap D_{0,a}$, получена

Эта заметка подготовлена к опубликованию О. А. Олейник на основе незаконченной рукописи Г. Фикера. Он скончался 1 июня 1996 г.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи (1) в классе $C^3(\overline{Q}) \cap H^4(E)$ существует, единственно и в соответствующих нормах непрерывно зависит от функции f .*

Построены приближенные решения задачи (1) и даны оценки сверху погрешности этих приближений. Рассматривается поведение решения задачи (1) при $t \rightarrow \infty$. При этом используется преобразование Лапласа. Введем дополнительные условия:

1) H_1 -существуют интегралы

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| dx, \quad \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x \partial t} \right| dx,$$

которые, как функции t , ограничены при $0 < t < \infty$;

2) H_2 -функция $f(x, t)$ — интегрируема в Q ;

3) $H_{3,q}$ -производные $\frac{\partial^k f(x, t)}{\partial t^k}$ ($k = 2, \dots, q$) непрерывны и ограничены в $\overline{Q}$, $f(x, 0) = \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{k-2} f(x, 0)}{\partial t^{k-2}} = 0$ для $x > 0$.

ТЕОРЕМА 2. *При условиях H_0, H_1, H_2 для решения $\varphi(x, t)$ задачи (1) выполнены соотношения:*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x, t) t^{-1} &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) t^{-\sigma} &= 0 \quad \text{для любого } \sigma > 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) (\log t)^{-1} &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^{p+q} \varphi}{\partial x^p \partial t^q}(x, t) &= 0 \quad \text{для } p + q = 2, \end{aligned}$$

при условиях $H_0, H_1, H_2, H_{3,2}$ для любого $x > 0$ и $p + q = 3$, а при условиях $H_0, H_1, H_2, H_{3,3}$ и $p + q = 4$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^{p+q} \varphi(x, t)}{\partial x^p \partial t^q} = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hetnarski R. B., Ignaczak J. Generalized Thermoelasticity: Response of Semispace to a short Laser Pulse // Journal Thermal Stresses. 1994. V. 17. P. 377–396.

Римский университет 1. Национальная Академия деи Линчеи

Принято редколлегией
27.12.1996