Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Динабург, Некоторые вопросы спектральной теории дискретных операторов с квазипериодическими коэффициентами, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 3–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:36:07

УДК 517.984

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. И. ДИНАБУРГ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Часть первая. Одномерные операторы Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом	8
§ 1. Локализация Андерсона для одномерного разностного оператора Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом	8
§ 2. О спектре оператора почти-Матье	15
Дополнение к части первой. О непрерывном одномерном уравнении Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом	18
Часть вторая. Экспоненциальная локализация собственных функций квазипериодических операторов с дальним действием на решетке ..	21
§ 1. Постановка задачи. Формулировка результата	21
§ 2. Доказательство теоремы	23
§ 3. Доказательство индуктивной леммы	32
Список литературы	51

Введение

Эта статья посвящается Якову Григорьевичу Синаю. Он внес важный вклад в разработку методов анализа спектральных свойств операторов с квазипериодическими коэффициентами и получил результаты общего характера о структуре спектра и собственных функций таких операторов (см. [1]–[4], а также [5]).

Основным объектом изучения являются не индивидуальные операторы, а эргодические семейства операторов, зависящие от параметра, значения которого пробегают фазовое пространство некоторой эргодической динамической системы, а коэффициенты индивидуального оператора, входящего в семейство, определяются значениями функций вдоль траектории динамической системы. Подавляющее число результатов о спектральных свойствах таких семейств носит метрический характер и относится

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-16090 и грант № 95-01-00632а).

к почти всем (по инвариантной мере динамической системы), т.е. типичным, значениям параметра.

Для рассматриваемых в этой статье семейств операторов общая постановка задачи может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$ – ν -мерная целочисленная решетка в $\mathbb{R}^\nu$ ($\nu \geq 1$), $n = (n_1, \dots, n_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$, $|n| = \sum_{i=1}^\nu |n_i|$.

Мы рассматриваем динамические системы с ν -мерным дискретным временем, $(X, \{T^n\}, \mu)$, где X – измеримое пространство, $\{T^n\}$ – измеримое действие группы $\mathbb{Z}^\nu$ на X , сохраняющее меру μ , $\mu(X) = 1$.

Пусть $\varphi(n, x)$, $x \in X$, $n \in \mathbb{Z}^\nu$, – функция двух переменных, принадлежащая при любом фиксированном n пространству $L^\infty(X, \mu)$. При любом $\rho \geq 0$ рассмотрим множество функций $\varphi(n, x)$, для которых

$$\|\varphi\|_\rho = \|\varphi(n, x)\|_\rho = \sum_{n \in \mathbb{Z}^\nu} \|\varphi(n, x)\|_\infty e^{\rho|n|} < \infty.$$

Банахово пространство таких функций обозначим B^ρ .

Определим на B^ρ умножение по формуле:

$$(\varphi\psi)(n, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^\nu} \varphi(n - m, T^m x) \psi(m, x)$$

и инволюцию

$$(\varphi(n, x))^* = \overline{\varphi(-n, T^n x)}.$$

Здесь $\varphi(n, x)$, $\psi(n, x) \in B^\rho$, черта означает комплексное сопряжение.

Легко видеть, что $\|\varphi\psi\|_\rho \leq \|\varphi\|_\rho \|\psi\|_\rho$ и $\|\varphi^*\|_\rho = \|\varphi\|_\rho$.

Пространство B^ρ с введенными операциями инволюции и умножения становится $*$ -алгеброй. Для того, чтобы подчеркнуть его алгебраическую структуру, мы будем в дальнейшем пользоваться вместо B^ρ обозначением A^ρ .

Ясно, что $A^\rho \subset A^{\rho_1}$ при $\rho_1 \leq \rho$.

Введем важное для дальнейшего $*$ -представление алгебры A^ρ в алгебру семейств ограниченных операторов в $\ell^2(\mathbb{Z}^\nu)$, зависящих от параметра $x \in X$.

Каждому элементу $\varphi(n, x)$ алгебры A^ρ поставим в соответствие семейство операторов $\hat{\varphi}(x)$, действующих в $\ell^2(\mathbb{Z}^\nu)$. Его матричное представление в естественном базисе $\{e_n\} = \{\delta_{nm}\}$, $n, m \in \mathbb{Z}^\nu$, имеет вид

$$\hat{\varphi}_{mn}(x) = \varphi(n - m, T^m x).$$

Оператор $\hat{\varphi}(x)$ корректно определен для почти всех x и представляет собой ограниченный оператор в $\ell^2(\mathbb{Z}^\nu)$, поскольку его матричные элементы экспоненциально быстро убывают при $|n - m| \rightarrow \infty$.

Мы будем говорить, что семейство операторов $\hat{\varphi}(x)$ определяется функцией $\varphi(n, x)$ и ассоциировано с динамической системой $(X, \{T^n\}, \mu)$. Если $(X, \{T^n\}, \mu)$ – эргодическая система, то семейство $\hat{\varphi}(x)$ называется *эргодическим семейством*.

Очевидно, что если $\hat{\varphi}(x)$ и $\hat{\psi}(x)$ – два семейства операторов, определяемых функциями $\varphi(n, x)$ и $\psi(n, x)$, соответственно, и ассоциированных с одной и той же динамической системой, то семейство $\hat{\eta}(x) = \hat{\varphi}\hat{\psi}(x)$ определяется элементом

$\eta(n, x) = (\varphi\psi)(n, x)$ алгебры A^p . Кроме того, непосредственная проверка показывает, что условие $\varphi^*(n, x) = \varphi(n, x)$ является необходимым и достаточным условием самосопряженности операторов $\widehat{\varphi}(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Семейство $\widehat{\varphi}(x)$ можно рассматривать как оператор со случайными коэффициентами. Случайность определяется случайным выбором точки $x \in X$, распределение вероятностей которой определяется мерой μ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Л. А. Пастуром было показано, что если $\widehat{\varphi}(x)$ – эргодическое семейство операторов, то спектр $\sigma(x)$ и его абсолютно непрерывная $\sigma_{ac}(x)$, сингулярно непрерывная $\sigma_{sc}(x)$ и точечная $\sigma_{pp}(x)$ (замыкание множества собственных значений) компоненты для почти всех x не зависят от x (см., например, [6]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Класс операторов, определенный выше, включает в себя разностный оператор Шрёдингера со случайным потенциалом

$$\Delta + U_x(n),$$

где $(\Delta\psi)(n) = \sum_{m: |n-m|=1} \psi(m)$, потенциал $U_x(n) = U(T^n x)$. В самом деле, достаточно положить $\varphi(n, x) = 1$ при $|n| = 1$, $\varphi(0, x) = U(x)$, $\varphi(n, x) = 0$ при $|n| > 1$.

Опишем некоторые примеры операторов Шрёдингера и связанных с ними семейств операторов, ассоциированных с различными динамическими системами.

а) Модель Андерсона.

Рассмотрим динамическую систему $(X, \{T^n\}, \mu)$, где $X = \prod_{n \in \mathbb{Z}^\nu} X_n$ – произведение изоморфных пространств $X_n \approx \mathbb{R}$, $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}^\nu}$, $x_i \in X_i$, $\mu = \prod_{i \in \mathbb{Z}^\nu} \nu_i$, ν_j – мера на X_j , $\nu_i = \eta$, $T^n x = \{x_{i-n}\}$. Положим $U(x) = x_0(x)$, где $x_0(x)$ – нулевая координата точки x .

Иными словами, при фиксированном x значение потенциала $U(T^n x)$ есть реализация последовательности независимых одинаково распределенных (с распределением η) случайных величин. Такая модель называется моделью Андерсона.

Известно (см., например, [6]), что для $\nu = 1$ и η , имеющих ограниченную плотность с компактным носителем, оператор $\widehat{\varphi}(x)$ имеет чисто точечный спектр для почти всех x по мере μ и его собственные функции экспоненциально убывают при $|n| \rightarrow \infty$.

Принято говорить, что для семейства операторов $\widehat{\varphi}(x)$ имеет место локализация Андерсона, если для почти всех x оператор $\widehat{\varphi}(x)$ имеет чисто точечный спектр, и экспоненциальная локализация Андерсона, если при этом его собственные функции экспоненциально убывают.

Экспоненциальная локализация Андерсона для оператора Шрёдингера со случайным потенциалом имеет место для широкого класса операторов.

В этой статье мы будем изучать условия существования чисто точечного спектра для семейств операторов, ассоциированных с динамическими системами с чисто точечным спектром, которые приводят к операторам с почти периодическими коэффициентами.

Читателя, интересующегося операторами со случайным потенциалом типа модели Андерсона, мы отсылаем к монографии [6], содержащей все основные результаты, полученные до 1990 года включительно, а по поводу более поздних результатов – к статье [7].

б) Оператор Шрёдингера, ассоциированный с алгебраическим автоморфизмом тора Tor^2 .

Пусть $X = \text{Tor}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $x = (x_1, x_2) \in X$, $0 \leq x_1 < 1$, $0 \leq x_2 < 1$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – целочисленная матрица, $\det A = 1$, $\text{tr } A > 2$. Хорошо известно (см., например, [8]), что $(X, \{T^n\}, \mu)$, $n \in \mathbb{Z}^1$, – эргодическая динамическая система, где $Tx = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) \bmod 1$, μ – мера Лебега $dx_1 dx_2$. Более того, динамическая система $(X, \{T^n\}, \mu)$ обладает перемешиванием всех степеней, имеет положительную энтропию Колмогорова–Синая, является K -системой и т. п. (см. [8]). Для произвольной гладкой функции $U(x)$ на X со средним 0 рассмотрим эргодическое семейство операторов в $\ell^2(\mathbb{Z}^1)$:

$$(\hat{\varphi}(x)f)(n) = f(n+1) + f(n-1) + gU(T^n x)f(n),$$

где $f(n) \in \ell^2(\mathbb{Z}^1)$, $n \in \mathbb{Z}^1$, $g > 0$ – параметр. Единственный результат, доказанный к настоящему времени для этого случая, состоит в том, что для достаточно малых g и для $g^{1/2} < |E| < 2 - g^{1/2}$ показатель Ляпунова $\gamma(E)$ положителен для широкого класса функции $U(x)$ (см. [9]).

Напомним определение показателя Ляпунова.

Положим

$$\Psi(n) = \begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix}, \quad U_n(x) = U(T^n x).$$

Уравнение $\psi(n+1) + \psi(n-1) + U_n(x)\psi(n) = E\psi(n)$ может быть переписано в матричной форме:

$$\Psi(n+1) = T_n^x(E)\Psi(n),$$

где

$$T_n^x(E) = \begin{pmatrix} E - U_n(x) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

есть матрица 2-го порядка. Тогда

$$\Psi(n) = A_n^x(E)\Psi(0) = T_n^x(E)T_{n-1}^x(E) \cdots T_1^x(E)\Psi(0).$$

Обозначим

$$\gamma(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A_n^x(E)\|,$$

где $\|\cdot\|$ – операторная норма в множестве матриц 2-го порядка. По теореме Фюрстенберга (см. [6]) при каждом E этот предел существует для всех E и для почти всех x и не зависит от x . Этот общий предел и называется показателем Ляпунова. Данное определение относится только к одномерному случаю.

в) Эргодические семейства операторов с квазипериодическими коэффициентами.

в1) Мерилендская модель.

Пусть $(X, \{T^n\}, \mu) = (S^1, \{T_\omega^n\}, \mu)$ – динамическая система, где T_ω – поворот единичной окружности S^1 на иррациональный угол ω , μ – мера Лебега на S^1 . Рассмотрим семейство операторов $\hat{\varphi}_M(x)$ в $\ell^2(\mathbb{Z}^1)$:

$$(\hat{\varphi}_M(x)f)(n) = f(n+1) + f(n-1) + \lambda \text{tg}(\pi(x + n\omega))f(n).$$

Здесь λ – действительный параметр.

Формально это семейство операторов не содержится в алгебре A^ρ ни при каком ρ , но тем не менее такое семейство операторов может быть изучено. Для него известно (см. [10], [11]), что для всех λ и иррациональных ω , принадлежащих множеству полной меры, спектр оператора $\widehat{\varphi}_M(x)$ при всех x чисто точечный, а его собственные функции экспоненциально убывают. При доказательстве этого результата существенно используется вид потенциала.

в2) Обобщенная мерилендская модель.

Пусть $(X, \{T^n\}, \mu)$ – та же динамическая система, что и в предыдущем примере. Рассмотрим произвольный элемент $\varphi(n, x) \in A^\rho$ при некотором $\rho > 0$ и семейство операторов $\widehat{\varphi}_{GM}(x)$, которое имеет вид

$$(\widehat{\varphi}_{GM}(x)f)(n) = (\widehat{\varphi}(x)f)(n) + \operatorname{tg}(\pi(n\omega + x))f(n).$$

Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое множество $\Omega_\delta \subset [0, 1]$ лебеговой меры, большей $1 - \delta$, и такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta, \rho) > 0$, что если $\omega \in \Omega_\delta$ и $\|\varphi(n, x)\|_\rho < \varepsilon_0$, то оператор $\widehat{\varphi}_{GM}(x)$ имеет чисто точечный спектр при любом x и его собственные функции экспоненциально убывают. Это следует, например, из [12].

в3) Оператор Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом.

Пусть $X = \operatorname{Tor}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ – d -мерный тор, $x = (x_1, \dots, x_d)$, $0 \leq x_i \leq 1$ для $1 \leq i \leq d$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d$ – такой d -мерный вектор, что для любых целых $n_1, n_2, \dots, n_{d+1}$

$$\sum_{i=1}^d n_i \omega_i + n_{d+1} \neq 0, \quad T^n x = (x_1 + n_1 \omega_1, \dots, x_d + n_d \omega_d) \bmod 1,$$

μ – мера Лебега на торе. Тогда $(X, \{T^n\}, \mu)$ – эргодическая динамическая система (см. [8]). В одномерном случае, $n \in \mathbb{Z}^1$, выбирая произвольный элемент $\varphi(n, x)$ алгебры A^ρ при некотором $\rho > 0$, мы получаем в качестве $\widehat{\varphi}(x)$ семейство одномерных операторов общего вида с квазипериодическими коэффициентами.

В отличие от примеров а) и б) динамическая система $(X, \{T^n\}, \mu)$ в данном случае обладает минимальными из возможных статистическими свойствами: она всего лишь эргодична. Это обстоятельство делает невозможным изучение квазипериодических операторов методами, развитыми для исследования операторов с чисто случайными коэффициентами. С другой стороны, простота квазипериодических динамических систем (в противоположность гиперболическим динамическим системам (пример б)) позволяет получить интересные результаты о спектральных свойствах таких семейств операторов.

Дальнейший текст состоит из двух частей, первая из которых содержит обзор некоторых результатов, относящихся к исследованию одномерных разностных операторов Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом и полученных в последние годы; вторая часть содержит доказательство новых результатов о спектре семейств действующих операторов с квазипериодическими коэффициентами.

В заключение я выражаю глубокую благодарность Я. Г. Синаю за многочисленные стимулирующие обсуждения вопросов, рассмотренных в этой статье. Я искренне благодарен И. Ю. Арнольд за помощь при подготовке рукописи к печати.

Часть первая.

Одномерные операторы Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом

Эта часть состоит из двух параграфов и дополнения. Первый параграф посвящен обзору результатов о локализации Андерсона для одномерных разностных операторов Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом общего вида; второй – обзору полученных недавно результатов, относящихся к одному из самых популярных в этой области примеров: оператору почти-Матье (или оператору Харпера). Дополнение содержит обзор некоторых результатов, относящихся к одномерному непрерывному оператору Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом.

§ 1. Локализация Андерсона для одномерного разностного оператора Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом

В этом параграфе рассматривается семейство операторов

$$(H_{\omega, \varepsilon, x} \psi)(n) = \varepsilon[\psi(n+1) + \psi(n-1)] + V(x + n\omega)\psi(n),$$

действующих в $\ell^2(\mathbb{Z}^1)$. Это семейство зависит от трех параметров: иррационального числа ω , действительного числа ε и циклической переменной $x \in S^1$. Мы предполагаем, что $V(x) \in C^2(S^1)$. При фиксированных ω и ε семейство операторов $H_{\omega, \varepsilon, x}$ определяется функцией $\varphi_\varepsilon(n, x)$, $n \in \mathbb{Z}^1$, $x \in S^1$, $\varphi_\varepsilon(0, x) = V(x)$, $\varphi_\varepsilon(n, x) = \varepsilon$ для $|n| = 1$, $\varphi_\varepsilon(n, x) = 0$ для $|n| > 1$, и ассоциировано с эргодической динамической системой $(S^1, \{T_\omega^n\}, \mu)$, где T_ω – поворот окружности S^1 на угол ω , а μ – мера Лебега на S^1 . Как уже отмечалось во введении, спектр $\sigma(H_{\omega, \varepsilon, x})$ оператора $H_{\omega, \varepsilon, x}$ при фиксированных ω и ε не зависит от x для почти всех x по мере μ .

Нас интересует более тонкая структура спектра $\sigma(H_{\omega, \varepsilon, x})$: наличие или отсутствие компонент $\sigma_{pp}(H_{\omega, \varepsilon, x})$, $\sigma_{ac}(H_{\omega, \varepsilon, x})$, $\sigma_{sc}(H_{\omega, \varepsilon, x})$ и характер убывания собственных функций (если таковые имеются). Как мы увидим из дальнейшего, ответ на этот вопрос зависит существенным образом от арифметической природы числа ω и значения параметра ε .

Мы будем говорить, что ω удовлетворяет *диофантову условию* (D) с постоянным $C > 0$ и $\sigma > 1$, если

$$|\{nm\}| > \frac{C}{|n|^\sigma}$$

для всех $n \neq 0$. Здесь фигурные скобки означают дробную часть числа.

Наиболее общий результат о том, когда для семейства операторов $H_{\omega, \varepsilon, x}$ имеет место локализация Андерсона, получен Синаем в [1] (см. также [4]) и Фрелихом, Спенсером и Витвером в [13].

ТЕОРЕМА 1 (см. [1]). *Предположим, что $V(x) \in C^2(S^1)$ есть функция Морса на S^1 с двумя критическими точками. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют такое множество $\Omega_\delta \subset [0, 1]$ лебеговой меры, большей $1 - \delta$, и такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta, V)$, что для почти всех x по мере Лебега при каждом $\omega \in \Omega_\delta$ и $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ оператор $H_{\omega, \varepsilon, x}$ имеет чисто точечный спектр. Соответствующие собственные функции убывают экспоненциально. Спектр $\sigma(H_{\omega, \varepsilon, x})$ однократный и как множество (замыкание множества собственных значений) является канторовым множеством положительной меры.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество Ω_δ состоит из таких ω , которые удовлетворяют диофантову условию (D) с фиксированными σ и постоянной $C = C(\delta)$, стремящейся к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Опишем основные идеи доказательства теоремы 1. Мы будем следовать подходу, развитому в [1] и [4].

Доказательство проводится с помощью индуктивной процедуры, на каждом шаге которой строятся приближенные собственные значения (ПСЗ) и соответствующие приближенные собственные функции (ПСФ) семейства операторов $H_{\omega,\varepsilon,x}$, которые в пределе дают полный набор собственных значений (СЗ) и собственных функции (СФ) для почти всех x .

Случай гладкой функции $V(x)$ принципиально отличается от случая монотонной функции $V(x)$ (см. во введении примеры в1) и в2)). В последнем случае можно построить СЗ и СФ соответствующих семейств операторов при помощи индуктивной процедуры типа КАМ-теории, исключив из рассмотрения некоторое подмножество поворотов ω , мера которого стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. На каждом шаге индуктивной процедуры строятся поправки к СФ и СЗ, построенным на предыдущем шаге, при помощи теории возмущений, по существу, аналогичной обычному ряду теории возмущений для изолированного СЗ конечномерной матрицы.

Для гладкого потенциала $V(x)$ на каждом шаге индуктивной процедуры ряды обычной теории возмущений содержат бесконечное число малых знаменателей (резонансов) при любом ω . Поэтому индуктивная процедура должна включать в себя построение ПСЗ и ПСФ и в присутствии резонансов.

Из того, что при фиксированных ω и ε семейство операторов $H_{\omega,\varepsilon,x}$ ассоциировано с динамической системой $(S^1, \{T_\omega^n\}, \mu)$, следует, что если функция $\varphi_{\lambda(x)}(n) \in \ell^2(\mathbb{Z}^1)$ является СФ оператора $H_{\omega,\varepsilon,x}$ с СЗ $\lambda(x)$:

$$(H_{\omega,\varepsilon,x}\varphi_{\lambda(x)})(n) = \lambda(x)\varphi_{\lambda(x)}(n),$$

то функция $\tilde{\varphi}_{\lambda(x)} = \varphi_{\lambda(x)}(n - m)$ является СФ оператора $H_{\omega,\varepsilon,T_\omega^m x}$ с тем же самым СЗ $\lambda(x)$.

Предположим, что экспоненциальная локализация Андерсона имеет место для операторов семейства $H_{\omega,\varepsilon,x}$ при x , принадлежащих множеству $S \subset S^1$ полной лебеговой меры. Без ограничения общности, можно считать, что S T_ω -инвариантно. В противном случае вместо S можно рассмотреть $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T_\omega^n S$.

Предположим также, что имеет место равномерная локализация СФ, т.е. для каждой СФ $\varphi_i(n)$ существуют такие положительные постоянные A и γ , не зависящие от i , и такое множество $L(\varphi_i) \subset \mathbb{Z}$, являющееся объединением конечного числа конечных интервалов на решетке, что

$$|\varphi_i(n)| < Ae^{-\gamma \text{dist}(n, L(\varphi_i))}.$$

(В ходе доказательства показывается, что равномерная локализация действительно имеет место.)

Множество $L(\varphi_i)$ будет называться существенным носителем функции $\varphi_i(x)$, поскольку, как правило, на $L(\varphi_i)$ СФ φ_i принимает значения порядка 1. Конечно, выбор множества $L(\varphi_i)$ и постоянных A и γ неоднозначен. Доказательство включает в себя конкретную процедуру однозначного выбора $L(\varphi_i)$, A и γ . В таком случае имеет смысл говорить о самой левой точке множества $L(\varphi_i)$, которую мы обозначим $\text{ros}(\varphi_i)$.

Легко убедиться в том, что для того, чтобы найти все СФ φ_i при каждом фиксированном $x \in S^1$, достаточно построить СФ $\Phi_i(x)$, для которых $\text{ros}(\Phi_i) = 0$, но для всех $x \in S$. Пусть $\Lambda(x)$ – множество СЗ, $\Phi(x)$ – множество соответствующих СФ с $\text{ros}(\Phi(x)) = 0$ для $x \in S$. Функции $\Phi_i(x)$ со значениями в $\ell^2(Z)$ и $\Lambda(x)$ со значениями в $\mathbb{R}$ являются многозначными функциями.

Для построения $\Lambda(x)$ и $\Phi_i(x)$ применяется индуктивная процедура, на s -м шаге которой для всех $x \in S^1$ строятся ПСЗ $\Lambda^{(s)}(x)$ и ПСФ $\Phi^{(s)}(x)$, которые также являются многозначными функциями, имеющими конечное число непрерывных ветвей $\Lambda_j^{(s)}(x)$, $\Phi_j^{(s)}(x)$, каждая из которых определена на некотором подмножестве окружности S^1 , являющемся либо отрезком, либо объединением конечного числа интервалов. Более детально структура функций $\Lambda_j^{(s)}(x)$ и $\Phi_j^{(s)}(x)$ будет описана позже.

Функции $\Lambda_j^{(s)}(x)$ и $\Phi_j^{(s)}(x)$ являются ПСЗ и ПСФ порядка s , а именно:

$$H_x \Phi_j^{(s)}(x) = \Lambda_j^{(s)}(x) \Phi_j^{(s)}(x) + \delta_j^{(s)}(x),$$

при этом $\delta_j^{(s)}(x) = O(\varepsilon^s)$, $\|\delta_j^{(s)}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^1)} < e^{-cs}$, где c – положительная постоянная. (Здесь мы опускаем индексы ω и ε , имея ввиду, что ω и ε фиксированы, ω удовлетворяет условию (D), ε достаточно мало.)

Совокупность ПСФ $\{\varphi_i^{(s)}(x)\}$ и ПСЗ $\{\lambda_i^{(s)}(x)\}$ для фиксированных x определяется следующим образом:

$$\{\lambda_i^{(s)}(x)\} = \bigcup_j \left(\bigcup_n' \Lambda_j^{(s)}(x + n\omega) \right), \quad \{\varphi_i^{(s)}(x)\} = \bigcup_j \left(\bigcup_n' \Phi_j^{(s)}(x + n\omega) \right),$$

где $'$ означает, что объединение при фиксированном j производится только по таким n , для которых $x + n\omega$ принадлежит области определения $\Lambda_j^{(s)}(x)$, $\Phi_j^{(s)}(x)$.

Доказывается, что совокупность $\{\varphi_i^{(s)}(x)\}$ образует базис в $\ell^2(\mathbb{Z}^1)$ (вообще говоря, неортогональный) при каждом s и $x \in S^1$, и что $\{\varphi_i(x)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{\varphi_i^{(s)}(x)\}$ существует при почти всех x и образует ортогональный базис в $\ell^2(\mathbb{Z}^1)$.

Для построения $\Lambda_j^{(1)}(x)$ и $\Phi_j^{(1)}(x)$ на первом шаге индукции положим $\varepsilon = 0$. Тогда H_x переходит в оператор умножения на функцию. Легко проверить, что в этом случае j принимает только одно значение, равное 1, $\Phi_1^{(1)}(x) = \delta_{0n}$, $\Lambda_1^{(1)}(x) = V(x)$ для любого $x \in S^1$. Очевидно, что $\Phi_1^{(1)}(x)$ и $\Lambda_1^{(1)}(x)$ есть ПСФ и ПСЗ первого порядка.

Опишем подробнее структуру функций $\Lambda_j^{(s)}(x)$, $\Phi_j^{(s)}(x)$.

1) $\Lambda_j^{(s)}(x) \in C^2(I_j^{(s)})$, где $I_j^{(s)}$ – область определения ветви $\Lambda_j^{(s)}(x)$; каждое свое значение, за исключением критических, функция $\Lambda_j^{(s)}(x)$ принимает ровно два раза.

2) Для $s > 1$ функция $\Lambda_j^{(s)}(x)$ имеет не более одной критической точки, и эта точка невырождена (если она существует).

3) Для каждой концевой точки $\bar{x}$ области определения функции $\Lambda_j^{(s)}(x)$ найдутся такое $n < \text{const} \cdot s$ и такая ветвь $\Lambda_k^{(s)}(x)$, что $T_\omega^n \bar{x}$ – концевая точка области определения $\Lambda_k^{(s)}(x)$ и функция $\Lambda_{jk}^{(s)}(x)$, равная $\Lambda_j^{(s)}(x)$ в одной полукрестности точки $\bar{x}$ и равная $\Lambda_k^{(s)}(T_\omega^{-n} x)$ в другой полукрестности точки $\bar{x}$, непрерывна в $\bar{x}$ вместе с первой и второй производными.

4) Диаметр существенного носителя $L(\Phi_j^{(s)})$ функции $\Phi_j^{(s)}(x)$ не превосходит $\text{const} \cdot s$ при любом x .

5) Области значений $\text{Ran}(\Lambda_j^{(s)}(x))$ и $\text{Ran}(\Lambda_k^{(s)}(x))$ не пересекаются при $j \neq k$. Для каждой ветви $\Lambda_j^{(s)}(x)$, $\Phi_j^{(s)}(x)$ указан момент ее появления, т.е. номер шага индукции, на котором она образовалась. Если ветви $\Lambda_j^{(s)}(x)$, $\Lambda_k^{(s)}(x)$ образовались на t -м шаге индукции, $t \leq s$, то

$$\text{dist}(\text{Ran}(\Lambda_j^{(s)}(x)), \text{Ran}(\Lambda_k^{(s)}(x))) > C_1 e^{-C_2 t}$$

при некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$.

Для того, чтобы перейти от s к $s+1$, построим по $\Lambda_i^{(s)}(x)$ и $\Phi_i^{(s)}(x)$ ПСЗ $\lambda_i^{(s+1)}(x)$ и ПСФ $\varphi_i^{(s+1)}(x)$ для каждого $x \in S^1$, как это было уже объяснено.

Мы говорим, что $\lambda_i^{(s)}(x)$ является нерезонансным в точке x , если для любого $k \neq i$ выполнено одно из двух условий:

- 1) $|\lambda_i^{(s)}(x) - \lambda_k^{(s)}(x)| > 1/s^4$;
- 2) для существенных носителей $L(\varphi_i^{(s)}(x))$ и $L(\varphi_k^{(s)}(x))$ функций $\varphi_i^{(s)}(x)$ и $\varphi_k^{(s)}(x)$

$$\text{dist}(L(\varphi_i^{(s)}(x)), L(\varphi_k^{(s)}(x))) > \text{const} \cdot \frac{s}{\ln \varepsilon^{-1}},$$

$$\text{где } L(\varphi_i^{(s)}(x)) = T_\omega^{-n} L(\Phi_j^{(s)}(x)), \text{ если } \varphi_i^{(s)}(x) = \Phi_j^{(s)}(x + n\omega).$$

В этом случае ПСЗ $\lambda_i^{(s+1)}(x)$ и ПСФ $\varphi_i^{(s+1)}(x)$ определяются с помощью ряда теории возмущений, аналогичного ряду теории возмущений для изолированного собственного значения конечномерной матрицы. Причем в этом ряде достаточно сохранить только члены первого порядка. А именно, мы полагаем:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(s+1)}(x) &= \varphi_i^{(s)}(x) + \sum'_{j \neq i} \frac{(\delta_i^{(s)}(x), \varphi_j^{(s)}(x))}{\lambda_i^{(s)}(x) - \lambda_j^{(s)}(x)} \varphi_j^{(s)}(x), \\ \lambda_i^{(s+1)}(x) &= \lambda_i^{(s)} + (\delta_i^{(s)}(x), \varphi_i^{(s)}(x)). \end{aligned}$$

Здесь $'$ означает, что суммирование проводится только по таким j , для которых условие 2) не выполнено. Включение в сумму дополнительных членов дало бы только поправку более высокого порядка, чем $O(\varepsilon^s)$. Это следует из экспоненциального убывания ПСФ вне их существенных носителей.

Мы полагаем $L(\varphi_i^{(s+1)}) = L(\varphi_i^{(s)})$ и определяем ветви ПСЗ $\Lambda_{j(i)}^{(s+1)}$ и ПСФ $\Phi_{j(i)}^{(s+1)}$ следующим образом:

$$\Lambda_{j(i)}^{(s+1)}(x + n\omega) = \lambda_i^{(s+1)}(x), \quad \Phi_{j(i)}^{(s+1)}(x + n\omega) = \varphi_i^{(s+1)}(x).$$

Тем самым мы определили ветви ПСЗ $\Lambda_{j(i)}^{(s+1)}(x)$ и ПСФ $\Phi_{j(i)}^{(s+1)}(x)$ $(s+1)$ -го порядка для всех значений x , для которых $\lambda_i^{(s)}(x)$ при отображении $\{\Lambda_i^{(s)}\} \rightarrow \{\lambda_i^{(s)}\}$

нерезонансно в точке x . Из оценок ряда теории возмущений вытекает, что новые ветви $\Lambda_i^{(s+1)}(x)$ для нерезонансных x отличаются от $\Lambda_i^{(s)}(x)$ на величину, не превосходящую $O(\varepsilon^s)$, а для соответствующих $\Phi_i^{(s+1)}(x)$ и $\Phi_i^{(s)}(x)$

$$\|\Phi_i^{(s+1)}(x) - \Phi_i^{(s)}(x)\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^1)} < \exp(-cs).$$

Если для $\lambda_i^{(s)}(x)$ не выполнено ни одно из условий 1) и 2), $\lambda_i^{(s)}(x)$ называется резонансным в точке x . В этом случае существует такое $k \neq i$, что

$$|\lambda_i^{(s)}(x) - \lambda_k^{(s)}(x)| \leq \frac{1}{s^4},$$

$$\text{dist}(L(\varphi_i^{(s)}(x)), L(\varphi_k^{(s)}(x))) < \text{const} \frac{s}{\ln \varepsilon^{-1}}.$$

Тогда пара $\lambda_i^{(s)}(x), \lambda_k^{(s)}(x)$ называется резонансной парой порядка s .

Из того, что многозначная функция $\Lambda^{(s)}(x)$ принимает каждое свое значение не более чем в двух точках, и из того, что ω удовлетворяет диофантову условию (D), следует, что для данного i существует не более одной резонансной пары $\lambda_i^{(s)}(x), \lambda_k^{(s)}(x)$ s -ого порядка в точке x .

Из свойств функций $\Lambda_i^{(s)}(x)$ следует, что функции $\lambda_j^{(s)}(x)$ являются гладкими (класса C^2) функциями в некоторой окрестности точки x . Следовательно, компонента множества точек y , содержащих точку x и удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda_i^{(s)}(y) - \lambda_k^{(s)}(y)| \leq \frac{1}{s^4},$$

является отрезком. Из оценок первых двух производных функций $\lambda_i^{(s)}(y), \lambda_k^{(s)}(y)$ сверху и снизу, получаемых на каждом шаге индукции, вытекает, что длина этого отрезка не меньше $\text{const} \cdot s^{-5}$ и не превосходит $\text{const} \cdot s^{-2}$.

Этот отрезок называется резонансной зоной (РЗ) порядка s .

Для такой РЗ $\lambda_i^{(s+1)}(x)$ и $\lambda_k^{(s+1)}(x)$ и соответствующие $\varphi_i^{(s+1)}(x)$ и $\varphi_k^{(s+1)}(x)$ определяются следующим образом. Сначала определяются промежуточные ПСЗ $\tilde{\lambda}_i^{(s+1)}(x), \tilde{\lambda}_k^{(s+1)}(x)$ и ПСФ $\tilde{\varphi}_i^{(s+1)}(x), \tilde{\varphi}_k^{(s+1)}(x)$ при помощи ряда теории возмущений, выписанного выше. При этом из суммы дополнительно исключается слагаемое $j = k$ для $\tilde{\varphi}_i^{(s+1)}(x)$ и $j = i$ для $\tilde{\varphi}_k^{(s+1)}(x)$. Затем $\tilde{\lambda}_i^{(s+1)}(x)$ и $\tilde{\lambda}_k^{(s+1)}(x)$ строятся как линейные комбинации функций $\tilde{\varphi}_i^{(s+1)}(x)$ и $\tilde{\varphi}_k^{(s+1)}(x)$:

$$\varphi_i^{(s+1)}(x) = A_+ \tilde{\varphi}_i^{(s+1)}(x) + B_+ \tilde{\varphi}_k^{(s+1)}(x),$$

$$\varphi_k^{(s+1)}(x) = A_- \tilde{\varphi}_i^{(s+1)}(x) + B_- \tilde{\varphi}_k^{(s+1)}(x).$$

Коэффициенты $A_{\pm}, B_{\pm}$ совпадают с элементами ортогональной матрицы, приводящей матрицу

$$Q_{i,k}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_i^{(s+1)}(x) & (\tilde{\varphi}_i^{(s+1)}(x), \tilde{\varphi}_k^{(s+1)}(x)) \\ (\tilde{\varphi}_i^{(s+1)}(x), \tilde{\varphi}_k^{(s+1)}(x)) & \tilde{\lambda}_k^{(s+1)}(x) \end{pmatrix}$$

к диагональному виду. Новые ПСЗ $\lambda_i^{(s+1)}(x)$ и $\lambda_k^{(s+1)}(x)$ определяются как СЗ матрицы $Q_{i,k}(x)$. Мы полагаем $L(\varphi_i^{(s+1)}) = L(\varphi_k^{(s+1)}) = L(\varphi_i^{(s)}) \cup L(\varphi_k^{(s)})$.

Пусть $\text{ros}(L(\varphi_i^{(s)}(x))) = n$. Тогда для точки $y = x + n\omega$, где x принадлежит РЗ, определяются две новые ветви ПСФ $\Phi_{i'}^{(s+1)}(y)$, $\Phi_{i''}^{(s+1)}(y)$ и ПСЗ $\Lambda_{i'}^{(s+1)}(y)$, $\Lambda_{i''}^{(s+1)}(y)$:

$$\begin{aligned}\Lambda_{i'}^{(s+1)}(y) &= \lambda_i^{(s+1)}(x), & \Lambda_{i''}^{(s+1)}(y) &= \lambda_k^{(s+1)}(x), \\ \Phi_{i'}^{(s+1)}(y) &= \varphi_i^{(s+1)}(x), & \Phi_{i''}^{(s+1)}(y) &= \varphi_j^{(s+1)}(x),\end{aligned}$$

где нумерация ветвей определяется некоторым стандартным образом, так что различные ветви имеют различные номера. Кроме того, доказывается, что число ветвей $\Lambda_i^{(s)}(x)$, $\Phi_i^{(s)}(x)$ не превосходит $\text{const} \cdot s$.

О ветвях ПСЗ $\Lambda_{i'}^{(s)}(x)$, $\Lambda_{i''}^{(s)}(x)$ и ПСФ $\Phi_{i'}^{(s)}(x)$, $\Phi_{i''}^{(s)}(x)$ говорят, что они образовались на шаге s .

Образование двух новых ветвей ПСЗ и ПСФ внутри РЗ называется расщеплением резонанса.

Полученные новые ветви ПСЗ и ПСФ $(s+1)$ -го порядка, вообще говоря, не являются малыми возмущениями ПСЗ и ПСФ s -го порядка. Важно отметить, что из оценок ПСФ и производных ПСЗ по x , получаемых в ходе индуктивного процесса, доказывается оценка снизу для расщепления резонанса:

$$|\lambda_i^{(s+1)}(x) - \lambda_k^{(s+1)}(x)| > C_1 \varepsilon^{-C_2 s},$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные.

Получение этой оценки является технически самой трудной частью доказательства. При этом используется конкретный вид оператора Шрёдингера и специальное представление погрешности $\delta_i^{(s)}$.

Благодаря этой оценке расщепления мы получаем следующее важное свойство: между множествами значений образовавшихся при расщеплении резонанса новых ветвей образуется щель. Эта щель может лишь незначительно сузиться при последующих шагах индукции. Из оценки размеров РЗ s -го порядка и диофантовости числа ω следует, что расстояние между последовательными моментами s_1 и s_2 первого попадания точки x в РЗ превосходит $C'_1 e^{C_2 s_1} \ln \varepsilon^{-1}$, (разреженность резонансов) и что суммарная мера всех РЗ конечна. Поэтому почти каждая точка $x \in S^1$ принадлежит какой-либо РЗ только конечное число раз. Это позволяет доказать сходимость $\lambda_i^{(s)}(x)$ и $\varphi_i^{(s)}(x)$ при $s \rightarrow \infty$ для почти всех x . Полнота предельных собственных функций вытекает из полноты допредельных ПСФ $\varphi_i^{(s)}(x)$ при каждом s .

Из оценок размера щелей и всюду плотности траектории $\{T_\omega^n x\}$ любой точки x легко показать, что замыкание множества значений функции $\Lambda(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \Lambda^{(s)}(x)$ есть канторовское множество положительной меры, которое и является спектром $H_{\omega, \varepsilon, x}$.

Можно сказать, что теорема 1 устанавливает метрическую устойчивость экспоненциальной локализации Андерсона: чисто точечный спектр и экспоненциальное убывание СФ имеют место для множества полной меры значений $x \in S$.

С другой стороны, существование чисто точечного спектра является крайне неустойчивым свойством эргодического семейства операторов с топологической точки зрения.

Пусть $V(n)$ – почти периодическая функция на $\mathbb{Z}^1$. Напомним, что $V(n)$ называется почти периодической на $\mathbb{Z}^1$, если $V(n)$ ограничена и множество $\{V_m(n) = V(n-m)\}$ имеет компактное замыкание в $\ell^\infty(\mathbb{Z}^1)$. Это замыкание Ω_V называется оболочкой почти периодической функции $V(n)$.

В частности, если $v(x)$ – непрерывная функция на S^1 , то последовательность $V_{x_0}(n) = v(x_0 + n\omega)$ при фиксированном $x_0 \in S^1$ и иррациональном ω определяет почти периодическую функцию $V_{x_0}(n)$ на $\mathbb{Z}^1$. Легко проверить, что оболочка $\Omega_{V_{x_0}}$ функции $V_{x_0}(n)$ состоит из всех функций $V_x(n) = v(x + n\omega)$, $x \in S^1$.

В работе С. Житомирской и Б. Саймона [14] доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $V(n)$ – четная почти периодическая функция, т.е. $V(n) = V(-n)$. Тогда существует плотное G_δ -множество $U \subset \Omega_V$ такое, что если $u(n) \in U$, то оператор $(H_U \Psi)(n) = \Psi(n+1) + \Psi(n-1) + u(n)\Psi(n)$ как оператор в $\ell^2(\mathbb{Z})$ не имеет собственных значений.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены предположения теоремы 2. Предположим дополнительно, что существует хотя бы одно $u(n) \in \Omega_V$, для которого оператор H_u не имеет абсолютно непрерывного спектра. Тогда для плотного G_δ -подмножества $\tilde{U} \subset \Omega_V$ оператор $H_{\tilde{u}}(\tilde{u} \in \tilde{U})$ имеет чисто сингулярно непрерывный спектр.

В частности, взяв в качестве $V(x)$ в теореме 1 четную функцию, мы получим, что для всюду плотного G_δ -подмножества окружности S^1 оператор $H_{\omega, \varepsilon, x}$ имеет чисто сингулярно непрерывный спектр.

Идея доказательства теорем 2 и 3 применительно к семейству операторов $H_{\omega, \varepsilon, x}$ с четным потенциалом $V(x)$ состоит в том, что соответствующее множество $\tilde{U}$ строится как множество таких функций $V_x(n)$, для которых x принадлежит бесконечному числу РЗ.

Теорема 1 относится к потенциалу с одной частотой ω . Случай двух частот рассмотрен Я. Г. Синаем и В. А. Чулаевским в [2] и [4].

Предположим, что действительная функция $V(x) \in C^2(\text{Tor}^2)$ удовлетворяет следующим условиям:

I. $V(x)$ имеет конечное число критических точек $x^1, \dots, x^n$, и все эти критические точки невырождены. Значения функции $V(x)$ в различных критических точках различны.

II. Множества уровней $A(V, c) = \{x \in \text{Tor}^2 : V(x) = c\}$ состоят из конечного числа замкнутых кривых, которые могут иметь самопересечения только в критических седловых точках.

III. Для любого $\omega \in [0, 1] \times [0, 1]$ множество $\{x \in \text{Tor}^2 : V(x + \omega) - V(x - \omega) = 0\}$ состоит из конечного числа замкнутых кривых, каждая из которых имеет конечное число самопересечений. Ограничение функции V на любую из этих кривых имеет конечное число критических точек, которые могут быть вырожденными только для векторов ω , принадлежащих объединению конечного числа замкнутых кривых или дуг.

Рассмотрим семейство операторов

$$(H_{\omega, \varepsilon, x} \Psi)(n) = (\Psi(n+1) + \Psi(n-1)) + V(x + n\omega)\Psi(n),$$

где $n \in \mathbb{Z}^1$

В [2] и [4] доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть для $V(x)$ выполнены условия I–III. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют такое множество $\Omega_\delta \subset [0, 1] \times [0, 1]$ лебеговой меры, большей $1 - \delta$, и такая постоянная $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta, V) > 0$, что для любого ε , $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, и любого $\omega \in \Omega_\delta$ оператор $H_{\omega, \varepsilon, x}$ для почти всех x имеет чисто точечный спектр, и соответствующие собственные функции экспоненциально убывают.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 1, но технически более сложно, так как типичная кратность резонанса в этом случае может равняться 2 или 3, а не только 2, как в случае одной частоты.

Основное отличие двухчастотного случая от одночастотного заключается в том, что в случае двух частот $\sigma(H_{\omega, \varepsilon, x})$ не содержит щелей.

§ 2. О спектре оператора почти-Матье

Почти-Матье оператор – это разностный оператор Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом, порожденным функцией $\lambda \cos 2\pi x$:

$$(1) \quad H_{\omega, \lambda, x}^M \Psi(n) = \Psi(n+1) + \Psi(n-1) + \lambda \cos(2\pi(x + n\omega)) \Psi(n),$$

где λ – действительный параметр. Из соображений симметрии следует, что достаточно рассмотреть случай $\lambda > 0$.

Этот оператор возникает во многих задачах теоретической физики и в физической литературе иногда называется оператором Харпера.

Почти-Матье оператор является одним из самых популярных примеров и ему посвящено огромное число математических и физических работ. Этот пример демонстрирует удивительное многообразие спектральных свойств в зависимости от значений параметров ω , λ и x .

В этом параграфе будут приведены формулировки лишь нескольких важных результатов, полученных в самое последнее время и связанных с наличием или отсутствием точечной компоненты спектра оператора (1). Мы с самого начала исключаем из рассмотрения рациональные ω , хотя уже в этом случае для критического значения $\lambda = 2$ появляются интересные и до сих пор до конца нерешенные задачи (бабочка Хофштадера).

Прежде всего, отметим, что спектр $\sigma(\omega, \lambda, x)$ зависит от арифметической природы иррационального ω . Как было описано в § 1, для диофантовых ω и достаточно больших λ ($\lambda > \lambda_0(\omega)$) спектр оператора $H_{\omega, \lambda, x}^M$ – канторово множество положительной меры. С другой стороны, в работе Аврона и Саймона [15] было доказано, что лебегова мера $|\sigma(H_{\omega, \varepsilon, x})|$ спектра $\sigma(\omega, \lambda, x)$ оператора $H_{\omega, \lambda, x}^M$ не зависит от x при фиксированных ω и λ (ω иррационально). Следовательно, при диофантовых ω и $\lambda > \lambda_0(\omega)$ при всех x спектр $\sigma(\omega, \lambda, x)$ имеет положительную меру.

Согласно теореме Эрмана [16] показатель Ляпунова $\gamma(E) \geq \ln \frac{|\lambda|}{2}$ при всех E . Из теоремы Ишии–Пастура–Котани (см. [6]) следует, что при $|\lambda| > 2$ спектр $\sigma(\omega, \lambda, x)$ не содержит абсолютно непрерывной компоненты.

Основная гипотеза относительно природы спектра $\sigma(\omega, \lambda, x)$ состоит в следующем:

для $\lambda > 2$ при типичных ω и для почти всех x спектр оператора $H_{\omega, \lambda, x}^M$ чисто точечный;
 для $\lambda < 2$ при типичных ω и для почти всех x спектр оператора $H_{\omega, \lambda, x}^M$ абсолютно непрерывный.¹

К настоящему времени эта гипотеза не доказана в полной мере. Последние результаты, поддерживающие эту гипотезу, принадлежат С. Житомирской для $\lambda > 2$ и Й. Ласту для $\lambda < 2$.

Рассмотрим множество $\Omega = \{x \in S^1 \text{ и для каждого } s > 1 \text{ неравенство } |\sin 2\pi(x + \frac{k}{2}\omega)| < k^{-s} \text{ выполняется для бесконечного числа целых положительных } k\}$. Легко видеть, что лебегова мера множества Ω равна нулю.

Предположим также, что ω диофантово.

Кроме того, введем еще одно условие на типичность ω : существует такое $r > 1$, что

$$(D_1) \quad \frac{C}{q_n^r} < |p_n - \omega q_n| = \frac{O(1)}{q_n}$$

при $n \rightarrow \infty$ при некоторой постоянной $C > 0$. Здесь $\frac{p_n}{q_n}$ — n -я подходящая дробь разложения числа ω в непрерывную дробь.

ТЕОРЕМА 1 (см. [17]). 1. Пусть $\lambda \geq 15$ и ω диофантово. Тогда для оператора $H_{\omega, \lambda, x}^M$ имеет место локализация Андерсона для почти всех x , т.е. при почти каждом x имеется полный набор экспоненциально убывающих собственных функций.

2. Положим $\tilde{\sigma} = \{E \in \sigma(\omega, \lambda, x) \text{ и для любого } \varepsilon > 0 \text{ } |[E-\varepsilon, E+\varepsilon] \cap \sigma(\omega, \lambda, x)| > 0\}$. Предположим, что ω удовлетворяет условию (D_1) . Тогда для любого $2 < \lambda < 15$

- а) $|\sigma_{pp}(\omega, \lambda, x)| = |\sigma(\omega, \lambda, x)|$;
- б) $\sigma_{sc}(\omega, \lambda, x)$ (если такая компонента существует) имеет меру нуль и нигде неплотно в $\tilde{\sigma}(\omega, \lambda, x)$ в относительной топологии;
- в) если $x \notin \Omega$, то множество собственных значений оператора $H_{\omega, \lambda, x}^M$ плотно в $\tilde{\sigma}$ и соответствующие собственные функции экспоненциально убывают.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [18] показано, что

$$|\sigma(\omega, \lambda, x)| > 2\lambda - 4.$$

Еще раз подчеркнем, что природа спектра $\sigma(\omega, \lambda, x)$ существенно зависит от арифметической природы числа ω .

В частности, предположим, что ω является числом Лиувилля, т.е. для любого целого положительного k существуют такие p_k, q_k , что

$$\left| \omega - \frac{p_k}{q_k} \right| < K^{-q_k}.$$

Аврон и Саймон в [19] доказали следующее утверждение.

¹Другая гипотеза относится к критическому случаю $\lambda = 2$: для типичных ω и почти всех x оператор $H_{\omega, \lambda, x}^M$ имеет сингулярно непрерывный спектр. По поводу ее доказательства см. [29] (прим. при корректуре).

ТЕОРЕМА 2. Если ω – число Лиувилля и $\lambda > 2$, оператор $H_{\omega, \lambda, x}^M$ имеет чисто сингулярно непрерывный спектр для почти всех x .

Перейдем теперь к случаю $\lambda < 2$. Исследование спектра в этом случае основано на одном общем утверждении, устанавливающем связь между спектром эргодического семейства разностных операторов с потенциалом $V(x)$ и спектром его периодических аппроксимаций. Пусть

$$(H_V(x)\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(T^n x)\psi(n)$$

есть семейство операторов Шрёдингера, определяемое ограниченной функцией $V(x)$ и ассоциированное с эргодической динамической системой $(X, \{T^n\}, \mu)$, $n \in \mathbb{Z}^1$. Как уже отмечалось в § 1, множество

$$A = \{E : \gamma(E) = 0\}$$

не зависит от x для почти всех x , где $\gamma(E)$ – показатель Ляпунова. Теорема Ишии–Пастура–Котани [6] устанавливает следующую связь между абсолютно непрерывной компонентой $\sigma_{ac}(H_V(x))$ спектра оператора $H_V(x)$ и множеством A :

$$\sigma_{ac}(H_V(x)) = \overline{A}^{ess},$$

где $A^{ess} = \{E \in \mathbb{R} : |A \cap [E - \varepsilon, E + \varepsilon]| > 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0\}$. Следовательно, A содержится в $\sigma_{ac}(H_V(x))$ с точностью до множества меры 0 и $|\sigma_{ac}(H_V(x))| \geq |A|$.

Для каждого x и целого положительного m определим периодический потенциал $V_m^x(n)$, полагая

$$\begin{aligned} V_m^x(n) &= V(T^n x) \text{ для } n = 1, 2, \dots, m, \\ V_m^x(n + km) &= V_m^x(n) \text{ для любого } k \in \mathbb{Z}^1. \end{aligned}$$

Рассмотрим семейство операторов Шрёдингера с периодическим потенциалом V_m^x :

$$(H_m^x \psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V_m^x(n)\psi(n).$$

Обозначим его спектр σ_m^x .

ТЕОРЕМА 3 (см. [20]). Для почти всех x по мере μ

$$\left| \limsup_{m \rightarrow \infty} \sigma_m^x \setminus A \right| = 0,$$

где, как обычно,

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sigma_m^x = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{m=l}^{\infty} \sigma_m^x.$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что для почти всех x

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} |\sigma_m^x| \leq |A| \leq |\sigma_{ac}(H_V(x))|.$$

Вернемся к оператору почти-Матье $H_{\omega, \lambda, x}^M$. В [20] для этого оператора доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. 1) Для любого иррационального ω и почти всех x

$$|\sigma_{ac}(\omega, \lambda, x)| \geq |A(\omega, \lambda, x)| \geq 4 - \left(2 + \frac{\pi}{\sqrt{5}}\right)\lambda.$$

2) Если $0 \leq \lambda < 2$ и существует такая последовательность рациональных чисел $\{p_k/q_k\}_{k=1}^\infty$, что

$$(D_2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} q_k^2 \left| \omega - \frac{p_k}{q_k} \right| = 0,$$

то

$$|A(\omega, \lambda, x)| = |\sigma_{ac}(\omega, \lambda, x)| = |\sigma(\omega, \lambda, x)| = 4 - 2\lambda$$

для почти всех x .

Сделаем несколько замечаний по поводу теоремы 4.

1. Условие (D_2) выполняется для почти всех ω .

2. Гипотеза о том, что $|\sigma(\omega, \lambda, x)| = 4 - 2\lambda$ для всех иррациональных ω и $0 \leq \lambda < 2$, принадлежит Андре и Обри [21]. Она исследовалась Таулесом в [22] для рациональных ω . В работе Аврона, Ван Муша и Саймона [23] была доказана оценка снизу: $|\sigma(\omega, \lambda, x)| \geq 4 - 2\lambda$.

Дополнение к части первой.

О непрерывном одномерном уравнении Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом

Это дополнение содержит формулировки результатов Л. Элиасона [24], дающих, по существу, окончательное решение вопроса о структуре спектра непрерывного одномерного оператора Шрёдингера с малым квазипериодическим потенциалом.

В статье [24] изучаются решения уравнения Шрёдингера

$$(1) \quad (Ly)(t) = -y''(t) + q_\omega(t)y(t) = Ey(t)$$

для квазипериодического потенциала $q_\omega(t)$ с частотным вектором ω и для больших энергий E или для малых потенциалов q .

Иными словами, функция $q_\omega(t)$ может быть описана следующим образом. Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d$ и $q(x)$ – функция на d -мерном торе $\text{Tor}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. Рассмотрим поток S^t на торе Tor^d : $S^t x^0 = (x_1^0 + \omega_1 t, \dots, x_d^0 + \omega_d t)$, где $x^0 = (x_1^0, \dots, x_d^0)$ – произвольная точка на Tor^d . Тогда $q_\omega(t) = q(S^t x^0)$. Функция $q_\omega(t)$ зависит от выбора начальной точки x^0 , но мы опускаем указание на эту зависимость, так как утверждения справедливы для любой x^0 .

Мы предполагаем, что $q: \text{Tor}^d \rightarrow \mathbb{R}$ аналитична в некоторой комплексной окрестности $|\text{Im } x| < r$. Положим

$$|q|_r = \sup_{|\text{Im } x| < r} |q(x)|.$$

Эта норма аналогична $\|\cdot\|_\rho$, определенной ранее во введении. Конечность $|q|_r$ означает экспоненциальную скорость убывания коэффициентов Фурье

$$a_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\text{Tor}^d} e^{2\pi i(n,x)} q(x) dx: |a_n| < \text{const} \cdot e^{-r'|n|}$$

для любого $r' < r$. Здесь (n, x) – скалярное произведение векторов $n \in \mathbb{Z}^d$ и $x = (x_1, \dots, x_d) \in \text{Tor}^d$, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d$.

В работе [24] изучается вопрос о существовании решений уравнения (1) типа решений Флоке (или волн Блоха), т.е. решений вида $y(t) = e^{ikt}(p_1(t) + tp_2(t))$ с постоянным k и квазипериодическими функциями $p_1(t), p_2(t)$, имеющими вектор частот ω или $\omega/2$. Одновременно изучается спектр $\sigma(\bar{L})$ самосопряженного оператора $\bar{L}$, являющегося расширением оператора L с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R})$ и действующего в $L^2(\mathbb{R})$.

Предполагается, что вектор ω диофантов, т.е.

$$|(n, \omega)| \geq |n|^{-\tau}, \quad n \in \mathbb{Z}^d \setminus 0,$$

с $\tau > d - 1$.

Для того, чтобы сформулировать результаты, необходимо определить понятие числа вращения для уравнения (1).

Пусть $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$, $A(0) = I$, есть непрерывное отображение и $V \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$. Положим

$$\Phi(t, V) = \arg(A(t)V),$$

$\Phi(t, V)$ есть многозначная непрерывная функция на комплексной плоскости. Выбирая

$$0 \leq \arg V < 2\pi,$$

мы превратим $\Phi(t, V)$ в однозначную функцию, непрерывную в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty] \times 0)$.

Если предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t, V)}{t}$$

существует, то он не зависит от V и называется числом вращения отображения A . Мы обозначим этот предел ρ_A .

Запишем уравнение (1) в векторной форме:

$$(2) \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_\omega(t) - E & 0 \end{pmatrix} Y(t),$$

где $Y(t) = (y'(t), y(t))$ есть двумерный вектор. Тогда если $Y(t)$ – решение этой системы уравнений с начальными данными $Y_0(0)$, то

$$Y(t) = A_E(t)Y_0(0),$$

$A_E(t) \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ – непрерывное отображение $\mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$ и $A(0) = I$. В [25] доказано, что если частоты $\omega_1, \dots, \omega_d$ рационально независимы, то отображение $A_E(t)$ имеет число вращения $\rho(E)$, которое называется числом вращения уравнения (1). $\rho(E)$ – монотонная и непрерывная функция.

Пусть $M = \left\{ \frac{(n, \omega)}{2}, n \in \mathbb{Z}^d \right\}$ – модуль, порожденный полужаботами функции q_ω . В [25] показано, что

$$\sigma(\bar{L}) = \overline{R \setminus \rho^{-1}(M)}.$$

Связные компоненты множества $\text{Int}(\rho^{-1}(M))$ образуют щели в спектре оператора $\bar{L}$. Щель называется коллапсирующей, если она состоит из одной точки E такой, что $\rho(E) \in M$ и $\rho^{-1}(\rho(E)) = E$.

Назовем число ρ диофантовым, если

$$\left| \rho - \frac{(n, \omega)}{2} \right| > K^{-1} |n|^{-\sigma}, \quad n \in \mathbb{Z}^d,$$

для некоторых положительных K и σ , и рациональным (относительно M), если $\rho \in M$.

Теперь мы в состоянии сформулировать первый результат из [24]. Положим $E_c(s) = (s/c)^2$ для $s \geq C$ и $E_c(s) = -\infty$ для $s < C$, где $C > 0$ — постоянная.

ТЕОРЕМА 1. *Существует такое $C_0 = C_0(\tau, r)$, что для $E > E_{C_0}(\|q\|_r)$ справедливо одно из двух утверждений:*

- I) *если $\rho(E)$ диофантово или рационально, то существуют матрица $Q(E) \in \text{sl}(2, \mathbb{R})$, зависящая от E , для которой*

$$Y(t) = Z_{\omega/2}(t)e^{Qt};$$

- II) *если $\rho(E)$ не является ни диофантовым, ни рациональным, то*

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |Y(t) - Y(0)| < \frac{1}{2} Y(0) \quad \text{и} \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{Y(t)}{t} = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 есть утверждение о приводимости уравнения (2), так как

$$\frac{d}{dt} Z_{\omega/2}(t) = A_E(t) - Z_{\omega/2}(t)Q.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для $E > E_{C_0}(\|q\|_r)$*

- 1) *матрица $Q(E) = 0$ для коллапсирующей щели и $Q(E)$ нильпотентна в концевых точках щели;*
- 2) *для плотного множества G_δ потенциалов q в $\|q\|_r$ -топологии существует $E > E_{C_0}(\|q\|_r)$ такое, что для этого E уравнение (2) имеет неограниченное решение $Y_{\omega/2}(t)$ и $\rho(E)$ не является ни диофантовым, ни рациональным.*

ТЕОРЕМА 3. *Для $E > E_{C_0}(\|q\|_r)$ справедливы следующие утверждения:*

- 1) *для плотного множества G_δ потенциалов q в $\|q\|_r$ -топологии пересечение $\sigma(\bar{L}) \cap [E, \infty]$ есть канторово множество;*
- 2) *ограничение спектра $\sigma(\bar{L})$ на интервал (E, ∞) содержит только абсолютно непрерывную компоненту.*

Ранее в работах [5], [26] было показано, что спектр $\sigma(\bar{L})$ в пересечении с интервалом (E, ∞) при достаточно больших E содержит абсолютно непрерывную компоненту $\tilde{\sigma}_{ac}(\bar{L})$ и мера $(\sigma(\bar{L}) \setminus \tilde{\sigma}(\bar{L})) \cap (E, \infty) \rightarrow 0$ при $E \rightarrow \infty$.

Затем в [27] была построена другая часть абсолютно непрерывного спектра $\tilde{\sigma}(\bar{L}) \subset \sigma(\bar{L})$, не содержащаяся в $\tilde{\sigma}(\bar{L})$. Однако, $\tilde{\sigma}(\bar{L}) \cup \tilde{\tilde{\sigma}}(\bar{L})$ не совпадало со всем спектром.

В [5] и [26] впервые были применены методы КАМ-теории для анализа спектра квазипериодических операторов и доказательства приводимости системы (2) на Tor^d

к системе с постоянными коэффициентами для значений E , принадлежащих спектру оператора $\sigma(\bar{L})$. Как известно, методы КАМ-теории предполагают отсутствие малых знаменателей (резонансов) на каждом шаге индуктивной процедуры, что приводит к бесконечному числу дополнительных условий на значения E , при которых этот процесс может быть проведен до конца. Этим объясняется то обстоятельство, что в результате применения КАМ-теории получается лишь часть спектра.

В [27] методы приводимости уравнения (2) были развиты для случая, когда на каждом шаге индукции имеется не более одного резонанса. В этом случае замена переменных в уравнении (2) уже не будет близкой к тождественной, как это было в [5] и [26]. Но присутствие не более одного резонанса на каждом шаге индуктивной процедуры и разреженность этих резонансов дает возможность доказать существование предельной замены, осуществляющей приводимость уравнения (2).

Но и здесь при проведении индуктивной процедуры возникала необходимость исключения значений E , не удовлетворяющих бесконечному числу арифметических условий.

Основное достижение работы [24] состоит в том, что единственное арифметическое условие, ограничивающее значения E , для которых индукция может быть проведена, – это условие диофантовости или рациональности индекса вращения $\rho(E)$.

Часть вторая. Экспоненциальная локализация собственных функций квазипериодических операторов с дальнodelствием на решетке

В этой части рассматриваются квазипериодические самосопряженные операторы на решетке, отвечающие взаимодействию бесконечного радиуса, убывающему экспоненциально с ростом расстояния. К исследованию спектров таких операторов сводятся многие интересные физические задачи, например, движение электрона в постоянном магнитном поле при малых периодических возмущениях; распространение поверхностных волн в полупространстве, ограниченном шероховатой стенкой, форма которой задается квазипериодической функцией.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка результата

Как и в первой части, пусть $\mathbb{Z}^\nu$ есть ν -мерная целочисленная решетка в $\mathbb{R}^\nu$, $n = (n_1, \dots, n_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ – произвольная точка решетки.

Для любой комплекснозначной функции φ на решетке $\mathbb{Z}^\nu$ и любого действительного числа $\rho \geq 0$ определим ρ -норму функции φ как

$$\|\varphi\|_\rho = \sum_{n \in \mathbb{Z}^\nu} |\varphi(n)| e^{\rho|n|}.$$

Удобно ввести в рассмотрение банахово пространство H^ρ всех функций φ с конечной ρ -нормой. Легко проверить, что для любых $\rho' \geq \rho''$ справедливо неравенство $H^{\rho'} \subseteq H^{\rho''}$.

Пусть $(X, \{T_\omega^n\}, \mu)$ – динамическая система, $X = S^1$ – единичная окружность, μ – мера Лебега, $\{T_\omega^n\}$ – действие группы $\mathbb{Z}^\nu$ на S^1 , определяемое следующим образом.

Зафиксируем вектор $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ с компонентами ω_i , $1 \leq i \leq \nu$, такой, что ω_i удовлетворяют условию: для любого $n \in \mathbb{Z}^\nu$, $n \neq 0$,

$$|\{(n, \omega)\}| > 0.$$

Здесь фигурные скобки обозначают дробную часть числа, $(n, \omega) = n_1\omega_1 + \dots + n_\nu\omega_\nu$.

Положим для $x \in S^1$

$$T_\omega^n x = x + (n, \omega) \pmod{1}.$$

Ясно, что динамическая система $(X, \{T_\omega^n\}, \mu)$ эргодична.

Теперь рассмотрим функцию $\varphi(n, x) \in A^{(\rho)}$, $\rho \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}^\nu$, $x \in S^1$, и эргодическое семейство операторов $\widehat{\varphi}(x)$, определяемое функцией $\varphi(n, x)$ и ассоциированное с динамической системой $(X, \{T_\omega^n\}, \mu)$ (см. введение к этой статье).

Для любого $\varphi \in A^\rho$ мы введем разложение на его “диагональную” и “внедиагональную” части:

$$\varphi(n, x) = D_\varphi(x)\delta_{n0} + V_\varphi(n, x), \quad D_\varphi(x) = \varphi(0, x), \quad V_\varphi(n, x) = (1 - \delta_{n0})\varphi(n, x).$$

Из определений следует, что в матричном представлении

$$\widehat{\varphi}_{mn}(x) = D_\varphi(T^n x)\delta_{mn} + (1 - \delta_{mn})V_\varphi(n - m, T^m x),$$

т.е. разложение $\varphi(n, x)$ на “диагональную” и “внедиагональную” компоненты связано с разложением оператора $\varphi(x)$ в сумму его диагональной и внедиагональной частей.

Напомним, что условие самосопряженности имеет вид

$$\varphi^*(n, x) = \varphi(n, x).$$

Основной результат этой части составляет

ТЕОРЕМА. Пусть $d(x)$ — C^2 -функция на S^1 , имеющая ровно две критические невырожденные точки. Предположим также, что $V(n, x) \in A^\rho$ для некоторого $\rho > 0$ и $V^*(n, x) = V(n, x)$, $V(0, x) \equiv 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют множество $\Omega_{\rho, \delta} \subseteq \Omega = [0, 1]^\nu$, $\text{mes } \Omega_{\rho, \delta} > 1 - \delta$, и положительное число $\epsilon(d, \rho, \delta)$ такие, что если $\omega \in \Omega_{\rho, \delta}$, $\|V\|_\rho \leq \epsilon(d, \rho, \delta)$, $\left\| \frac{dV}{dx} \right\|_\rho \leq \epsilon(d, \rho, \delta)$, $\left\| \frac{d^2V}{dx^2} \right\|_\rho \leq \epsilon(d, \rho, \delta)$, то для почти всех $x \in S^1$ операторы семейства $\widehat{\varphi}(x)$, определяемого функцией $\varphi(n, x) = d(x)\delta_{n0} + (1 - \delta_{n0})V(n, x)$ и ассоциированного с динамической системой $(X, \{T_\omega^n\}, \mu)$, имеют чисто точечный спектр. Все собственные функции этих операторов принадлежат пространству $H^{\rho \setminus 2}$. Кратность каждого собственного значения равна 1. Спектр оператора $\widehat{\varphi}(x)$ как множество имеет положительную меру.

Ранее в [28] при тех же условиях было доказано, что для почти всех x спектр оператора $\widehat{\varphi}(x)$ является чисто точечным, его собственные функции принадлежат $\ell^1(\mathbb{Z}^\nu) \subset \ell^2(\mathbb{Z}^\nu)$, кратность спектра не превосходит 2.

Для доказательства теоремы применяется индуктивный процесс, представляющий собой, как и в [28], вариант КАМ-теории для нерезонансных x и процедуру расщепления резонансов для резонансных x , как и в [1]. Анализ резонансных значений x основан на ограниченности кратности резонансов и их разреженности.

Усиление результата из [28] достигается благодаря иному выбору параметров индуктивного процесса и более точным оценкам приближенных собственных функций, строящихся на каждом шаге индукции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $e: S^1 \rightarrow S^1$ – взаимно однозначное отображение окружности S^1 , сохраняющее меру Лебега и переводящее каждую траекторию динамической системы $(S^1, \{T_\omega^n\}, \mu)$ в себя. Последнее означает, что для любого $x \in S^1$ существует $p(x) \in \mathbb{Z}^\nu$, для которого $e(x) = T^{p(x)}x$. Рассмотрим произвольный самосопряженный элемент $\varphi(n, x) \in A^\rho$ и элемент $\tilde{\varphi}(n, x) = \varphi(n, e(x))$. Легко проверить, что $\tilde{\varphi}(n, x) \in A^\rho$ и $\|\varphi\|_\rho = \|\tilde{\varphi}\|_\rho$.

Предположим, что $\{f_n(x)\}$ – собственный вектор оператора $\hat{\varphi}(x)$ с собственным значением $\lambda(x)$, т.е.

$$\sum_n \varphi(n - m, T^m x) f_n(x) = \lambda(x) f_m(x), \quad e(x) = T^{p(x)}x.$$

Мы можем переписать это равенство следующим образом:

$$\sum_m \varphi((n - p) - (m - p), T^{m-p}(e(x))) f_m(x) = \lambda(x) f_m(x).$$

Это означает, что оператор $\hat{\varphi}(e(x))$ имеет собственный вектор $\{\bar{f}_n(x)\} = \{f_{n+p}(x)\}$ с тем же самым собственным значением $\lambda(x)$. Таким образом, если оператор $\hat{\varphi}(x)$ имеет полный набор собственных функций $\{f^{(n)}\}$ с собственными значениями $\{\lambda^{(n)}(x)\}$, то оператор $\hat{\varphi}(e(x))$ также имеет полный набор собственных функций $\{\bar{f}^{(n)}\}$ с теми же собственными значениями. Из вида функции $\bar{f}^{(n)}$ следует, что она экспоненциально убывает при $|n| \rightarrow \infty$, если это верно для $f^{(n)}$ (множитель при экспоненте, вообще говоря, изменится). Это замечание будет неоднократно использовано в дальнейшем.

§ 2. Доказательство теоремы

Как уже отмечалось, основой доказательства теоремы является индуктивный процесс, который заключается в том, что на s -м шаге индукции мы определяем такой унитарный элемент $v^{(s)}(n, x)$ алгебры $A^{(\rho_s)}$, что элемент $\varphi^{(s+1)}(n, x)$, принадлежащий алгебре $A^{(\rho_{s+1})}$ и равный $(Ad_{v^{(s)}}(\varphi^{(s)}))(n, x) = (v^{(s)*} \cdot \varphi^{(s)} \cdot v^{(s)})(n, x)$, имеет вид

$$\varphi^{(s+1)}(n, x) = d^{(s+1)}(x) + V^{(s+1)}(n, x),$$

где элементы $d^{(s+1)}(x)$ и $V^{(s+1)}(n, x)$ являются кусочно непрерывными функциями от x вместе с их первыми и вторыми производными, элемент $V^{(s+1)}(n, x)$ имеет порядок малости $\epsilon^{(s+1)}, \epsilon^{(s+1)} = (\epsilon^{(s)})^{1+\kappa}$, κ – фиксированное положительное число. При этом функция $d^{(s+1)}(x)$ сохраняет свое основное свойство: каждое свое значение она принимает ровно два раза (с учетом кратности). Здесь и далее с целью сокращения обозначений, мы пишем $d(x)$, $d^{(s)}(x)$ и т. п. вместо $d(x)\delta_{0n}$, $d^{(s)}(x)\delta_{0n}$ для обозначения диагональных частей элементов $\varphi(n, x)$, $\varphi^{(s)}(n, x)$ алгебры A^ρ .

Величины ρ_s убывают с ростом s , оставаясь больше $\rho/2$, что позволяет доказать экспоненциальное убывание собственных функций исходного оператора $\hat{\varphi}(x)$.

Более того, при фиксированном x столбцы оператора $\widehat{v}^{(s)}(n, x) = (v^{(1)} \dots v^{(s)})(n, x)$ являются приближенными собственными функциями оператора $\hat{\varphi}(n, x)$ с точностью $\epsilon^{(s+1)}$, а соответствующий набор приближенных собственных значений этого оператора совпадает с множеством значений функции $d^{(s+1)}$ вдоль траектории точки x под действием динамической системы $\{T^n\}$.

На s -м шаге индукции определяется понятие s -резонансной пары (n, x) , элемент $v^{(s)}(n, x)$ определяется различным образом для нерезонансных и резонансных значений x . Для первого случая $v^{(s)}(n, x)$ находится с помощью теории возмущений типа КАМ-теории. Для резонансных x , которым может отвечать только кратность 2 и соответствующие двумерные подпространства, элемент $v^{(s)}(n, x)$ соответствует вращению в таких подпространствах, приводящему ограничение оператора $\widehat{\varphi}^{(s)}(n, x)$ на этих подпространствах к диагональному виду. Для таких x элемент $v^{(s)}(n, x)$ не является близким к единичному в противоположность нерезонансным x . Такие вращения мы называем расщеплениями резонансных зон. В отличие от [1], где была доказана оценка снизу для убывания собственных функций и, благодаря этому, оценка снизу размера щели, образующейся в спектре при расщеплении внутри всей резонансной зоны, в нашем случае такая оценка, вообще говоря, не может быть получена, и мы вынуждены проводить расщепление лишь в части резонансной зоны. Поэтому мы различаем полное и частичное расщепление резонансных зон.

Однако, и в нашем случае почти каждая точка x может находиться в резонансной зоне только конечное число раз. Это позволяет доказать сходимость $\prod_{s=1}^{\infty} \widehat{v}^{(s)}(n, x)$ для почти всех x , что обеспечивает существование полного набора собственных функций, обладающего желаемыми свойствами.

2.1. Индуктивная лемма. Положим $\kappa = 1/4$ и определим следующие четыре последовательности чисел:

$$\begin{aligned} \epsilon_{s+1} &= \epsilon_s^{1+\kappa}, \quad \epsilon_1 = \epsilon, \quad R_s = [\Gamma s^2 \ln \epsilon_s^{-1}], \quad \rho_{s+1} = \rho_s - \frac{3}{\pi^2} \frac{\rho}{s^2}, \quad s > 1, \\ \rho_1 &= \rho, \quad \delta_s = \epsilon_s^{\frac{\mu}{s}}, \quad \bar{s} = \max(1, s - g(s)), \end{aligned}$$

где

$$g(s) = [(\ln \Gamma \rho + \ln 10 + 2 \ln s)(\ln(1 + \kappa))^{-1}].$$

Здесь μ – достаточно малое число, Γ – постоянная такая, что $\Gamma \rho$ достаточно велико (можно считать, что $\Gamma \rho = 100$).

Кроме того, мы предполагаем, что вектор ω удовлетворяет следующему диофантову условию:

$$(D) \quad |\{(n, \omega)\}| > \frac{\epsilon^\sigma}{s^2 |n|^{\nu+1}}, \quad |n| \leq R_s, \quad n \neq 0,$$

с некоторой фиксированной постоянной σ такой, что σ/μ достаточно мало. Здесь $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что $\rho_s > \rho/2$. В самом деле,

$$\rho_s = \rho - \frac{3}{\pi^2} \sum_{k=1}^s \frac{1}{s^2} > \rho - \frac{3}{\pi^2} \sum_{k=1}^s \frac{1}{s^2} = \frac{\rho}{2}.$$

Смысл функции $g(s)$ станет ясным несколько позже. Ясно также, что лебегова мера множества векторов ω ($|\omega_i| < 1$), удовлетворяющих условию (D), больше $1 - C\epsilon^\sigma$, где C – абсолютная постоянная.

В дальнейшем в формулировках и доказательствах различных утверждений будут встречаться постоянные, как абсолютные, так и зависящие от вида функций $\varphi(n, x)$,

размерности ν и т. п., но не зависящие от s . Все такие постоянные будут обозначаться символами $C, C_1, C_2, \dots$, иногда даже различные постоянные будут обозначаться одним и тем же символом. В других случаях будет указываться зависимость от s : $C(s), C_1(s), \dots$. Значение ϵ предполагается столь малым, что все необходимые соотношения выполняются.

Предположим, что для $1 \leq t \leq s$

0_s) существуют такие множества $\Omega_t \subset \Omega$, $\text{mes } \Omega_t > 1 - C\epsilon^\sigma \sum_{k=1}^t k^{-2}$, $\Omega_t \supset \Omega_{t+1}$, что для $\omega \in \Omega_t$ выполнены следующие условия:

1_s) $\varphi_\omega^{(t)}(n, x) = d_\omega^{(t)}(x) + V_\omega^{(t)}(n, x)$, где $d_\omega^{(t)}(x) = \varphi_\omega^{(t)}(0, x)$; функции $d_\omega^{(t)}(x)$, $V_\omega^{(t)}(n, x)$ кусочно непрерывны и на каждом интервале (полуинтервале, отрезке) непрерывности принадлежат классу C^2 ; в точках непрерывности (односторонней непрерывности) функции $d_\omega^{(t)}(x)$ функции $V_\omega^{(t)}(n, x)$ непрерывны (односторонне непрерывны), если $\bar{x}$ — точка разрыва функции $d_\omega^{(t)}(x)$ или $V_\omega^{(t)}(n, x)$, то существует такое $p(\bar{x})$, $|p(\bar{x})| < R_t$, что $T^{p(\bar{x})}\bar{x}$ является также точкой разрыва функции $d_\omega^{(t)}(x)$, причем лево(право)-сторонние пределы функций $d_\omega^{(t)}(x)$ и $V_\omega^{(n)}(n, x)$ и их первых и вторых производных совпадают с право(лево)-сторонними пределами функций $d_\omega^{(t)}(T^{p(\bar{x})}x)$, $V_\omega^{(t)}(n, T^{p(\bar{x})}x)$ и их первых и вторых производных при $x \rightarrow \bar{x}$.

(Элемент $\varphi_\omega^{(t)}(n, x)$ зависит от ω , но мы далее опускаем указание на эту зависимость с целью упрощения обозначений, имея в виду, что соответствующие условия выполнены для каждого $\omega \in \Omega_t$.)

Для формулировки остальных условий необходимо привести некоторые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пара (n, x) , $x \in S^1$, $n \neq 0 \in \mathbb{Z}^\nu$, называется t -резонансной, если $|n| \leq R_t$ и

$$\|d^{(t)}(x) - d^{(t)}(T^n x)\| < \delta_t.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что вместе с t -резонансной парой (n, x) таковой является пара $(-n, T^n x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Связная компонента $O_{t,i}^{(n)}$ множества точек x , для которых (n, x) является t -резонансной парой, называется *резонансной зоной* (РЗ) порядка t .

Здесь индекс i отмечает номер РЗ при фиксированных n и t ; иногда мы будем опускать этот индекс, имея в виду, что соответствующие утверждения справедливы для любого возможного значения индекса i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Связная компонента $\tilde{O}_{t,i}^{(n)}$ множества

$$\{x \in S^1 : |d^{(t)}(x) - d^{(t)}(T^n x)| < 2\delta_t\},$$

содержащая РЗ $O_{t,i}^{(n)}$, называется *расширением* этой РЗ.

2_s) Для каждого t рассмотрим все РЗ $O_{t_1, i}^{(n)}$ порядка t_1 , где $\bar{t} \leq t_1 \leq t$. РЗ $O_{t_1, i}^{(n)}$ будет называться максимальной, если она не содержится ни в какой другой РЗ $O_{t_2, j}^{(n)}$, $\bar{t} \leq t_2 \leq t_1$. Расширения $\tilde{O}_{t_1, i}^{(n)}$ всех максимальных РЗ для $\bar{t} \leq t_1 \leq t$ попарно не пересекаются. Диаметр расширения каждой максимальной РЗ порядка t_1 не превосходит $C\delta_{t_1}^{1/2}$. Число РЗ $O_{t_1, i}^{(n)}$ с фиксированным n конечно.

В дальнейшем мы будем рассматривать только максимальные РЗ, не оговаривая этого специально.

3_s) Функции $d^{(t)}(x)$ и $V^{(t)}(n, x)$ таковы, что их ограничения на $\tilde{O}_{t_1}^{(n)}$, $\bar{t} \leq t_1 \leq t$, принадлежат $C^2(\tilde{O}_{t_1}^{(n)})$.

4_s) Функция $V^{(t)}(n, x)$ может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$V^{(t)}(n, x) = V_R^{(t)}(n, x) + V_{NR}^{(t)}(n, x),$$

где $V_{NR}^{(t)}(n, x) = V^{(t)}(n, x)$, если (n, x) не является t_1 -резонансной парой для $\bar{t} \leq t_1 \leq t$, и $V_{NR}^{(t)}(n, x) = 0$ в остальных случаях. При этом $V_{NR}^{(t)}(n, x) \in A^{(\rho_t)}$ и имеют место следующие оценки:

$$\|V_{NR}^{(t)}(n, x)\|_t \leq \epsilon_t, \quad \left\| \frac{d}{dx} V_{NR}^{(t)}(n, x) \right\|_t \leq \epsilon_t^{3/4}, \quad \left\| \frac{d^2}{dx^2} V_{NR}^{(t)}(n, x) \right\|_t \leq \epsilon_t^{1/2}$$

(здесь и далее мы пишем $\|\cdot\|_t$ вместо $\|\cdot\|_{\rho_t}$).

Функция $V_R^{(t)}(n, x)$ представляется в виде суммы $((t - \bar{t}) + 1)$ слагаемых:

$$V_R^{(t)}(n, x) = \sum_{l=0}^{t-\bar{t}} V_R^{(t), l}(n, x),$$

где $V_R^{(t), l}(n, x) = V^{(t)}(n, x)$ для $x \in \bigcup_i O_{t-l, i}^{(n)}$ и $V_R^{(t), l}(n, x) = 0$ в остальных случаях. Справедливы следующие оценки:

$$\|V_R^{(t), l}(n, x)\|_t \leq C\epsilon_{t-l}, \quad \left\| \frac{d}{dx} V_R^{(t), l}(n, x) \right\|_t \leq C\epsilon_{t-l}^{3/4}, \quad \left\| \frac{d^2}{dx^2} V_R^{(t), l}(n, x) \right\|_t \leq C\epsilon_{t-l}^{1/2}.$$

Мы будем называть $V_R^{(t)}(n, x)$ резонансной частью, а $V_{NR}^{(t)}(n, x)$ – нерезонансной частью элемента $\varphi^{(t)}(n, x)$.

Для того чтобы сформулировать остальные условия, удобно ввести вспомогательные функции $\tau^{(t)}(x)$, $\tau_1^{(t)}(x)_1$ и $\tau_*^{(t)}(x)$, определенные для всех $t \leq s$ и принимающие значения в множестве неотрицательных целых чисел.

Функция $\tau^{(t)}(x)$ отмечает попадание точки x в РЗ: $\tau^{(t)}(x) = t$, если x принадлежит РЗ порядка t_1 , $\bar{t} \leq t_1 \leq t$, и $\tau^{(t)}(x) = \tau^{(t-1)}(x)$ в противном случае. Мы полагаем $\tau^{(0)}(x) \equiv 0$.

Функция $\tau_1^{(t)}(x)$ связана с моментом первого попадания в РЗ, возможно после некоторого перерыва: $\tau_1^{(t)}(x) = t_1$, если $\tau^{(\bar{t})}(x) = \bar{t}$ для всех $t_1 \leq \bar{t} \leq t$, но $\tau^{(t_1-1)}(x) \neq t_1 - 1$.

Функция $\tau_*^{(t)}(x)$ определяется более сложным образом, и ее точное определение будет дано в ходе доказательства индуктивной леммы. (Смысл функции $\tau_*^{(t)}(x)$ состоит в том, что $\tau_*^{(t)}(x) = t_0$, если на шаге индукции с номером t_0 произошло последнее расщепление РЗ, содержащей точку x .) Здесь важно отметить следующие ее свойства: $\tau_*^{(t)}(x) = \tau_*^{(t-1)}(x)$, если x не принадлежит ни одной РЗ порядка t_1 , $\bar{t} \leq t_1 \leq t$.

5_s) Пусть $\tau_1^{(t)}(x) = t$ и $x \in O_t^{(n)}$. Тогда существует такая точка $x_* \in O_t^n$, что $d^{(t)}(x_*) = d^{(t)}(T^n x_*)$ и $\operatorname{sgn} \frac{d}{dx} d^{(t)}(x_*) = -\operatorname{sgn} \frac{d}{dx} d^{(t)}(T^n x_*)$ для всех $x \in O_t^{(n)}$. Если $\tau_*^{(t-1)}(x) > 0$, то $t - \tau_*^{(t-1)}(x) > C \ln \epsilon^{-1}(1 + \kappa)^{\tau_*^{(t-1)}(x)}$. Справедливы следующие неравенства:

$$\left| \frac{d}{dx} d^{(t)}(x) \right| < C, \quad \left| \frac{d^2}{dx^2} d^{(t)}(x) \right| < C \frac{t - \tau_*^{(t-1)}(x) + 1}{\epsilon_{\tau_*^{(t-1)}(x)+1}}.$$

Кроме того, либо $\left| \frac{d}{dx} d^{(t)}(x) \right| > C \epsilon_{\tau_*^{(t-1)}(x)+1}$, либо $\left| \frac{d^2}{dx^2} d^{(t)}(x) \right| > C$, причем первое неравенство может нарушаться только в окрестности критической точки функции $d^{(t)}(x)$ диаметра $C \epsilon_{\tau_*^{(t-1)}(x)+1}$, в которой второе неравенство выполнено.

Пусть x^* – критическая точка функции $d^{(t)}(x)$ и $\tau_*^{(t)}(x) = t_1 < t$. Тогда существуют такие постоянные $C_1 > 0, C_2 > 0$ и такая окрестность $O_{t_1}(x^*)$ точки x^* , что функция $d^{(t)}(x)$ каждое свое значение $\bar{d}$, $|\bar{d} - d^{(t)}(x^*)| < C_1 \delta_{t_2}^{1/2}$, принимает ровно два раза (с учетом кратности), при этом $C_2 \delta_{t_2} < \operatorname{diam}(O_{t_1}(x^*)) < C_2 \delta_{t_2}^{1/2}$. Здесь $t_2 = \max(k: t > k \geq t_1, O_{t_1}^{(n)}(x^*) \cap O_k^{(m)} \neq \emptyset)$, $O_{t_1}^{(n)}(x^*)$ – РЗ порядка t_1 , содержащая точку x^* .

6_s) Функция $d^{(t)}(x)$ принимает каждое свое значение ровно два раза (с учетом кратности).

Пусть I_t – область значений функции $d^{(t)}(x)$ и $I_t = \bigcup I_t^{(i)}$ – ее разложение на связные компоненты. Положим $S_t^{(i)} = (d^{(t)})^{-1}(I_t^{(i)})$ для каждого i . При любом i $S_t^{(i)}$ состоит не более чем из двух компонент, каждая из которых является полуинтервалом. Если $S_t^{(i)}$ состоит из двух компонент, скажем, $S_{t,1}^{(i)}$ и $S_{t,2}^{(i)}$, то существует такое $p = p(S_t^{(i)})$, что $|p| < R_{\bar{s}}$, $T^p S_{t,2}^{(i)} \cap S_{t,1}^{(i)} = \emptyset$, а $S_{t,1}^{(i)} \cup T^p S_{t,2}^{(i)} = \tilde{S}_t^{(i)}$ представляет собой полуинтервал.

В случае связного $S_t^{(i)}$ положим $S_{t,1}^{(i)} = S_t^{(i)}$, $S_{t,2}^{(i)} = \emptyset$.

Функция $\tilde{d}^{(t)}(x)$, равная $d^{(t)}(x)$ на $S_{t,1}^{(i)}$ и $d^{(t)}(T^{-p}x)$ на $T^p S_{t,2}^{(i)}$, непрерывна вместе со своими первыми двумя производными, имеет ровно две невырожденные критические точки на $\tilde{S}_t^{(i)}$ и принимает каждое свое значение (за исключением значения в конце полуинтервала) ровно два раза (с учетом кратности).

Если x не содержится в расширении ни одной РЗ $\tilde{O}_{t_1}^{(n)}$ и ни одного из сдвигов $T^k \tilde{O}_t^{(n)}$, $|k| \leq R_{\bar{t}}$, $\bar{t} \leq t_1 \leq t$, то $|d^{(t-1)}(x) - d^{(t)}(x)| < \epsilon_t \epsilon_{\bar{t}}^{-\mu}$. На каждом максимальном интервале непрерывности $d^{(t)}(x)$ содержит, по крайней мере,

одну критическую точку. Внутри каждой РЗ $O_{t_1}^{(n)}$, $\bar{t} \leq t_1 \leq t$, функция $d_1^{(t)}(x)$ или строго монотонна, или имеет ровно одну невырожденную критическую точку. В первом случае внутри РЗ $O_{t_1}^{(n)}$ существует точка x_* , в которой $d^{(t)}(x_*) = d^{(t)}(T^n x_*)$.

Во втором случае пусть $O_{t_1}^{(n)}$ – РЗ, содержащая точку x , а $O_{t_1}^{(-n)}$ – РЗ, содержащая точку $T^n x$, $t_1 = \tau_*^{(t_1)}(x) + 1$. Положим $I_{t_1}^{(n)} = (d^{(t_1)})^{-1}(O_{t_1}^{(n)})$, $I_{t_1}^{(-n)} = (d^{(t_1)})^{-1}(O_{t_1}^{(-n)})$. Тогда $C_2 \epsilon_{t_1-1} > \text{dist}(I_{t_1}^{(n)}, I_{t_1}^{(-n)}) > C_1 \epsilon_{t_1}$.

ИНДУКТИВНАЯ ЛЕММА. Пусть выполнены предположения $0_s)$ – $6_s)$. Тогда существуют такой унитарный элемент $u^{(s)} \in A^{\rho_s}$ и такое взаимно однозначное сохраняющее меру Лебега и переводящее каждую траекторию динамической системы $(S^1, \{T_\omega^n\}, \mu)$ в себя отображение $e^{(s)}: S^1 \rightarrow S^1$, что

$$\varphi^{(s+1)}(n, x) = \overline{\varphi}^{(s+1)}(n, e^{(s)}(x))$$

удовлетворяет предположениям $0_{s+1})$ – $6_{s+1})$, где

$$\overline{\varphi}^{(s+1)}(n, x) = u^{(s)*} \varphi^{(s)} u^{(s)}(n, x).$$

Кроме того, $u^{(s)}(n, x) = q^{(s)} r^{(s)}(n, x)$, где $q^{(s)}(n, x), r^{(s)}(n, x) \in A^{\rho_s}$ – унитарные элементы, $\|q^{(s)} - Id\|_{\rho_s} < C \epsilon_s \epsilon_{\bar{s}}^{-\mu}$, элементы $r^{(s)}(n, x)$ совпадают с единичным вне объединения расширений РЗ порядка t , $\bar{s} \leq t \leq s$.

Отображение $e^{(s)}: S^1 \rightarrow S^1$ может быть описано следующим образом. Существуют конечное множество индексов $J^{(s)}$, его разбиение $J^{(s)} = J_1^{(s)} \cup J_2^{(s)}$, $J_1^{(s)} \cap J_2^{(s)} = \emptyset$, $|J_1^{(s)}| = |J_2^{(s)}|$, конечное число подмножеств I_j , занумерованных элементами множества $J^{(s)}$, взаимно однозначное отображение $l: J_1^{(s)} \rightarrow J_2^{(s)}$ и функция $p_s: S^1 \rightarrow \mathbb{Z}^\nu$ такие, что

- 1) каждое из множеств I_j является интервалом или полуинтервалом;
- 2) $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \emptyset$, если $j_1 \neq j_2$;
- 3) каждое множество I_j содержится либо в расширении какой-либо РЗ $\tilde{O}_{s+1}^{(n)}$ порядка $s+1$ для $\varphi^{(s+1)}(n, x)$, либо в ее сдвиге $T^k \tilde{O}_{s+1}^{(n)}$, $|k| < R_{\bar{s}}$,
 $p_s(x) = 0$ для $x \in S^1 \setminus \bigcup_{j \in J^{(s)}} I_j$; $p_s(x)$ постоянна на I_j , $j \in J^{(s)}$;
 $p_s(x)|_{I_{j_1}} = -p_s(x)|_{I_{l(j_1)}}$, $e^{(s)}(x) = T^{p_s(x)} x$.

ЛЕММА 1. Для $s = 1$ индуктивные предположения $0_s)$ – $6_s)$ выполнены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\tau^{(1)}(x) = 1$ для окрестностей критических точек (максимум и минимум) диаметра $\epsilon_1^{\mu/2}$ и $\tau^{(1)}(x) = 0$ для остальных x . Кроме того, $\tau_1^{(1)}(x) = \tau^{(1)}(x)$ и $\tau_*^{(1)}(x) = \tau^{(1)}(x)$. В качестве множества Ω_1 выберем множество всех таких ω , что $|\{(n, \omega)\}| > \epsilon^\sigma / |n|^{\nu+1}$ для $|n| \leq R_1$, $n \neq 0$. Теперь выполнение всех индуктивных предположений может быть проверено непосредственно.

Доказательство индуктивной леммы будет приведено в § 3.

2.2. Вывод теоремы из индуктивной леммы.

ЛЕММА 2. 1) Почти каждая точка $x \in S^1$ принадлежит множествам

$$O^{(s)} = \bigcup_{\bar{s} \leq t \leq s} \bigcup_n \bigcup_i O_{t,i}^{(n)}$$

лишь для конечного числа значений s .

2) Почти каждая точка $x \in S^1$ принадлежит множествам

$$\tilde{O}^{(s)} = \bigcup_{\bar{s} \leq t \leq s} \bigcup_n \bigcup_i \tilde{O}_{t,i}^{(n)}$$

лишь для конечного числа значений s .

3) Положим $A_s = \{x \in S^1 : e^{(s)}(x) \neq x\}$, $1 \leq s < \infty$. Почти каждая точка $x \in S^1$ принадлежит множествам A_s лишь для конечного числа значений s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение 1). Мера РЗ $O_t^{(n)}$ порядка t , $\bar{s} \leq t \leq s$, не превосходит $C\delta_{\bar{s}}^{1/2}$. Каждая точка x находится в РЗ $O_t^{(n)}$ не более $g(s)$ шагов индукции. Число различных n с $|n| \leq R_s$ не превосходит CR_s^ν .

Оценим сверху число РЗ $O_t^{(n)}$ с фиксированным n . Каждая РЗ в момент своего возникновения τ_1 содержит такую точку x_* , что $d^{(\tau_1)}(x_*) = d^{(\tau_1)}(T^k x_*)$, где $|k| \leq R_{\tau_1}$ и функции $d^{(\tau_1)}(x)$ и $d^{(\tau_1)}(T^k x)$ имеют противоположные монотонности в окрестности точки x_* . Следовательно, число РЗ $O_s^{(n)}$ с фиксированным n не превосходит числа критических точек функции $d^{(s)}(x)$, которое, в свою очередь, не превосходит числа всех РЗ порядка $t \leq s$. Поэтому если число РЗ порядка $\leq k-1$ равно N_{k-1} , то число $N_k^{(n)}$ РЗ порядка k с фиксированным n не превосходит N_{k-1} . Отсюда получаем, что $N_k < CN_{k-1}R_k^\nu$. Так как $N_0 = 2$, то $N_k \leq 2C^k \prod_{l=1}^k R_l^\nu$. Итак, сумма мер множеств точек x , принадлежащих на s -м шаге индукции какой-либо РЗ, по всем s не превосходит

$$\sum \delta_{\bar{s}}^{1/2} \cdot g(s) \cdot N_s R_s^\nu < 2 \sum_s \left(\delta_{\bar{s}}^{1/2} \cdot g(s) \cdot C^s \prod_{k=1}^s R_k^\nu \right) < \infty.$$

Из леммы Бореля–Кантелли следует, что почти каждая точка x окружности S^1 принадлежит РЗ не более конечного числа шагов индукции.

Утверждение 2) доказывается аналогично.

Для доказательства утверждения 3) достаточно заметить, что A_s содержится в объединении расширений всех РЗ $\tilde{O}_{s+1,i}^{(n)}$ порядка $s+1$ и их сдвигов $T^k \tilde{O}_{s+1,i}^{(n)}$, $|k| \leq R_{\bar{s}}$. Следовательно, $\mu(A_s) \leq C_1 R_{\bar{s}}^\nu \cdot N_{s+1} \cdot C \varepsilon_{\bar{s}}^{\mu/2}$, где N_{s+1} – число РЗ порядка $s+1$. Как и в доказательстве утверждения 1), получаем, что

$$\sum_s \mu(A_s) < C(\varepsilon) < \infty,$$

где $C(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Положим $e_s = \prod_{k=1}^s e^{(k)} : S^1 \rightarrow S^1$. Для почти каждой точки $x \in S^1$ существует такое $s_0(x)$, что $e_{s+1}(x) = e_s(x)$ для $s \geq s_0(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $B_s = \{x \in S^1 : e_{s+1}(x) \neq e_s(x)\}$. Так как $e_{s+1} = e^{(s+1)}e_s$ и $e^{(k)}$ сохраняет меру μ , $\mu(B_s) = \mu(A_s)$. Из $\sum_k \mu(A_k) < \infty$ вытекает справедливость следствия.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следствие 1 позволяет определить отображение $e_\infty : S \rightarrow S$, где $S \subset S^1$ и $\mu(S) = 1$. А именно, для любой точки x , удовлетворяющей следствию 1, положим $e_\infty(x) = e_{\bar{s}_0(x)}(x)$, где $\bar{s}_0(x) = \min s_0(x)$. Можно считать, что S инвариантно относительно $\{T_\omega^n\}$, так как в противном случае можно вместо S рассмотреть $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^\nu} T_\omega^n S$. Отображение $e_\infty : S \rightarrow S$ переводит каждую траекторию $\{T_\omega^n x\}$ в себя: $e_{\bar{s}_0(x)}(x) = (\prod_{k=1}^{\bar{s}_0(x)} e^{(k)})(x) = T^{q(x)}x$, где $q(x) = \sum_{k=1}^{\bar{s}_0(x)} p_k(e_{k-1}(x))$. Покажем, что отображение e_∞ взаимно однозначно и сохраняет меру μ . В самом деле, если $e_\infty(x_1) = e_\infty(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, то $e_{\bar{s}_0(x_1)}(x_1) = e_{\bar{s}_0(x_2)}(x_2)$. Тогда $e_{\bar{s}}(x_1) = e_{\bar{s}}(x_2)$, где $\bar{s} = \max(\bar{s}_0(x_1), \bar{s}_0(x_2))$, что невозможно, так как $e_{\bar{s}}$ взаимно однозначно. Пусть $B \subset S$ – измеримое множество, $C_k \subset S$, $C_k = \{x \in S : \bar{s}_0(x) = k\}$, $C_{k_1} \cap C_{k_2} = \emptyset$ при $k_1 \neq k_2$, $\bigcup_k C_k = S$. Тогда $B = \bigcup_k (B \cap C_k)$ и $e_\infty(B) = \bigcup_k e_k(B \cap C_k)$. Из взаимнооднозначности отображения e_∞ на S следует, что множества $e_\infty(B \cap C_k) = e_k(B \cap C_k)$ попарно не пересекаются. Так как каждое отображение e_k как конечное произведение отображений $e^{(l)}$ сохраняет меру μ , получаем $\mu(e_\infty(B)) = \sum_k \mu(e_k(B \cap C_k)) = \sum_k \mu(B \cap C_k) = \mu(B)$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. Существует множество $S_2 \in S^1$ полной меры такое, что для любого $x \in S_2$ оператор $\widehat{\varphi}(n, x)$ имеет чисто точечный спектр, его собственные функции $\widehat{\psi}_i(n, x)$, $i \in \mathbb{Z}^\nu$, убывают быстрее, чем $C_i(x)\epsilon^{-\frac{\rho}{2}|n|}$. Кратность спектра равна 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $p^{(s)}(n, x) = (v^{(1)} \cdot v^{(2)} \dots v^{(s)})(n, x)$, где $v^{(k)}(n, x) = u^{(k)}(n, (\prod_{t=k}^s e^{(t)})(x))$. Мы получаем, что

$$\varphi^{(s+1)}(n, x) = (p^{(s)*} \overline{\varphi}^{(s)} p^{(s)})(n, x)$$

с $\overline{\varphi}^{(s)}(n, x) = \varphi(n, e_s(x))$. Непосредственно проверяется, что если $u(n, x)$ – унитарный элемент алгебры A^ρ , то $u(n, e^{(s)}(x))$ при любом s является унитарным элементом алгебры A^ρ с той же ρ -нормой. Поэтому $p^{(s)}(n, x)$ – унитарный элемент алгебры $A^{(\rho_s)}$.

Рассмотрим множество S_0 всех точек $x \in S^1$, удовлетворяющих утверждениям 2) и 3) леммы 2. Положим $S_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^\nu} T^n S_0$. Ясно, что $\mu(S_1) = 1$. Покажем, что для любого $x \in S_1$ существует $\lim_{s \rightarrow \infty} d^{(s)}(x) = d^{(\infty)}(x)$, где $d^{(s)}(x) = \varphi^{(s)}(0, x)$. В самом деле, если $x \in S_1$, то найдется такое $s_1(x)$, что при $s \geq s_1(x)$ точка x не принадлежит расширениям $\widetilde{O}_t^{(n)}$, $\bar{s} \leq t \leq s+1$, и никаким $\bigcup_{|k| < R_{\bar{s}}} T^k \widetilde{O}_{s+1}^{(n)}$. В силу предположения 6_s) $|d^{(s+1)}(x) - d^{(s)}(x)| < \epsilon_s \epsilon_{\bar{s}}^{-\mu}$ и, следовательно, указанный предел существует для $x \in S_1$, так как $S_1 \subset S$ (S – множество точек x , удовлетворяющих утверждению 3) леммы 2).

Рассмотрим оператор $\widehat{p}^{(s)}(n, x)$. Покажем, что для почти каждого x и любого $m \in \mathbb{Z}^\nu$ предел $\lim_{s \rightarrow \infty} p_m^{(s)}(n, x) = p_m^{(\infty)}(n, x)$ существует в $\ell^2(\mathbb{Z}^\nu)$, где $p_m^{(s)}(x)$ – m -й столбец матрицы $\widehat{p}^{(s)}(x)$, и матрица $\widehat{p}^{(\infty)}(x)$, составленная из столбцов $p_m^{(\infty)}(x)$, есть матрица унитарного оператора в $\ell^{(2)}(\mathbb{Z}^\nu)$. Действительно, элементы

$p_m^{(s)}(x)$ имеют вид $p^{(s)}(m - n, T^n x)$. Если $x \in S_1$, то $T^n x \in S_1$ для любого $n \in \mathbb{Z}^\nu$ в силу инвариантности множества S_1 . Более того, рассмотрим множества $C_s^{(m)} = \{x \in S^1 : T^n x \in \tilde{O}^{(s)} \text{ для некоторого } n, |m - n| \leq R_s\}$ и множества $B_s^{(m)} = \{x \in S^1 : T^n x \in A_s \text{ для некоторого } n, |m - n| < R_s\}$. Как и в доказательстве леммы 2, можно показать, что при достаточно малом ε выполняется $\sum \mu(B_s^{(m)}) < \infty$ и $\sum \mu(C_s^{(m)}) < \infty$ и, следовательно, для почти каждой точки x найдется такое $N(m, x)$, что $x \notin \bigcup_{s > N(m, x)} (C_s^{(m)} \cup B_s^{(m)})$. Обозначим множество таких x через $S_1^{(m)}$ и положим $S_2 = S_1 \cap \left(\bigcap_m S_1^{(m)}\right)$. Ясно, что $\mu(S_2) = 1$. Тогда для любого $x \in S_2$ имеем

$$p_m^{(s)}(x) = \left(\prod_{t > t_1 > N(m, x)}^s \hat{q}^{(t)}(x) \right) p_m^{(t_1)}(x).$$

Так как при любом $x \in S_2$ произведение $(\prod_{t > t_0} q^{(t)})(n, x)$ сходится в $\rho/2$ -норме, то $\lim_{s \rightarrow \infty} p_m^{(s)}(x) = p_m^{(\infty)}(x)$ существует,

$$p_m^{(\infty)}(x) = \left(\prod_{t > N(m, x)} (\hat{q}^{(t)}(x)) \right) p_m^{(N(m, n))}(x)$$

и компоненты $p_m^{(\infty)}(n, x)$ вектора $p_m^{(\infty)}(x)$ удовлетворяют неравенству

$$|p_m^{(\infty)}(n, x)| < C(m, x) e^{-\frac{\rho}{2}|n|}$$

при некоторой постоянной $C(m, x)$.

Для различных $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^\nu$ векторы $p_{m_1}^{(\infty)}(x)$ и $p_{m_2}^{(\infty)}(x)$ ортогональны, и их совокупность $\{p_m^{(\infty)}(x)\}$, $m \in \mathbb{Z}^\nu$, образует ортонормированный базис в $\ell^2(\mathbb{Z}^\nu)$. Это вытекает из унитарности операторов $\hat{p}^{(s)}(x)$ при любом конечном s . Легко проверить, что $p_m^{(\infty)}(x)$ является собственным вектором оператора $\hat{\varphi}(e_\infty(x))$ с собственным значением $d^{(\infty)}(T^m x)$. Из замечания в конце §1 следует, что оператор $\hat{\varphi}(x)$ имеет полный набор $\{\psi_m(x)\}$ собственных экспоненциально убывающих функций $\psi_m(x)$ с собственными значениями $d^{(\infty)}(T^m x)$, $m \in \mathbb{Z}^\nu$.

Осталось доказать утверждение о кратности спектра.

Предположим, что $d^{(\infty)}(\bar{x}) = d^{(\infty)}(T^k \bar{x})$ для $\bar{x} \in S_2$, и покажем, что это равенство невозможно. Пусть s^* таково, что точки $\bar{x}$ и $T^k \bar{x}$ не принадлежат расширению ни одной РЗ $\tilde{O}_s^{(n)}$ и ни одному $\bigcup T^k \tilde{O}_{s+1}^{(n)}$, $|k| < R_{\bar{s}}$ для $s \geq s^* + 1$. Следовательно, $|d^{(s^*+1)}(\bar{x}) - d^{(s^*+1)}(T^k \bar{x})| > \epsilon_{s^*+1}^\mu$ и $|d^{(s)}(\bar{x}) - d^{(s+1)}(\bar{x})| < \epsilon_s \epsilon_{\bar{s}}^{-\mu}$, $|d^{(s)}(T^k \bar{x}) - d^{(s+1)}(T^k \bar{x})| < \epsilon_s \epsilon_{\bar{s}}^{-\mu}$ для $s > s^*$. Но $\sum_{s > s^*} \epsilon_s \epsilon_{\bar{s}}^{-\mu} < C \epsilon_{s^*+1}^\mu$, поэтому $|d^{(s)}(\bar{x}) - d^{(s)}(T^k \bar{x})| > \frac{1}{2} \epsilon_{s^*+1}^\mu$ для $s > s^*$. Отсюда вытекает, что

$$|d^{(\infty)}(\bar{x}) - d^{(\infty)}(T^k \bar{x})| > \frac{1}{2} \epsilon_{s^*+1}^\mu, d^{(\infty)}(\bar{x}) \neq d^{(\infty)}(T^k \bar{x}),$$

что и требовалось доказать.

Утверждение о мере спектра оператора $\hat{\varphi}(n, x)$ для почти всех x вытекает из того, что семейство операторов $\hat{\varphi}(n, x)$ является метрически транзитивным и его спектр как множество не зависит от x (см. [6]), и оценок щелей в спектре, вытекающих из условия 6_s). Лемма доказана.

§ 3. Доказательство индуктивной леммы

Итак, мы предполагаем, что на s -м шаге индукции для всех $1 \leq t \leq s$ заданы

$$\varphi^{(t)}(n, x) = d^{(t)}(x) + V_R^{(t)}(n, x) + V_{NR}^{(t)}(n, x),$$

удовлетворяющие условиям $0_s) - 6_s)$.

При переходе от s к $s+1$ мы будем выполнять различные преобразования над резонансной частью $V_R^{(s)}(n, x)$ элемента $\varphi^{(s)}(n, x)$ и его нерезонансной частью $V_{NR}^{(s)}(n, x)$. Эти преобразования будут отличаться в окрестности границ РЗ. Для того, чтобы избежать возникновения большого числа разрывов функции $\varphi^{(s+1)}(n, x)$ и ее производных, а также обеспечить сохранение основного свойства функции $d^{(s+1)}(x)$ принимать каждое свое значение ровно два раза (с учетом кратности), мы включаем в наш индуктивный процесс процедуру сглаживания, сопрягающую различные преобразования в точках их совместного применения.

3.1. Процедура сглаживания. Мы определяем вспомогательную функцию $F(x) \in C^2([0, 1])$ и фиксируем ее с этого момента. Мы предполагаем, что выполнены следующие условия:

- 1) $F(0) = 0, F(1) = 1$;
- 2) $F'(0) = F''(0) = F'(1) = F''(1) = 0$;
- 3) $F'(x) > 0$ для $x \neq 0, 1$.

Для любого интервала $\Delta = (x_1, x_2)$ положим $F_\Delta(x) = F\left(\frac{x - x_1}{|\Delta|}\right)$ при $x \in \Delta$, где $|\Delta|$ – длина интервала Δ .

Каждая РЗ $O_t^{(n)}$ есть некоторый интервал $\Delta_t^{(n)} = (x_1, x_2)$ на окружности S^1 , $x_1 < x_2$. (Мы предполагаем, что в качестве локальной координаты на S^1 выбрана длина дуги, отсчитываемая от такой точки, что x является однозначной функцией на $\Delta_t^{(n)}$.)

Для любой РЗ $O_t^{(n)} = (x_1, x_2)$ рассмотрим два интервала $\Delta_t^{(n),1} = (x_1, x'_1)$ и $\Delta_t^{(n),2} = (x'_2, x_2)$, $|\Delta_t^{(n),1}| = |\Delta_t^{(n),2}| = \varepsilon_t^{1/4}$.

Оба эти интервала принадлежат $\Delta_t^{(n)}$ и не пересекаются между собой, так как из ограниченности $\frac{d}{dx}d^{(s)}(x)$ вытекает, что $|\Delta_t^{(n)}| > C\varepsilon_t^\mu$. Теперь определим функцию $F_{t,n}^{(0)}(x)$ следующим образом: $F_{t,n}^{(0)}(x) \equiv 0$ вне $O_t^{(n)}$, $F_{t,n}^{(0)}(x) = F_{\Delta_t^{(n),1}}(x)$ для $x \in \Delta_t^{(n),1}$, $F_{t,n}^{(0)}(x) = 1 - F_{\Delta_t^{(n),2}}(x)$ для $x \in \Delta_t^{(n),2}$, $F_{t,n}^{(0)}(x) = 1$ для $x \in O_t^{(n)} \setminus (\Delta_t^{(n),1} \cup \Delta_t^{(n),2})$.

Положим $F_s^{(0)}(x) = \sum F_{t,n}^{(0)}(x)$, где суммирование проводится по всем РЗ порядка t , $\bar{s} \leq t \leq s$. Из $2_s)$ следует, что $F_s^{(0)}(x)$ корректно определена.

Представим $V^{(s)}(n, x)$ в виде суммы двух слагаемых

$$V^{(s),1}(n, x) = V^{(s)}(n, x)F_s^{(0)}(x), \quad V^{(s),2}(n, x) = V^{(s)}(n, x)(1 - F_s^{(0)}(x)).$$

Легко видеть, что из определения функции $F_s^{(0)}(x)$ вытекает равенство

$$V^{(s),i}(n, x) = V^{(s),i}(-n, T^n x), \quad i = 1, 2.$$

Мы можем написать теперь следующее разложение для элемента

$$\varphi^{(s)}(n, x) = d^{(s)}(x) + V_R^{(s),1}(n, x) + U_{NR}^{(s)}(n, x)$$

с $U_{NR}^{(s)}(n, x) = V_R^{(s),2}(n, x) + V_{NR}^{(s)}(n, x)$. Легко проверить, что $V_R^{(s),1}(n, x)$ равна нулю вне РЗ $O_t^{(n)}$ и непрерывна вместе со своими первой и второй производными в $\tilde{O}_t^{(n)}$,

$$\begin{aligned} \|V_R^{(s),1}(n, x)\|_s &< \|V_R^{(s)}(n, x)\|_s + C\varepsilon_s, \quad \|U_{NR}^{(s)}(n, x)\|_s < C\varepsilon_s, \\ \left\| \frac{d}{dx} V_R^{(s),1}(n, x) \right\|_s &< \left\| \frac{d}{dx} V_R^{(s)}(n, x) \right\|_s + C\varepsilon_s^{3/4}, \\ \left\| \frac{d^2}{dx^2} V_R^{(s),1}(n, x) \right\|_s &< \left\| \frac{d^2}{dx^2} V_R^{(s)}(n, x) \right\|_s + C\varepsilon_s^{1/2}, \\ \left\| \frac{dU_{NR}^{(s)}(n, x)}{dx} \right\|_s &< C\varepsilon_s^{3/4}, \quad \left\| \frac{d^2}{dx^2} U_{NR}^{(s)}(n, x) \right\|_s < C\varepsilon_s^{1/2}. \end{aligned}$$

Кроме того, $U_{NR}^{(s)}(n, x)$ равна нулю для $x \in O_t^{(n)} \setminus (\Delta_t^{(n),1} \cup \Delta_t^{(n),2})$. Полученное разложение $\varphi^{(s)}(n, x)$ назовем сглаживанием типа 0.

Мы разделяем все РЗ $O_t^{(n)}$, $\bar{s} \leq t \leq s$, на пять типов:

0) $O_t^{(n)}$ есть РЗ типа 0, если $s - t < g(s)$;

если $s - \bar{s} = g(s)$, то

1) $O_{\bar{s}}^{(n)}$ есть РЗ типа 1, если $\sup_{x \in O_{\bar{s}}^{(n)}} |V_R^{(s),1}(n, x)| < \frac{1}{4}\varepsilon_{s+1}$;

2) $O_{\bar{s}}^{(n)}$ есть РЗ типа 2, если

2а) $\sup_{x \in O_{\bar{s}}^{(n)}} |V_R^{(s),1}(n, x)| \geq \frac{1}{4}\varepsilon_{s+1}$,

2б) существует точка $x_* \in O_{\bar{s}}^{(n)}$ такая, что $d^{(s)}(x_*) = d^{(s)}(T^n x_*)$,

2в) $|V_R^{(s),1}(n, x_*)| < \frac{1}{8}\varepsilon_{s+1}$;

3) $O_{\bar{s}}^{(n)}$ есть РЗ типа 3, если выполнены условия 2а) и 2б), а вместо 2в) выполняется условие $|V_R^{(s),1}(n, x_*)| \geq \frac{1}{8}\varepsilon_{s+1}$;

4) $O_{\bar{s}}^{(n)}$ есть РЗ типа 4, если

$$\sup_{x \in O_{\bar{s}}^{(n)}} |V_R^{(s),1}(n, x)| \geq \frac{1}{4}\varepsilon_{s+1}$$

и для всех $x \in O_{\bar{s}}^{(n)}$ выполняется неравенство $d^{(s)}(x) \neq d^{(s)}(T^n x)$.

Заметим, что согласно индуктивным предположениям может существовать не более одной точки $x_* \in O_{\bar{s}}^{(n)}$, для которой $d^{(s)}(x_*) = d^{(s)}(T^n x_*)$.

Итак, мы применили ко всем РЗ сглаживание типа 0. Этого сглаживания, как будет видно из дальнейшего изложения, достаточно для гладкой склейки преобразований нерезонансной части $U_{NR}^{(s)}(n, x)$ и резонансной части $V_R^{(s),1}(n, x)$ в окрестности границ РЗ. Однако для преобразования $V_R^{(s),1}(n, x)$ внутри РЗ необходимо определить

дополнительное разложение $V_R^{(s),1}(n, x)$ в зависимости от типа РЗ, которое позволит получить функции, удовлетворяющие индуктивным условиям гладкости на следующем шаге индукции.

Перейдем к рассмотрению РЗ типа 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любой РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 1*

$$\|V_R^{(s),1}(n, x)\|_s < \varepsilon_{\bar{s}+1}.$$

Более того, если

$$\max_{x \in O_{\bar{s}}^{(n)}} |V_R^{(s),1}(n, x)| < \varepsilon_{\bar{s}+1}^{1/10},$$

$$\text{то } \|V_R^{(s),1}(n, x)\|_s < \varepsilon_{\bar{s}+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. пусть $\|V_R^{(s),1}(n, x)\|_s \geq \varepsilon_{\bar{s}+1}$. Тогда для некоторой точки $x \in O_{\bar{s}}^{(n)}$

$$|V_R^{(s),1}(n, x)|e^{\rho_s |n|} \geq \varepsilon_{\bar{s}+1}$$

с $|n| \leq R_{\bar{s}}$. Таким образом,

$$\varepsilon_{\bar{s}+1}^{\frac{1}{10}} \geq \varepsilon_{\bar{s}+1} e^{-\rho |n|}$$

или

$$\varepsilon_{\bar{s}+1}^{\frac{1}{10}(1+\kappa)^{s-\bar{s}}} \geq e^{-\rho |n|} \geq e^{-\rho R_{\bar{s}}}.$$

Следовательно,

$$\rho R_{\bar{s}} > (1+\kappa) \left(\frac{1}{10} (1+\kappa)^{s-\bar{s}} - 1 \right) \ln \varepsilon_{\bar{s}}^{-1}$$

или

$$\rho \Gamma(\bar{s})^2 > \left(\frac{1}{10} (1+\kappa)^{s-\bar{s}} - 1 \right) (1+\kappa), \quad \rho \Gamma(\bar{s})^2 > \Gamma \rho s^2 - 1 - \kappa.$$

Так как $\bar{s} < s$, то последнее неравенство невозможно при $\rho \Gamma > 1 + \kappa = \frac{5}{4}$.

Это предположение показывает, что рассмотрение РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 1 может быть сведено к рассмотрению РЗ порядка $\bar{s}+1$. Чтобы сделать это, определим для каждой РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 1 функцию $F_{n,\bar{s}}^{(1)}(x)$ следующим образом. Рассмотрим РЗ

$$O_{\bar{s}+1}^{(n)} \subset O_{\bar{s}}^{(n)}: O_{\bar{s}+1}^{(n)} = \{x : |d^{(\bar{s}+1)}(x) - d^{(\bar{s}+1)}(T^n x)| < \delta_{\bar{s}+1}\} \cap O_{\bar{s}}^{(n)}.$$

Пусть $O_{\bar{s}}^{(n)} = \Delta_{n,\bar{s}} = (x_1, x_2)$, $O_{\bar{s}+1}^{(n)} = \Delta_{n,\bar{s}+1} = (x'_1, x'_2)$, $x_1 < x'_1 < x'_2 < x_2$. Ясно, что $|\Delta_{n,\bar{s}+1}| > C \delta_{\bar{s}+1}$. Положим $\Delta_{\bar{s}}^{(n),1} = (x'_1, x'_1)$, $\Delta_{\bar{s}}^{(n),2} = (x'_2, x'_2)$, где $|\Delta_{\bar{s}}^{(n),1}| = |\Delta_{\bar{s}}^{(n),2}| = \varepsilon_{\bar{s}+1}^{1/4}$. Определим $F_{n,\bar{s}}^{(1)}(x) = 0$ вне $O_{\bar{s}+1}^{(n)}$, $F_{n,\bar{s}}^{(1)}(x) = 1$ для $x \in (x'_1, x'_2)$, $F_{n,\bar{s}}^{(1)}(x) = F_{\Delta_{\bar{s}}^{(n),2}}(x)$ для $x \in \Delta_{\bar{s}}^{(n),1}$ и $F_{n,\bar{s}}^{(1)}(x) = 1 - F_{\Delta_{\bar{s}}^{(n),1}}(x)$ для $x \in \Delta_{\bar{s}}^{(n),2}$, где $F_{\Delta}(x)$ – введенная выше вспомогательная функция для отрезка Δ .

Наконец, положим $F_{\bar{s}}^{(1)}(x) = \sum F_{n,\bar{s}}^{(1)}(x)$, где суммирование проводится по всем РЗ типа 1. Функция $F_{\bar{s}}^{(1)}(x)$ корректно определена в силу условия 2_s .

Представим $V_R^{(s),1}(n, x)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$U_R^{(s),1}(n, x) = V_R^{(s),1}(n, x)F_s^{(1)}(x) \quad \text{и} \quad U_R^{(s),2}(n, x) = V_R^{(s),1}(n, x) - U_R^{(s),1}(n, x).$$

Ясно, что $U_R^{(s),1}(n, x) \equiv 0$ вне объединения всех РЗ типа 1, $U_R^{(s),2}(n, x) \equiv 0$ вне

$$\bigcup [(O_{\bar{s}}^{(n)} - (O_{\bar{s}+1}^{(n)})) \cup (\Delta_{\bar{s}}^{(n),1} \cup \Delta_{\bar{s}}^{(n),1})],$$

где внешнее объединение производится по всем РЗ типа 1. Для того, чтобы оценить производные функций $U_R^{(s),1}(n, x)$ и $U_R^{(s),2}(n, x)$, нам потребуется следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 1

$$\max_{x \in O_{\bar{s}}^{(n)}} \left| \frac{dV_R^{(s),1}(n, x)}{dx} \right| < \varepsilon_{s+1}^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau_1(O_{\bar{s}}^{(n)})$ – момент возникновения РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$, определяемый как $\min_{x \in O_{\bar{s}}^{(n)}} k(x)$, где $k(x)$ – минимальное значение l , для которого $\tau^{(l)}(x) = l$, $\tau^{(l-1)}(x) \neq l-1$, $\tau^{(p)}(x) = p$ для $l < p \leq \bar{s}$. Легко показать, что $k(x)$ не зависит от x . Из индуктивных предположений следует, что

$$\|V_R^{(s),1}(n, x)\|_s < C\varepsilon_{\tau_1}, \quad \left\| \frac{dV_R^{(s),1}(n, x)}{dx} \right\|_s < C\varepsilon_{\tau_1}^{3/4}, \quad \left\| \frac{d^2 V_R^{(s),1}(n, x)}{dx^2} \right\|_s < C\varepsilon_{\tau_1}^{1/2}.$$

Предположим, что в некоторой точке $\bar{x} \in O_{\bar{s}}^{(n)}$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{dV_R^{(s),1}(n, \bar{x})}{dx} \right| \geq \varepsilon_{s+1}^{1/2}.$$

Тогда

$$\left| \frac{dV_R^{(s),1}(n, x)}{dx} \right| \geq \frac{1}{2} \varepsilon_{s+1}^{1/2}$$

для любой точки x такой, что $|x - \bar{x}| \leq \varepsilon_{s+1}^{1/2} \varepsilon_{\tau_1}^{-1/4}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \left| \frac{dV_R^{(s),1}(n, x)}{dx} \right| &> \left| \frac{dV_R^{(s),1}(n, \bar{x})}{dx} \right| - \left| \frac{d^2 V_R^{(s),1}(n, \tilde{x})}{dx^2} \right| |x - \bar{x}| \\ &> \left| \frac{dV_R^{(s),1}(n, \bar{x})}{dx} \right| - C\varepsilon_{\tau_1}^{1/2} |x - \tilde{x}| \geq \frac{1}{2} \varepsilon_{s+1}^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\tilde{x} = \bar{x} + \Theta(x - \bar{x})$, $0 < \Theta < 1$. Следовательно,

$$|V_R^{(s),1}(n, x) - V_R^{(s),1}(n, \bar{x})| > \frac{1}{2} \varepsilon_{s+1}^{1/2} |x - \bar{x}|.$$

Для $x_1^\pm = \bar{x} \pm \varepsilon_{s+1}^{1/2} \varepsilon_{\tau_1}^{-1/4}$ получаем, что

$$|V_R^{(s),1}(n, x^\pm) - V_R^{(s),1}(n, \bar{x})| > 2\varepsilon_{s+1} \quad \text{и} \quad |V_R^{(s),1}(n, x^\pm)| > \varepsilon_{s+1}.$$

По крайней мере одна из точек x^+ , x^- принадлежит $O_{\bar{s}}^{(n)}$, что противоречит определению РЗ типа 1.

Из предположений 1 и 2 легко следует, что

$$\|U_k^{(s),1}(n, x)\|_s < \varepsilon_{\bar{s}+1}, \quad \left\| \frac{dU_R^{(s),1}(n, x)}{dx} \right\|_s < C\varepsilon_{\tau_1}^{3/4}, \quad \left\| \frac{d^2U_R^{(s),1}(n, x)}{dx^2} \right\|_s < C\varepsilon_{\tau_1}^{1/2}$$

и

$$|U_R^{(s),2}(n, x)| < \varepsilon_{s+1}, \quad \left| \frac{dU_R^{(s),2}(n, x)}{dx} \right| < \varepsilon_{\bar{s}+1}^{1/2}, \quad \left| \frac{d^2U_R^{(s),2}(n, x)}{dx^2} \right| < C\varepsilon_{\tau_1}^{1/2}.$$

Теперь рассмотрим РЗ типа 2. Для каждой РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 2 построим разложение $V_R^{(s),1}(n, x) = U_R^{(s),1}(n, x) + U_R^{(s),2}(n, x)$. Если $\|V_R^{(s),1}(n, x)\|_s < \varepsilon_{\bar{s}+1}$, то это разложение строится точно так же, как и для РЗ типа 1.

Пусть $\|V_R^{(s),1}(n, x)\|_s \geq \varepsilon_{\bar{s}+1}$ и $d^{(s)}(x_*) = d^{(s)}(T^n x_*)$. Тогда существует ближайшая к x_* точка x^* такая, что $|V_R^{(s),1}(n, x^*)| = \frac{1}{4}\varepsilon_{s+1}$. Кроме того, из определения РЗ типа 2 следует, что существует такая x^{**} , лежащая между x_* и x^* , что $|V_R^{(s),1}(n, x^{**})| = \frac{1}{8}\varepsilon_{\bar{s}+1}$. Из условия $\|V_R^{(s),1}(n, x)\|_s > \varepsilon_{\bar{s}+1}$ и предложения 1 вытекает существование такой точки $\bar{x}$, ближайшей к x^* , что $|V_R^{(s),1}(n, \bar{x})| = \varepsilon_{s+1}^{1/2}$ и x^* лежит между x^{**} и $\bar{x}$. Можно считать, что $x_* < x^{**} < x^* < \bar{x}$. (Случай $\bar{x} < x^* < x^{**} < x_*$ рассматривается аналогично.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. На отрезке $[x_*, \bar{x}]$

$$\left| \frac{dV_R^{(s),1}(n, x)}{dx} \right| < \varepsilon_{\bar{s}+1}^{1/4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что длина отрезка $[x_*, \bar{x}]$ больше

$$\frac{|\varepsilon_{s+1}^{1/2} - \varepsilon_{s+1}|}{\max_{x \in [x_*, \bar{x}]} \left| \frac{d}{dx} V_R^{(s),1}(n, x) \right|} \geq C |\varepsilon_{s+1}^{1/2} - \varepsilon_{\bar{s}+1}| \varepsilon_{\tau_1}^{-3/4}.$$

Предположим, что $\tilde{x} \in [x_*, \bar{x}]$ и $\left| \frac{d}{dx} V_R^{(s),1}(n, \tilde{x}) \right| > \varepsilon_{s+1}^{1/2}$. Тогда для всех $x \in [x_*, \bar{x}]$

таких, что $|\tilde{x} - x| \leq \varepsilon_{s+1}^{1/2} \varepsilon_{\tau_1}^{-1/3}$, выполнено неравенство

$$\left| \frac{d}{dx} V_R^{(s),1}(n, x) \right| > \frac{1}{2} \varepsilon_{s+1}^{1/2}.$$

В самом деле,

$$\left| \frac{d}{dx} V_R^{(s),1}(n, x) \right| > \left| \frac{d}{dx} V_R^{(s),1}(n, \tilde{x}) \right| - C \varepsilon_{\tau_1}^{1/2} |x - \tilde{x}| > \frac{1}{2} \varepsilon_{s+1}^{1/2}.$$

Но тогда для $x \in [x_*, \bar{x}]$ таких, что

$$|\tilde{x} - x| = \varepsilon_{s+1}^{1/2} \varepsilon_{\tau_1}^{-1/3},$$

модуль разности

$$|V_R^{(s),1}(n, x) - V_R^{(s),1}(n, \tilde{x})| > \frac{1}{2} \varepsilon_{s+1}^{1/2} \varepsilon_{s+1}^{1/2} \varepsilon_{\tau_1}^{-1/3} > 2 \varepsilon_{s+1}^{1/2}.$$

Следовательно, $|V_R^{(s),1}(n, x)| > \varepsilon_{s+1}^{1/2}$, что противоречит предположению о том, что $\bar{x}$ является ближайшей к x_* точкой, в которой $|V_R^{(s),1}(n, x)| = \varepsilon_{s+1}^{1/2}$.

Пусть $\Delta_{\bar{s}}^{(n),2} = [x^*, x_1^*]$ есть отрезок длины $\varepsilon_{s+1}^{1/2} \varepsilon_{\tau_1}^{-1/4}$. Мы определяем $U_R^{(s),1}(n, x)$ для $x \in O_{\bar{s}}^{(n)}$ и $x > x_*$ следующим образом:

$$U_R^{(s),1}(n, x) = \left[V_R^{(s),1}(n, x^*) - \frac{dV_R^{(s),1}(n, x^*)}{dx} (x - x^*) + \frac{1}{2} \frac{d^2 V_R^{(s),1}(n, x^*)}{dx^2} (x - x^*)^2 \right] \times (1 - F_{\Delta_{\bar{s}}^{(n),2}(x)})$$

для $x \in \Delta_{\bar{s}}^{(n),2}$,

$$U_R^{(s),1}(n, x) = V_R^{(s),1}(n, x)$$

для $x \in [x_*, x^*]$,

$$U_R^{(s),1}(n, x) = 0$$

для $x \geq x_1^*$.

Если $\bar{x}^* \geq x_*$ есть ближайшая к x_* точка, в которой $V_R^{(s),1}(n, \bar{x}^*) = \frac{1}{4} \varepsilon_{s+1}$, то мы аналогичным образом выбираем отрезок $\Delta_{\bar{s}}^{(n),1} = [\bar{x}_1^*, \bar{x}^*]$ и полагаем

$$U_R^{(s),1}(n, x) = \left[V_R^{(s),1}(n, \bar{x}^*) - \frac{dV_R^{(s),1}(n, \bar{x}^*)}{dx} (x - \bar{x}^*) + \frac{1}{2} \frac{d^2 V_R^{(s),1}(n, \bar{x}^*)}{dx^2} (x - \bar{x}^*)^2 \right] \times F_{\Delta_{\bar{s}}^{(n),1}(x)}$$

для $x \in \Delta_{\bar{s}}^{(n),1}$,

$$U_R^{(s),1}(n, x) = V_R^{(s),1}(n, x)$$

для $x < \bar{x}_1^*$ и

$$U_R^{(s),1}(n, x) = 0$$

для $x < x_1^*$.

Если же такой точки $\bar{x}^*$ не существует, то мы строим $U_R^{(s),1}(n, x)$ для $x < x_*$ таким же образом, как и для РЗ типа 1.

Из предложения 3 следует справедливость следующих оценок:

$$\|U_R^{(s),1}(n, x)\|_s < \varepsilon_{\overline{s}+1}, \quad \|U_R^{(s),1}(n, x)\|_s < C\varepsilon_{\tau_1}^{3/4}, \quad \left\| \frac{d^2 U_R^{(s),1}(n, x)}{dx^2} \right\|_s < C\varepsilon_{\tau_1}^{1/2}$$

и

$$|V_R^{(s),1}(n, x)| < C\varepsilon_{s+1}\varepsilon_{\tau_1}^{-1/4},$$

$$\left| \frac{dU_R^{(s),1}(n, x)}{dx} \right| < C\varepsilon_{s+1}\varepsilon_{\tau_1}^{-1/2}, \quad \left| \frac{d^2 U_R^{(s),1}(n, x)}{dx^2} \right|_s < C\varepsilon_{\tau_1}^{1/2}.$$

Для РЗ типа 0, 3 и 4 полагаем $U_R^{(s),1}(n, x) \equiv 0$.

Таким образом, мы построили новое разложение элемента $\varphi^{(s)}(n, x)$:

$$\varphi^{(s)}(x) = d^{(s)}(x) + U_R^{(s),1}(n, x) + U_R^{(s),2}(n, x) + U_{NR}^{(s)}(n, x),$$

где $U_R^{(s),2}(n, x) = V_R^{(s),1}(n, x) - U_R^{(s),1}(n, x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из предложения 3 вытекает, что длина отрезка $[x_*, x^*]$ больше $C\varepsilon_{s+1}^{1/2}\varepsilon_{\tau_1}^{-1/2}$ и, следовательно,

$$|d^{(s)}(x^*) - d^{(s)}(T^n x^*)| > C\varepsilon_{s+1}^{1/2}\varepsilon_{\tau_1}^{-1/2}.$$

3.2. Преобразование нерезонансной части. Итак, в конце предыдущего раздела мы получили представление

$$\varphi^{(s)}(n, x) = d^{(s)}(n, x) + V_R^{(s),1}(n, x) + U_{NR}^{(s)}(n, x),$$

причем в этом разделе нам достаточно иметь только следующие оценки:

$$\|U_{NR}^{(s)}(n, x)\|_s < \varepsilon_s, \quad \left\| \frac{dU_{NR}^{(s)}(n, x)}{dx} \right\|_s < \varepsilon_s^{3/4}, \quad \left\| \frac{d^2 U_{NR}^{(s)}(n, x)}{dx^2} \right\|_s < \varepsilon_s^{1/2}, \quad U_{NR}^{(s)}(n, x) = 0$$

для всех пар (n, x) таких, что $|d^{(s)}(x) - d^{(s)}(T^n x)| < \frac{1}{2}\delta_s$, $\|V_R^{(s),1}(n, x)\|_s < \varepsilon_{\overline{s}}$, производные $\frac{dV_R^{(s),1}(n, x)}{dx}$ и $\frac{d^2 V_R^{(s),1}(n, x)}{dx^2}$ ограничены по модулю некоторой абсолютной постоянной,

$$|d^{(s)}(x)| < C, \quad \left| \frac{d}{dx}(d^{(s)}(x)) \right| < C \quad \text{и} \quad \left| \frac{d^2}{dx^2}(d^{(s)}(x)) \right| < \frac{C}{\varepsilon_{s-1}}.$$

Представим $U_{NR}^{(s)}(n, x)$ в виде двух слагаемых:

$$U_{NR}^{(s)}(n, x) = U_{NR}^{(s),1}(n, x) + U_{NR}^{(s),2}(n, x),$$

где $U_{NR}^{(s),1}(n, x) = U_{NR}^{(s)}(n, x)$ для $|n| \leq R_s$, $U_{NR}^{(s),1}(n, x) = 0$ для $|n| > R_s$, $U_{NR}^{(s),2}(n, x) = U_{NR}^{(s)}(n, x) - U_{NR}^{(s),1}(n, x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \|U_{NR}^{(s),2}(n,x)\|_{s+1} &\leq \varepsilon_s^{\frac{3}{\pi^2}\rho\Gamma} \|U_{NR}^{(s)}(n,x)\|_s, \\ \left\| \frac{dU_{NR}^{(s),2}(n,x)}{dx} \right\|_{s+1} &\leq \varepsilon_s^{\frac{3}{\pi^2}\rho\Gamma} \left\| \frac{dU_{NR}^{(s)}(n,x)}{dx} \right\|_s, \\ \left\| \frac{d^2U_{NR}^{(s),2}(n,x)}{dx^2} \right\|_{s+1} &\leq \varepsilon_s^{\frac{3}{\pi^2}\rho\Gamma} \left\| \frac{d^2U_{NR}^{(s)}(n,x)}{dx^2} \right\|_s. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} \|U_{NR}^{(s),2}(n,x)\|_{s+1} &= \sum_{|n|>R_s} \text{ess sup} |U_{NR}^{(s)}(n,x)| e^{\rho_{s+1}|n|} \leq e^{-(\rho_s-\rho_{s+1})R_s}, \\ \sum_{|n|>R_s} \text{ess sup} |U_{NR}^{(s)}(n,x)| e^{\rho_s|n|} &\leq \varepsilon_s^{\frac{3}{\pi^2}\rho\Gamma} \|U_{NR}^{(s)}\|_s. \end{aligned}$$

Аналогично получают оценки производных.

Для упрощения формул введем некоторые обозначения. Для любого обратимого элемента $a \in A^{(\rho)}$ обозначим Ad_a отображение $A^{(\rho)} \rightarrow A^{(\rho)}$: $\text{Ad}_a(\varphi) = a^{-1}\varphi a$ для любого $\varphi \in A^{(\rho)}$ и через ad_b отображение $A^{(\rho)} \rightarrow A^{(\rho)}$: $\text{ad}_b(\varphi) = [\varphi, b] = \varphi b - b\varphi$ для любого $\varphi \in A^{(\rho)}$ и произвольного фиксированного $b \in A^{(\rho)}$. Ясно, что если $a = \exp\{b\}$, то a – обратимый элемент алгебры $A^{(\rho)}$ и $a^{-1} = \exp\{-b\}$.

Далее мы применяем стандартный метод КАМ-теории, используя хорошо известную формулу

$$(*) \quad \text{Ad}_a(\varphi) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ad}_b(\text{ad}_b(\dots \text{ad}_b(\varphi)) \dots)}{k!},$$

где $a = \exp(b)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Существует такой унитарный элемент $u^{(s)} = u^{(s)}(n,x) \in A^{(\rho_s)}$, что*

$$\text{Ad}_{u^{(s)}}(\varphi^{(s)}) = \tilde{d}^{(s)}(x) + \tilde{V}_R^{(s),1}(n,x) + \tilde{U}_{NR}^{(s),1}(n,x),$$

причем справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\tilde{d}^{(s)}(x) - d^{(s)}(x)| &< \varepsilon_{s+1}, \quad \left| \frac{d}{dx}(\tilde{d}^{(s)}(x) - d^{(s)}(x)) \right| < \varepsilon_s^{1-4\mu} \varepsilon_s^{3/4}, \\ \left| \frac{d^2}{dx^2}(\tilde{d}^{(s)}(x) - d^{(s)}(x)) \right| &< \varepsilon_s^{1-8\mu} \varepsilon_s^{1/2}, \quad \tilde{V}_R^{(s),1}(n,x) = 0 \end{aligned}$$

вне $PZ \ O_t^{(n)}$, $\bar{s} \leq t \leq s$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{V}_R^{(s),1}(n,x) - V_R^{(s),1}(n,x)\|_{s+1} &< \|V_R^{(s),1}(n,x)\|_s \varepsilon_s^{1-2\mu}, \\ \left\| \frac{d}{dx}(\tilde{V}_R^{(s),1}(n,x) - V_R^{(s),1}(n,x)) \right\|_{s+1} &< \left\| \frac{d}{dx} V_R^{(s),1}(n,x) \right\|_s \varepsilon_s^{1-2\mu}, \\ \left\| \frac{d^2}{dx^2}(\tilde{V}_R^{(s),1}(n,x) - V_R^{(s),1}(n,x)) \right\|_{s+1} &< \left\| \frac{d^2}{dx^2} V_R^{(s),1}(n,x) \right\|_s \varepsilon_s^{1-2\mu}. \end{aligned}$$

Далее, $\tilde{U}_{NR}^{(s)}(n, x) = 0$ для всех пар (n, x) , для которых

$$|\tilde{d}^{(s)}(x) - \tilde{d}^{(s)}(T^n x)| < \delta_s - C\varepsilon_s\varepsilon_{\overline{s}}, \quad \|\tilde{U}_{NR}^{(s)}(n, x)\|_{s+1} < \varepsilon_{s+1}^6,$$

$$\left\| \frac{d}{dx} \tilde{U}_{NR}^{(s),1}(n, x) \right\|_{s+1} < \varepsilon_{s+1}^5, \quad \left\| \frac{d^2}{dx^2} \tilde{U}_{NR}^{(s),1}(n, x) \right\|_{s+1} < \varepsilon_{s+1}^4.$$

Для унитарного элемента $u^{(s)}(n, x)$ справедливы следующие неравенства:

$$\|u^{(s)}(n, x) - \delta_{0n}\|_s < C\varepsilon_s\varepsilon_{\overline{s}}^{-\mu},$$

$$\left\| \frac{d}{dx} u^{(s)}(n, x) \right\|_s < C\varepsilon_s^{3/4}, \quad \left\| \frac{d^2}{dx^2} u^{(s)}(n, x) \right\|_s < \varepsilon_{s-1}^{1/8}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого элемента $a = a(n, x) \in A^{(\rho_s)}$ определим элемент $a^{(tr)} = a^{(tr)}(n, x)$, полагая $a^{(tr)}(n, x) = a(n, x)$ для $|n| \leq R_s$ и $a^{(tr)}(n, x) = 0$ для $|n| > R_s$. Будем искать $u^{(s)}$ в виде $\prod_{i=1}^{M(s)} u^{(s),i}$, где $u^{(s),i}$ – унитарные элементы алгебры $A^{(\rho_s)}$, а $M(s)$ будет указано в ходе доказательства.

Сначала найдем элемент $u^{(s),1}$, который мы будем искать в виде

$$u^{(s),1} = \exp\{i w^{(s),1}\},$$

где $w^{(s),1}$ – некоторый самосопряженный элемент алгебры $A^{(\rho_s)}$. С целью унификации обозначений положим $\varphi^{(s)} = \varphi^{(s),0}$. Напишем формулу (*) с $\varphi = \varphi^{(s),0}$, $a = u^{(s),1}$. Мы получим:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{u^{(s),1}}(\varphi^{(s),0}) &= d^{(s)}(x) + \text{Ad}_{u^{(s),1}}(V_R^{(s),1}) + U_{NR}^{(s),1} + \text{ad}_{i w^{(s),1}}(d^{(s)}(x)) + \text{ad}_{i w^{(s),1}}(U_{NR}^{(s),1}) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\text{ad}_{i w^{(s),1}}(\text{ad}_{i w^{(s),1}}(\dots (\text{ad}_{i w^{(s),1}}(d^{(s)}(x) + U_{NR}^{(s),1}) \dots))}{k!}. \end{aligned}$$

Полагая $w^{(s),1}(n, x) = \frac{i U_{NR}^{(s),1}(n, x)}{d^{(s)}(x) - d^{(s)}(T^n x)}$ для таких (n, x) , для которых $U_{NR}^{(s),1}(n, x) \neq 0$, и $w^{(s),1}(n, x) = 0$, если $U_{NR}^{(s),1}(n, x) = 0$, находим, что $w^{(s),1}$ есть решение уравнения

$$U_{NR}^{(s),1} + \text{ad}_{i w^{(s),1}}(d^{(s)}(x)) = 0.$$

Легко проверить, что

$$\|w^{(s),1}\|_s < \frac{2\varepsilon_s}{\varepsilon_{\overline{s}}},$$

$$\|\text{Ad}_{u^{(s),1}}(V_{NR}^{(s),1})\|_s < 2\varepsilon_s^2\varepsilon_{\overline{s}}^{-\mu} \quad \text{и} \quad \|\text{Ad}_{u^{(s),1}}(V_R^{(s),1}) - V_R^{(s),1}\|_s < \varepsilon_{\overline{s}}^{1-2\mu}\varepsilon_s.$$

Более того, представим элемент $\varphi^{(s),1} = \text{Ad}_{u^{(s),1}}(\varphi^{(s),0})$ в виде суммы

$$d_1^{(s)}(x) + V_R^{(s),1}(n, x) + V_{R,1}^{(s),1}(n, x) + U_{NR,1}^{(s)}(n, x),$$

где $d_1^{(s)}(x) = \varphi^{(s),1}(0, x)$,

$$U_{NR,1}^{(s)}(n, x) = [\text{Ad}_{u^{(s),1}}(U_{NR}^{(s),1})](n, x) + [\text{Ad}_{u^{(s),1}}(V_R^{(s)})](n, x) - V_R^{(s),1}(n, x)$$

для (n, x) , не являющихся t -резонансными для $\bar{s} \leq t \leq s$, $U_{NR,1}^{(s)}(n, x) = 0$ для остальных пар (n, x) и

$$V_{R,1}^{(s),1}(n, x) = \text{Ad}_{u^{(s),1}}(\varphi^{(s),0})(n, x) - V_R^{(s),1}(n, x) - U_{NR,1}^{(s)}(n, x).$$

Применим к $\varphi^{(s),1}$ сглаживание типа 0, описанное в разделе 3.1, и запишем следующее разложение:

$$\varphi^{(s),1}(n, x) = d_1^{(s)}(x) + \bar{V}_{R,1}^{(s),1}(n, x) + \overline{\overline{V}}_{NR,1}^{(s)}(n, x),$$

где

$$\bar{V}_{R,1}^{(s),1}(n, x) = V_R^{(s),1}(n, x) + \overline{\overline{V}}_R^{(s),1}(n, x)$$

и $\overline{\overline{V}}_R^{(s),1}(n, x)$ равно нулю вне РЗ $O_t^{(n)}$, $\bar{s} \leq t \leq s$. Отметим, что

$$\|\overline{\overline{V}}_R^{(s),1}\|_s < C \frac{\varepsilon_s^2}{\varepsilon_\mu^s}.$$

Последнее неравенство вытекает из того, что $\text{ad}_{iw^{(s),1}}(V_R^{(s),1}(n, x)) = 0$ для всех пар (n, x) таких, что $x \in O_t^{(n)}$, $\bar{s} \leq t \leq s$, и разложение для $\text{Ad}_{u^{(s),1}}(V_R^{(s),1})$ начинается только с членов второго порядка по $w^{(s),1}$. Для того, чтобы убедиться, что $\text{ad}_{iw^{(s),1}}(V_R^{(s),1})$ обладает указанным свойством, запишем явное выражение для $\text{ad}_{iw^{(s),1}}(V_R^{(s),1})$:

$$\begin{aligned} & [\text{ad}_{iw^{(s),1}}(V_R^{(s),1})](n, x) \\ &= i \sum_{|m| \leq R_s} \{V_R^{(s),1}(n-m, T^m x) w^{(s),1}(m, x) - w^{(s),1}(n-m, T^m x) V_R^{(s),1}(m, x)\}. \end{aligned}$$

Если (n, x) — такая пара, что $x \in O_t^{(n)}$ для некоторого $\bar{s} \leq t \leq s$, то пары (m, x) не являются t_1 -резонансными ни при каком t_1 , $\bar{s} \leq t_1 \leq s$, так как в противном случае было бы непусто $O_{t_1}^{(m)} \cap O_t^{(n)}$, что невозможно в силу индуктивного предположения 2_s). Следовательно, $V_R^{(s),1}(m, x) = 0$ при $n \neq m$, а при $n = m$ выполняется $w^{(s),1}(n-m, T^m x) = w^{(s),1}(0, T^m x) = 0$. С другой стороны, вместе с парой (n, x) и пара $(-n, T^n x)$ является t -резонансной, а значит, $V_R^{(s),1}(n-m, T^m x) = V_R^{(s),1}(m-n, T^n x) = 0$ для $m-n \neq -n$, т.е. $m \neq 0$; $w^{(s),1}(m, x) = 0$ при $m = 0$. Поэтому $[\text{ad}_{iw^{(s),1}}(V_R^{(s),1})](n, x) = 0$ для указанных пар (n, x) .

Мы получили элемент $\varphi_1^{(s)}$, резонансная часть которого имеет меньший порядок. Повторяя эту процедуру $M(s)$ раз, где $M(s) = 6[(1+\kappa)^{s-\bar{s}}(1-2\mu)^{-1}] + 1$, мы построим элементы $\varphi^{(s),2}, \varphi^{(s),3}, \dots, \varphi^{(s),M(s)}$ и унитарные элементы $u^{(s),1}, \dots, u^{(s),M(s)}$ такие, что элементы $\tilde{\varphi}^{(s)} = \varphi^{(s),M(s)} = \text{Ad}_{u^{(s)}} \varphi^{(s)}$ и $u^{(s)} = \prod_{i=1}^{M(s)} u^{(s),i}$ будут удовлетворять предложению 5.

3.3. Преобразование резонансной части. Частичное и полное расщепление резонансов. В предыдущем разделе мы построили унитарный элемент $u^{(s)} \in A^{(\rho_s)}$ такой, что элемент

$$\tilde{\varphi}^{(s)}(n, x) = (\text{Ad}_{u^{(s)}} \varphi^{(s)})(n, x) = \tilde{d}^{(s)}(x) + \tilde{V}_R^{(s),1}(n, x) + \tilde{U}_{NR}^{(s)}(n, x)$$

принадлежит $A^{(\rho_{s+1})}$ и $\tilde{d}^{(s)}(x)$, $\tilde{V}_R^{(s),1}(n, x)$, $\tilde{U}_{NR}^{(s)}(n, x)$ – непрерывные функции вместе с их первыми двумя производными во всех расширениях РЗ $\tilde{O}_t^{(n)}$, $\bar{s} \leq t \leq s$. Кроме того, с помощью процедуры сглаживания, описанной в п. 3.1, мы можем представить $\tilde{V}_R^{(s),1}(n, x)$ в виде суммы двух слагаемых $\tilde{U}_R^{(s),1}(n, x)$ и $\tilde{U}_R^{(s),2}(n, x)$, каждое из которых непрерывно вместе с первыми двумя производными в $\tilde{O}_{\bar{s}}^{(n)}$, при этом $\tilde{U}_R^{(s),1}(n, x) = 0$ для РЗ типа 3 и 4.

Теперь мы переходим к определению такого унитарного элемента $q^{(s)} \in A^{(\rho_{s+1})}$, что $\text{Ad}_{q^{(s)}}(\tilde{U}_R^{(s),2}) = 0$.

Рассмотрим РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ и семейство двумерных операторов $K^{\bar{s},n}(x)$, зависящих от параметра $x \in O_s^{(n)}$:

$$K^{\bar{s},n}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{d}^{(s)}(x) & \tilde{U}_R^{(s),2}(n, x) \\ \tilde{U}_R^{(s),2}(-n, T^n x) & \tilde{d}^{(s)}(T^n x) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица симметрична, так как $\tilde{\varphi}^{(s)}$ – самосопряженный элемент алгебры $A^{(\rho_{s+1})}$. Тогда

$$\lambda_{\pm}^{\bar{s},n}(x) = \frac{\tilde{d}^{(s)}(x) + \tilde{d}^{(s)}(T^n x)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\tilde{d}^{(s)}(x) - \tilde{d}^{(s)}(T^n x))^2}{4} + (\tilde{U}_R^{(s),2}(n, x))^2}$$

– собственные значения этой матрицы. Пусть

$$Q^{(\bar{s}),n}(x) = \begin{pmatrix} \cos \Theta_{(\bar{s}),n}(x) & -\sin \Theta_{(\bar{s}),n}(x) \\ \sin \Theta_{(\bar{s}),n}(x) & \cos \Theta_{(\bar{s}),n}(x) \end{pmatrix}$$

есть ортогональная матрица, приводящая $K^{\bar{s},n}(x)$ к диагональному виду. Отметим, что $Q^{(\bar{s}),n}(x)$ отлична от единичной только для тех x , для которых $\tilde{U}_R^{(s),2}(n, x) \neq 0$. Функции $\lambda_{\pm}^{\bar{s},n}(x)$ непрерывны вместе с их первыми и вторыми производными в $O_{\bar{s}}^{(n)}$ и совпадают с $\tilde{d}^{(s)}(x)$, $\tilde{d}^{(s)}(T^n x)$ на границе РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$. Матрица $K^{\bar{s},n}(x)$ может быть приведена к диагональному виду лишь с точностью до перестановки ее диагональных элементов. Для того чтобы обеспечить необходимую гладкость элементов матрицы $Q^{(\bar{s}),n}(x)$, мы определяем $Q^{(\bar{s}),n}(x)$ в зависимости от типа РЗ следующим образом.

1) Для РЗ типа 1 или 2. В этом случае функция $\tilde{d}^{(s)}(x)$ монотонна на $O_{\bar{s}}^{(n)}$. Предположим, что $\tilde{d}^{(s)}(x)$ возрастает как функция локальной координаты x ; тогда мы выбираем $Q^{(\bar{s}),n}(x)$ таким образом, что

$$Q^{(s),n}(x)^* K^{\bar{s},n}(x) Q^{(s),n}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\bar{s},n}(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\bar{s},n}(x) \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1^{\bar{s},n}(x) = \lambda_-^{\bar{s},n}(x)$ для $x < x_*$ и $\lambda_1^{\bar{s},n}(x) = \lambda_+^{\bar{s},n}(x)$ для $x \geq x_*$. Если $\tilde{d}^{(s)}(x)$ убывает, положим $\lambda_1^{\bar{s},n}(x) = \lambda_+^{\bar{s},n}(x)$ для $x < x_*$ и $\lambda_1^{\bar{s},n}(x) = \lambda_-^{\bar{s},n}(x)$ для $x \geq x_*$. Ясно, что все элементы матрицы $Q^{(\bar{s}),n}(x)$ и $\lambda_1^{\bar{s},n}(x)$ принадлежат $C^2(O_{\bar{s}}^{(n)})$, так как в некоторой окрестности точки x_* матрица $Q^{(\bar{s}),n}(x)$ совпадает с единичной.

2) Для РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 3 матрица $Q^{(\bar{s}),n}(x)$ выбирается так, что $\lambda_1^{\bar{s},n}(x) = \lambda_+^{\bar{s},n}(x)$, если $\tilde{d}^{(s)}(x)$ убывает в $O_{\bar{s}}^{(n)}$, $\lambda_1^{\bar{s},n}(x) = \lambda_-^{\bar{s},n}(x)$, если $\tilde{d}^{(s)}(x)$ возрастает.

3) Для РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 4 матрица $Q^{(\bar{s}),n}(x)$ выбирается таким образом, что $\lambda_1^{\bar{s},n}(x) = \lambda_+^{\bar{s},n}(x)$, если $\tilde{d}^{(s)}(x)$ имеет минимум в $O_{\bar{s}}^{(n)}$, $\lambda_1^{\bar{s},n}(x) = \lambda_-^{\bar{s},n}(x)$, если $\tilde{d}^{(s)}(x)$ имеет максимум в $O_{\bar{s}}^{(n)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. $(Q^{(\bar{s}),n}(x))^{-1} = Q^{(\bar{s}),n}(T^n x) = (Q^{(\bar{s}),n}(x))^*$.

Рассмотрим унитарный элемент $q^{(s)}(n, x) \in A^{(\rho_{s+1})}$: $q^{(s)}(0, x) = \cos \Theta_{(\bar{s}),n}(x)$, $q^{(s)}(n, x) = \sin \Theta_{(\bar{s}),n}(x)$, $q^{(s)}(m, x) = 0$ для $m \neq 0, n$ и для $x \in O_{\bar{s}}^{(n)}$, $q^{(s)}(0, x) = 1$, $q^{(s)}(m, x) = 0$ для $m \neq 0$, если $x \notin \bigcup O_{\bar{s}}^{(n)}$, где объединение берется по всем РЗ типа 1, 2, 3 и 4. Обозначим последнее через $O_{\bar{s}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Справедливо следующее равенство:*

$$(\text{Ad}_{q^{(s)}}(\tilde{\varphi}^{(s)}))(n, x) = \tilde{d}^{(s)}(x) + (\text{Ad}_{q^{(s)}}(\tilde{U}_R^{(s),1}))(n, x) + (\text{Ad}_{q^{(s)}}(\tilde{U}_{NR}^{(s),1}))(n, x),$$

где $\tilde{d}^{(s)}(x) = \tilde{d}^{(s)}(x)$ для $x \notin O_{\bar{s}}$, $\tilde{d}^{(s)}(x) = \lambda_1^{\bar{s},n}(x)$ для $x \in O_{\bar{s}}$. Кроме того, $\|q^{(s)}\|_{s+1} < C\varepsilon_{s+1}^{-1}$. Здесь $O_{\bar{s}}$ – объединение РЗ порядка $\bar{s}$.

Функция $\tilde{d}^{(s)}(x)$ имеет по крайней мере одну критическую точку на каждом интервале непрерывности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства для $\tilde{d}^{(s)}(x)$ следуют непосредственно из определения элемента $q^{(s)}$. Норма

$$\|q^{(s)}\|_{s+1} \leq \max_{x \in O_{\bar{s}}} (1, |\cos \Theta_{\bar{s},n}(x)| + |\sin \Theta_{\bar{s},n}(x)| e^{\rho_{s+1}|n|}).$$

Следовательно, $\|q^{(s)}\|_{s+1} < 1 + e^{\rho R_{\bar{s}}}$. Так как $R_{\bar{s}} = [\Gamma \bar{s}^2 \ln \varepsilon_{\bar{s}}^{-1}]$, то

$$e^{\rho R_{\bar{s}}} \leq \varepsilon_{\bar{s}}^{-\rho \Gamma \bar{s}^2} \leq \varepsilon_{s+1}^{-\rho \Gamma s^2 / (1+\kappa)^{1+s-\bar{s}}}.$$

Но $s+1-\bar{s} = g(s)+1$ и

$$(1+\kappa)^{g(s)+1} > e^{\ln 10 + \ln \Gamma \rho + 2 \ln s} = 10 \Gamma \rho s^2.$$

Значит, $\|q^{(s)}\|_{s+1} < \varepsilon_{s+1}^{-1}$.

Утверждение о существовании по крайней мере одной критической точки на каждом интервале непрерывности функции $\tilde{d}^{(s)}(x)$ вытекает непосредственно из определения этой функции для РЗ типа 3.

Предложение 8.

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Ad}_{q^{(s)}} \tilde{U}_{NR}^{(s),1}\|_{s+1} &< \varepsilon_{s+1}^4, \\ \left| \frac{d \operatorname{Ad}_{q^{(s)}} \tilde{U}_{NR}^{(s),1}}{dx} \right|_{s+1} &< \varepsilon_{s+1}^3, \quad \left\| \frac{d^2 \operatorname{Ad}_{q^{(s)}} \tilde{U}_{NR}^{(s),1}}{dx^2} \right\|_{s+1} < \varepsilon_{s+1}^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Оценки для нормы $\operatorname{Ad}_{q^{(s)}} \tilde{U}_{NR}^{(s),1}$ и ее производных вытекают из оценок, полученных в предложениях 5 и 7, и неравенств

$$\left\| \frac{dq^{(s)}}{dx} \right\|_{s+1} < \varepsilon_{s+1}^{-2}, \quad \left\| \frac{d^2 q^{(s)}}{dx^2} \right\|_{s+1} < \varepsilon_{s+1}^{-3}$$

(эти неравенства проверяются непосредственным вычислением производных, используя явные формулы для $q^{(s)}(n, x)$).

Теперь мы должны получить оценки для $\operatorname{Ad}_{q^{(s)}} \tilde{U}_R^{(s),1}(n, x)$. Прежде всего, заметим, что для РЗ типа 3 и 4 $\operatorname{Ad}_{q^{(s)}} \tilde{U}_R^{(s),1}(n, x) \equiv 0$. Для того чтобы рассмотреть РЗ типа 1 и 2, нам потребуются более точные оценки

$$|q^{(s)}(n, x)|, \quad \left| \frac{dq^{(s)}(n, x)}{dx} \right| \quad \text{и} \quad \left| \frac{d^2 q^{(s)}(n, x)}{dx^2} \right|$$

для $x \in O_{\bar{s}}^{(n)}$.

Мы можем выписать явный вид $\operatorname{Ad}_{q^{(s)}} \tilde{U}_R^{(s),1}(n, x)$ для $x \in O_{\bar{s}}^{(n)}$:

$$\operatorname{Ad}_{q^{(s)}} \tilde{U}_R^{(s),1}(m, x) = \begin{cases} \tilde{U}_R^{(s),1}(n, x) \sin 2\Theta_{\bar{s},n}(x) & \text{для } m = 0, \\ \tilde{U}_R^{(s),1}(n, x) \cos 2\Theta_{\bar{s},n}(x) & \text{для } m = n, \\ 0 & \text{для всех остальных } m. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} |\sin 2\Theta_{\bar{s},n}(x)| &= 2 \left| \frac{K(n, x)(\tilde{d}^{(s)}(x) - \lambda_1^{\bar{s},n}(x))}{(K(n, x))^2 + (\tilde{d}^{(s)}(x) - \lambda_1^{\bar{s},n}(x))^2} \right|, \\ |\cos 2\Theta_{\bar{s},n}(x)| &= \left| \frac{K(n, x)^2 - (\tilde{d}^{(s)}(x) - \lambda_1^{\bar{s},n}(x))^2}{(K(n, x))^2 + (\tilde{d}^{(s)}(x) - \lambda_1^{\bar{s},n}(x))^2} \right|, \end{aligned}$$

где с целью сокращения обозначений $\tilde{U}_R^{(s),1}(n, x)$ обозначено через $K(n, x)$.

Для РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 1 $\lambda_1^{\bar{s},n}(x)$ отлично от $\tilde{d}^{(s)}(x)$ только вне некоторой окрестности границы РЗ порядка $O_{\bar{s}+1}^{(n)}$ и, следовательно,

$$|\tilde{d}^{(s)}(x) - \tilde{d}^{(s)}(T^n x)| > \varepsilon_{\bar{s}+1-g(\bar{s}+1)}^\mu.$$

Для РЗ типа 2

$$|\tilde{d}^{(s)}(x) - \tilde{d}^{(s)}(T^n x)| > C \varepsilon_{\bar{s}+1}^{1/2} (R_{\bar{s}}^{-(\nu+2)}).$$

В самом деле, точка x^* находится от x_* на расстоянии, большем $C\varepsilon_{s+1}^{1/2}$, так как

$$|\tilde{U}_R^{(s),2}(n, x^*) - \tilde{U}_R^{(s),2}(n, x^{**})| > C\varepsilon_{s+1}, \quad \left| \frac{d\tilde{U}_R^{(s),2}(n, x)}{dx} \right| < C_1\varepsilon_{s+1}^{1/2}$$

на отрезке $[x^{**}, x^*]$, точка x^{**} лежит внутри отрезка $[x_*, x^*]$ и

$$\left| \frac{d\tilde{d}^{(s)}(x)}{dx} - \frac{d\tilde{d}^{(s)}(T^n x)}{dx} \right| > C_2 R_{\bar{s}}^{-(\nu+2)}$$

(как это следует из 5_s) и 6_s) и оценок разности $d_1^{(s)}(x) - d^{(s)}(x)$ и ее производных).

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\begin{aligned} |A| &< C \frac{\delta^2}{|a|}, \quad |B| < 1 - C \frac{\delta^4}{a^2}, \\ |A'| &< C \left(\left| \frac{\delta'}{a} \right| + \frac{|a'\delta|}{a^2} \right), \quad |B'| < C \left(\frac{|\delta\delta'|}{a^2} + \frac{|a'\delta^2|}{|a^3|} \right), \\ |A''| &< C \left(\frac{|a'\delta'|}{a^2} + \frac{|a''\delta|}{a^2} + \frac{a'^2\delta^2}{|a^3|} + \frac{|\delta''|}{|a|} + \frac{|\delta\delta'^2|}{|a^3|} \right), \\ |B''| &< C \left(\frac{\delta'^2}{|a^3|} + \frac{|\delta\delta'|}{|a^3|} + \frac{|a'\delta|}{|a^3|} + \frac{|a''\delta^2|}{|a^3|} + \frac{a'^2\delta^2}{a^4} \right), \end{aligned}$$

где с целью упрощения обозначений $'$ обозначает $\frac{d}{dx}$,

$$A = \sin 2\Theta_{\bar{s},n}(x), \quad B = \cos 2\Theta_{\bar{s},n}(x), \quad a = \tilde{d}^{(s)}(x) - \tilde{d}^{(s)}(T^n x), \quad \delta = \tilde{U}_R^{(s),1}(n, x).$$

Используя эти оценки, легко убедиться в справедливости предложения 8.

Мы полагаем $\tau_*^s(x) = \bar{s}$ для всех x , для которых $q^{(s)}(n, x)$ отлично от единицы.

Теперь сформулируем основной результат п. 3.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Элемент

$$\overline{\varphi}^{(s+1)}(n, x) = (q^{(s)*} \cdot u^{(s)*} \varphi^{(s)} \cdot u^{(s)} q^{(s)})(n, x)$$

может быть представлен в следующем виде:

$$\overline{\varphi}^{(s+1)}(n, x) = \overline{d}^{(s+1)}(x) + \overline{V}_R^{(s+1)}(n, x) + \overline{V}_{NR}^{(s+1)}(n, x),$$

где $\|\overline{V}_{NR}^{(s+1)}(n, x)\|_{s+1} < \varepsilon_{s+1}$, $\overline{V}_R^{(s+1)}(n, x)$ отлично от нуля только для РЗ порядка t , $\bar{s} + 1 \leq t \leq s$, все функции $\overline{d}^{(s+1)}$, $\overline{V}_R^{(s+1)}$, $\overline{V}_{NR}^{(s+1)}$ непрерывны вместе с их первыми и вторыми производными внутри расширения каждой из этих РЗ $O_t^{(n)}$, $\bar{s} + 1 \leq t \leq s$,

$$\|\overline{V}_R^{(s+1)}(n, x)\|_{s+1} < C\varepsilon_{t_1^{(s)}(x)},$$

$$\left\| \frac{d}{dx} \overline{V}_R^{(s+1)}(n, x) \right\|_{s+1} < C\varepsilon_{t_1^{(s)}(x)}^{3/4}, \quad \left| \frac{d^2}{dx^2} \overline{V}_R^{(s+1)}(n, x) \right|_{s+1} \leq C\varepsilon_{t_1^{(s)}(x)}^{1/2}.$$

Кроме того, $\overline{V}_R^{(s+1)}(n, x) \equiv 0$ для РЗ $O_{\bar{s}+1}^{(n)}$, возникших из РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 3 и 4, и

$$|\overline{d}^{(s+1)}(x) - \overline{d}^{(s+1)}(T^n x)| \geq \frac{1}{16}\varepsilon_{s+1}$$

для РЗ $O_{\bar{s}+1}^{(n)}$, возникших из РЗ типа 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы полагаем $V_{NR}^{(s+1)}(n, x) = \bar{\varphi}^{(s+1)}(n, x)$ вне РЗ порядка t , $\bar{s} + 1 \leq t \leq s$, $V_R^{(s+1)}(n, x) = 0$ вне этих РЗ. Неравенство

$$|\bar{d}^{(s+1)}(x) - \bar{d}^{(s+1)}(T^n x)| \geq \frac{1}{16} \varepsilon_{s+1}$$

следует для РЗ типа 3 из того, что

$$\bar{d}^{(s+1)}(x) = \lambda_1^{(n, \bar{s})}(x), \bar{d}^{(s+1)}(T^n x) = \lambda_1^{(n, \bar{s})}(T^n x)$$

и

$$|\bar{d}^{(s+1)}(x) - \bar{d}^{(s+1)}(T^n x)| = |\lambda_+^{(n, \bar{s})}(x) - \lambda_-^{(n, \bar{s})}(x)| \geq \frac{1}{16} \varepsilon_{s+1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что из РЗ типа 3 и порядка $\bar{s}$ образовались РЗ типа 4 и порядка $\bar{s} + 1$. В этих зонах между значениями $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ и $\bar{d}^{(s+1)}(T^n x)$ возникла щель порядка ε_{s+1} . Как легко видеть, из РЗ типа 4 и порядка $\bar{s}$ образовались РЗ того же типа и порядка $\bar{s} + 1$, и для них аналогичная щель больше $\frac{1}{16} \varepsilon_s - C \varepsilon_{s+1}$. Это означает, что образовавшиеся РЗ типа 4 останутся РЗ того же типа на последующих шагах индукции до тех пор, пока щель порядка ε_s не станет больше, чем $\varepsilon_{s+k-g(s+k)}^\mu$. После этого на последующих шагах эта область перестанет быть РЗ, и легко проверить, что k не превосходит Cs .

Итак, мы получили элемент $\bar{\varphi}^{(s+1)}(n, x)$, для которого выполняются все индуктивные предположения для РЗ порядка t , где $\bar{s} + 1 \leq t \leq s$, и их сдвигов на n , где $|n| \leq R_s$. Для того чтобы получить элемент $\varphi^{(s+1)}(n, x)$, удовлетворяющий всем индуктивным предположениям 0_{s+1} – 6_{s+1} , необходимо рассмотреть РЗ порядка $(s + 1)$ и проверить выполнение остальных индуктивных предположений. Это будет сделано в следующем пункте.

3.4. Геометрия резонансных зон. Анализ разрывов. Окончание доказательства индуктивной леммы. Мы видели в предыдущем разделе, что функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$, $\bar{V}_R^{(s+1)}(n, x)$, $\bar{V}_{NR}^{(s+1)}(n, x)$ непрерывны во всех расширениях $\tilde{O}_t^{(n)}$, $\bar{s} + 1 \leq t \leq s$, РЗ типа 0, 1 и 2. Кроме того, эти функции непрерывны в расширениях РЗ $\tilde{O}_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 4, так как в этом случае каждая из функций $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ и $\bar{d}^{(s+1)}(T^n x)$ имеет ровно одну критическую точку внутри РЗ $\tilde{O}_{\bar{s}}^{(n)}(x)$ и $\tilde{O}_{\bar{s}}^{(-n)}(T^n x)$, соответственно (одна из этих точек – максимум, а другая – минимум); разность между критическими значениями этих функций больше $C \varepsilon_{s+1}$, а $V_R^{(s), 1}(n, x)$ не превосходит $C \varepsilon_{\bar{s}}$ для всех $x \in O_{\bar{s}}^{(n)}$, так что разность $\bar{V}_R^{(s+1)}(n, x) - V_R^{(s), 1}(n, x)$ не превосходит по модулю $C \varepsilon_{s+1}^2 \varepsilon_{\bar{s}}^{-1}$. Последнее означает, что разность между критическими значениями функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ в $O_{\bar{s}}^{(n)}(x)$ и $O_{\bar{s}}^{(-n)}(T^n x)$ по модулю остается больше $C_1 \varepsilon_{s+1}$, где $C_1 > C(1 - \varepsilon_{s+1} \varepsilon_{\bar{s}}^{-1})$.

На границах РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ типа 3 возникают разрывы функций $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ и $\bar{V}^{(s), 1}(n, x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $O_{\bar{s}}^{(n)}$ – РЗ типа 3, содержащая точку x , и $O_{\bar{s}}^{(-n)}$ – такая же РЗ, содержащая точку $T^n x$. Если $\bar{x}$ – точка разрыва функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$, то предельные значения функций $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ и $\bar{V}^{(s), 1}(m, x)$ и их производных при стремлении x к $\bar{x}$ изнутри (извне) РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$ совпадают с предельными значениями функций $\bar{d}^{(s+1)}(T^n(x))$ и $\bar{V}^{(s+1)}(m, T^n(x))$ и их производных

при стремлении x к $\bar{x}$ изнутри (извне) РЗ $O_{\bar{s}}^{(n)}$. Функция $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ принимает каждое свое значение ровно два раза (с учетом кратности).

Доказательство непосредственно следует из определения функций $\bar{d}^{(s+1)}(x)$, $\bar{V}^{(s+1)}(x)$ и определения элемента $q^{(s)}(n, x)$. Заметим, что $|n| \leq R_{\bar{s}}$.

Точно таким же образом возникали разрывы функции $d^{(t)}(x)$, $t \leq s$, на предыдущих шагах индукции при полном расщеплении РЗ. Используя это обстоятельство, мы покажем, что функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$, $\bar{V}^{(s+1)}(x)$ могут быть переклеены таким образом, что будут выполнены индуктивные предположения 0_{s+1} – 6_{s+1} , причем эта переклейка будет осуществлена при помощи отображения $S^1 \rightarrow S^1$, сохраняющего меру Лебега. Свойства этого отображения будут сформулированы в предложении 12.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Предположим, что на интервале*

$$\bar{B}_n^{(s+1)} = \{x : |\bar{d}^{(s+1)}(x) - \bar{d}^{(s+1)}| < 2\delta_{s+1}\},$$

$R_s < |n| \leq R_{s+1}$, функции $\bar{d}^{(s+1)}$ и $\bar{d}^{(s+1)}(T^n x)$ непрерывны и

$$\lim_{x \rightarrow x_{\pm}} |\bar{d}^{(s+1)}(x) - \bar{d}^{(s+1)}(T^n x)| = 2\delta_{s+1},$$

где x_- , x_+ – концы интервала $\bar{B}_n^{(s+1)}$ и $x \in \bar{B}_n^{(s+1)}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $C_1\delta_{s+1} < |\bar{B}_n^{(s+1)}| < C_2\delta_{s+1}^{1/2}$;
- 2) существует такая точка $x_* \in \bar{B}_n^{(s+1)}$, что $\bar{d}^{(s+1)}(x_*) = \bar{d}^{(s+1)}(T^n x_*)$;
- 3) если x^* – критическая точка функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$, то $\text{dist}(x^*, \bar{B}_n^{(s+1)}) > \delta_{s+1}^{1/3}$.

Кроме того, пересечение $\tilde{O}_t^{(m)} \cap \bar{B}_n^{(s+1)}$ пусто для $\bar{s} + 1 \leq t < s + 1$ и любых m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из построения функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ следует, что $\left| \frac{d\bar{d}^{(s+1)}(x)}{dx} \right| < C$. Поэтому $|\bar{B}_n^{(s+1)}| > C_1\delta_{s+1}$.

Пусть x^* – критическая точка функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$, принадлежащая интервалу непрерывности функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$, содержащему $\bar{B}_n^{(s+1)}$. (В силу индуктивных предположений и определения функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ такой интервал существует.) Предположим, что для некоторой точки $\bar{x} \in \bar{B}_n^{(s+1)}$ выполняется $|\bar{d}^{(s+1)}(x^*) - \bar{d}^{(s+1)}(\bar{x})| < \delta$. Тогда $|\bar{d}^{(s+1)}(x^*) - \bar{d}^{(s+1)}(T^n \bar{x})| < \delta + 2\delta_{s+1}$, т.е. $T^n \bar{x}$ принадлежит $C_1(\delta + 2\delta_{s+1})^{1/2}$ -окрестности точки x^* . Той же окрестности принадлежит и $\bar{x}$. Следовательно,

$$2C_1(\delta + 2\delta_{s+1})^{1/2} > \frac{\varepsilon^\sigma}{(s+1)^2 \mathbb{R}_{s+1}^{\nu+1}},$$

$$2C_1(\delta + 2\delta_{s+1})^{1/2} > \frac{\varepsilon^{\sigma/2}}{(\Gamma(s+1)^2(1+\kappa)^{s+1})^{\nu+1}(s+1)^2}.$$

Значит,

$$\delta + 2\delta_{s+1} > C_3 \frac{\varepsilon^{\sigma/2}}{((1 + \kappa)^{2(\nu+1)})^{s+1}}.$$

Последнее неравенство не может быть верным, если $\delta < \delta_{s+1}^{1/3}$. Мы получаем, что $\bar{x}$ отстоит от x^* , по крайней мере, на расстояние $\delta_{s+1}^{1/3}$ и $\left| \frac{d\bar{d}^{(s+1)}(x)}{dx} \right| \geq C\delta_{s+1}^{1/3}$ для $x \in \bar{B}_n^{(s+1)}$. Такое же неравенство справедливо для $\frac{d\bar{d}^{(s+1)}(T^n x)}{dx}$.

Покажем теперь, что

$$\operatorname{sgn} \frac{d\bar{d}^{(s+1)}(x)}{dx} = -\operatorname{sgn} \frac{d\bar{d}^{(s+1)}(T^n x)}{dx}$$

для $x \in \bar{B}_n^{(s+1)}$. Для этого, прежде всего, заметим, что если $x_1 \neq x_2$ и $\bar{d}^{(s+1)}(x_1) = \bar{d}^{(s+1)}(x_2)$, то

$$\operatorname{sgn} \frac{d\bar{d}^{(s+1)}(x)}{dx} \Big|_{x_1} = -\operatorname{sgn} \frac{d\bar{d}^{(s+1)}(x)}{dx} \Big|_{x_2}.$$

Предположим, что знаки производных совпадают и x_1^* и x_2^* — критические точки функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ такие, что пары (x_1, x_1^*) и (x_2, x_2^*) принадлежат отрезку непрерывности функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ (такие критические точки существуют согласно индуктивным предположениям и определению функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$). Если

$$(\bar{d}^{(s+1)}(x_1) - \bar{d}^{(s+1)}(x_1^*))(\bar{d}^{(s+1)}(x_2) - \bar{d}^{(s+1)}(x_2^*)) > 0,$$

то при $\bar{d}^{(s+1)}(x_1^*) > \bar{d}^{(s+1)}(x_2^*)$ найдется такое $\bar{d}$, $(\bar{d} - \bar{d}^{(s+1)}(x_1))(\bar{d} - \bar{d}^{(s+1)}(x_1^*)) < 0$, что $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ принимает значение $\bar{d}$ более, чем в двух различных точках. Случай $\bar{d}^{(s+1)}(x_1^*) < \bar{d}^{(s+1)}(x_2^*)$ рассматривается аналогично.

Предположим теперь, что

$$(\bar{d}^{(s+1)}(x_1) - \bar{d}^{(s+1)}(x_1^*))(\bar{d}^{(s+1)}(x_2) - \bar{d}^{(s+1)}(x_2^*)) < 0.$$

Мы покажем, что и в этом случае функция $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ принимает некоторое значение по крайней мере в трех различных точках, что невозможно.

Рассмотрим несколько случаев.

1) Существует критическая точка x_1^{**} функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ такая, что на интервале с концами x_1^{**} и x_1^* , содержащем x_1 , функция $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ непрерывна. Из условия совпадения знаков производных $\frac{d\bar{d}^{(s+1)}(x)}{dx}$ в точках x_1 и x_2 следует, что $x_1^{**} \neq x_2^*$. Тогда существует такое $\bar{d}$, близкое к $\bar{d}^{(s+1)}(x_2^*)$ при $\bar{d}^{(s+1)}(x_2^*) > \bar{d}^{(s+1)}(x_1^{**})$ или близкое к $\bar{d}^{(s+1)}(x_1^{**})$ при $\bar{d}^{(s+1)}(x_2^*) < \bar{d}^{(s+1)}(x_1^{**})$, что $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ принимает значение $\bar{d}$ по крайней мере в трех различных точках.

2) Существует точка x'_1 , являющаяся точкой разрыва функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$, такая, что $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ непрерывна на интервале с концами x'_1 и x_1^* , содержащем x_1 и не содержащем критических точек. Тогда из индуктивных предположений и определения функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ легко вывести, что существует такое p , $|p| < R_{s+1}^{-1}$, что $\bar{d}^{(s+1)}(x) = \bar{d}^{(s+1)}(ex)$, где e – отображение окружности, переводящее некоторый интервал (или полуинтервал) $I^{(s+1)}$ с концом в x'_1 в $T^p I^{(s+1)}$, а $I_1^{(s+1)} = T^p I^{(s+1)}$ в $T^{-p} I_1^{(s+1)}$, будет удовлетворять 1). Следовательно, и в этом случае функция $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ будет принимать некоторое свое значение по крайней мере в трех различных точках, что невозможно.

Итак, мы получаем, что

$$\operatorname{sgn} \frac{d\bar{d}^{(s+1)}(x)}{dx} \Big|_{x_1} = - \operatorname{sgn} \frac{d\bar{d}^{(s+1)}(x)}{dx} \Big|_{x_2}.$$

Покажем теперь, что существует такая точка $x_* \in \bar{B}^{(s+1)}$, что

$$\bar{d}^{(s+1)}(x_*) = \bar{d}^{(s+1)}(T^n x_*).$$

В самом деле, функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ и $\bar{d}^{(s+1)}(T^n x)$ непрерывны на замыкании $\bar{B}_n^{(s+1)}$ и, следовательно, непрерывна разность $\bar{d}^{(s+1)}(x) - \bar{d}^{(s+1)}(T^n x)$. Модуль этой разности принимает одинаковые значения в концах интервала $\bar{B}_n^{(s+1)}$. Если сама разность принимает противоположные значения, то существование точки x_* очевидно. Если же разность принимает в концах $\bar{B}_n^{(s+1)}$ одинаковые значения, то существует критическая точка этой разности внутри $\bar{B}_n^{(s+1)}$. Это означает, что производные $\frac{d\bar{d}^{(s+1)}(x)}{dx}$ и $\frac{d\bar{d}^{(s+1)}(T^n x)}{dx}$ имеют одинаковые знаки для $x \in \bar{B}_n^{(s+1)}$, так как $\bar{B}_n^{(s+1)}$ не содержит критических точек функций $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ и $\bar{d}^{(s+1)}(T^n x)$, как было показано в начале доказательства. Из этого следует, что $\bar{d}^{(s+1)}(x_1) \neq \bar{d}^{(s+1)}(T^n x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in \bar{B}_n^{(s+1)}$. Таким образом, области значений функций $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ и $\bar{d}^{(s+1)}(T^n x)$ для $x \in \bar{B}_n^{(s+1)}$ не пересекаются. Так как область значений каждой из этих функций находится в $2\delta_{s+1}$ -окрестности области значений другой и каждая из них отделена от значений в любой критической точке x^* на расстояние, большее $\delta_{s+1}^{1/3}$, найдутся точки $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, в которых производные функции $\bar{d}^{(s+1)}(x)$ имеют одинаковый знак, $\bar{d}^{(s+1)}(\bar{x}_1) = \bar{d}^{(s+1)}(\bar{x}_2)$ и одна из них принадлежит $\bar{B}_n^{(s+1)}$. Это невозможно.

Таким образом, нами доказано существование точки $x_* \in \bar{B}_n^{(s+1)}$, для которой $\bar{d}^{(s+1)}(x_*) = \bar{d}^{(s+1)}(T^n x_*)$. Из того, что $\bar{d}^{(s+1)}(x_*)$ и $\bar{d}^{(s+1)}(T^n x_*)$ имеют производные разных знаков при $x \in \bar{B}_n^{(s+1)}$ и каждая из них по модулю $\geq C\delta_{s+1}^{1/3}$, следует, что диаметр $\bar{B}_n^{(s+1)}$ не превосходит $\frac{2\delta_{s+1}}{C\delta_{s+1}^{1/3}} \leq C\delta_{s+1}^{1/2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Существует такое взаимно однозначное сохраняющее меру Лебега отображение $e^{(s)}: S^1 \rightarrow S^1$, что для элемента

$$\varphi^{(s+1)}(n, x) = \overline{\varphi}(e^{(s)}(x)) = d^{(s+1)}(x) + V^{(s+1)}(n, x)$$

функции $d^{(s+1)}(x)$ и $V^{(s+1)}(x)$ непрерывны в расширении $\tilde{O}_{s+1}^{(n)}$ любой РЗ порядка $s+1$, $R_s < |n| \leq R_{s+1}$.

Отображение $e^{(s)}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $e^{(s)}$ тождественно вне $\bigcup_j I_j$, $j \in J$, где J – конечное множество индексов, а каждое множество I_j является интервалом или полуинтервалом;
- 2) $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \emptyset$ при $j_1 \neq j_2$;
- 3) для каждого j_1 существует одно и только одно j_2 такое, что $I_{j_2} = T^{p(j_1)} I_{j_1}$ и $e^{(s)}(x) = T^{p(j_1)} x$ для $x \in I_{j_1}$, $p(j_2) = -p(j_1)$, $|p(j_1)| < R_s$;
- 4) хотя бы одно из множеств I_{j_1} , $I_{j_2} = T^{p(j_1)} I_{j_1}$ принадлежит расширению $\tilde{O}_{s+1}^{n(j_1)}$ РЗ порядка $s+1$;
- 5) $I_j \cup O_t^{(n)} = \emptyset$ для всех $j \in J$ и $\overline{s+1} \leq t \leq s$;
- 6) мера Лебега $\mu(I_j) < C\delta_s^{1/2}$ для всех $j \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из следующих утверждений.

1) Пусть $\tilde{O}_{s+1}^{(n_1)}$ и $\tilde{O}_{s+1}^{(n_2)}$ – расширения двух РЗ порядка $s+1$, принадлежащих одному участку монотонности функции $\overline{d}^{(s+1)}(x)$, заключенному между двумя критическими точками x_1^* и x_2^* . Тогда $\text{dist}(\tilde{O}_{s+1}^{(n_1)}, \tilde{O}_{s+1}^{(n_2)}) > C_1\delta_{s+1}^{1/3}$.

В самом деле, согласно предложению 11 существуют такие точки $x_1 \in \tilde{O}_{s+1}^{(n_1)}$ и $x_2 \in \tilde{O}_{s+1}^{(n_2)}$, что $\overline{d}^{(s+1)}(x_1) = \overline{d}^{(s+1)}(T^{n_1} x_1)$ и $\overline{d}^{(s+1)}(x_2) = \overline{d}^{(s+1)}(T^{n_2} x_2)$. Кроме того, $\text{diam } \tilde{O}_{s+1}^{(n_1)} < C\delta_{s+1}^{1/2}$ и $\text{diam } \tilde{O}_{s+1}^{(n_2)} < C\delta_{s+1}^{1/2}$. Тогда

$$\begin{aligned} & |\overline{d}^{(s+1)}(T^{n_1} x_2) - \overline{d}^{(s+1)}(T^{n_2} x_2)| \\ & < |\overline{d}^{(s+1)}(T^{n_1} x_1) - \overline{d}^{(s+1)}(T^{n_1} x_2)| + |\overline{d}^{(s+1)}(T^{n_1} x_1) - \overline{d}^{(s+1)}(T^{n_2} x_2)| \\ & < 2C|x_1 - x_2| < C_2\delta_{s+1}^{1/3}, \end{aligned}$$

если $|x_1 - x_2| < \delta_{s+1}^{1/3}$. С другой стороны, можно показать, что

$$|\overline{d}^{(s+1)}(T^{n_1} x_2) - \overline{d}^{(s+1)}(T^{n_2} x_2)| > C\delta_{s+1}^{1/6} |\{(n_1 - n_2, \omega)\}|.$$

Имеем $|\{(n_1 - n_2, \omega)\}| < C_4\delta_{s+1}^{1/6}$, что невозможно при $|n_1|, |n_2| < R_{s+1}$ и диофантовом условии (D).

2) Так как $\text{diam}(\tilde{O}_{s+1}^{(n_1)}) < C\delta_{s+1}^{1/2}$, можно для любой точки разрыва $\overline{x}$ найти такой интервал или полуинтервал $\Delta(\overline{x})$ с концом в $\overline{x}$, что длина этого интервала не превосходит $C\delta_{s+1}^{1/2}$, и существует такое $p = p(\overline{x})$, $|p| < R_{s+1}$, что функция $d^{(s+1)}(x)$, равная $\overline{d}^{(s+1)}(x)$ в одной полукрестности точки $\overline{x}$ и $d^{(s+1)}(T^{-p}y)$ для $y \in \Delta(\overline{x})$ в другой ее полукрестности, будет непрерывна в $\tilde{O}_{s+1}^{(n)}$. Тогда преобразование $e^{(s)}(x) =$

$T^{-p(\overline{x})}x$ для $x \in \Delta(\overline{x})$, $e^{(s)}(x) = T^{p(\overline{x})}x$ для $x \in T^{-p(\overline{x})}\Delta(\overline{x})$, $e^{(s)}(x)$ тождественно вне $\bigcup_{\overline{x}} \Delta(\overline{x})$, где объединение берется по всем точкам разрыва $\overline{x}$, принадлежащим множеству

$$\{x : |\overline{d}^{(s+1)}(x) - \overline{d}^{(s+1)}(T^n x)| < 2\delta_{s+1}, R_s < |n| \leq R_{s+1}\},$$

есть искомое преобразование. Из пункта 1) следует, что это преобразование корректно определено.

Положим $\tau^{(s)}(x)$, $\tau_1^{(s)}(x)$ и $\tau_*^{(s)}(x)$ равными $\tau^{(s)}(e^{(s)-1}(x))$, $\tau_1^{(s)}(e^{(s)-1}(x))$ и $\tau_*^{(s)}(e^{(s)-1}(x))$, соответственно.

Остальные индуктивные предположения проверяются непосредственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sinai Ya. Anderson localization for one-dimensional difference Schrödinger operator with quasi-periodic potential // J. Statist. Phys. 1987. V. 46. P. 861–909.
- [2] Chulaevsky V. A., Sinai Ya. G. Anderson localization for the 1-D discrete Schrödinger operator with two-frequency potential // Comm. Math. Phys. 1989. V. 125. P. 91.
- [3] Chulaevsky V. A., Sinai Ya. G. Anderson localization and KAM theory // Analysis, et Cetera. New York: Academic Press, 1990.
- [4] Chulaevsky V. A., Sinai Ya. G. The exponential localization and structure of the spectrum for 1D quasi-periodic discrete Schrödinger operators // Rev. Math. Phys. 1991. V. 3. №3. P. 241–284.
- [5] Динабург Е. И., Синай Я. Г. Об одномерном уравнении Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом // Функц. анализ и прилож. 1975. Т. 9. С. 8–21.
- [6] Carmona R., Lacroix J. Spectral theory of random Schrödinger operators. Boston: Birkhäuser, 1990.
- [7] Aizenman M., Molchanov S. Localization at large disorder and at extreme energies: An elementary deviation // Comm. Math. Phys. 1993. V. 157. P. 245–278.
- [8] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [9] Chulaevsky V. A., Spenser T. Positive Lyapunov exponents for a class of deterministic potentials // Comm. Math. Phys. 1995. V. 168. P. 455–466.
- [10] Пастур Л. А., Фиготин А. Локализация для одного несоизмеримого потенциала: Точно решаемая многомерная модель // Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 686–688.
- [11] Simon B. Almost periodic Schrodinger operators. IV. Maryland model // Ann. Phys. 1985. V. 159. P. 157–183.
- [12] Bellissard J., Lima R., Scoppola E. Localization in ν -dimensional incommensurate media // Comm. Math. Phys. 1983. V. 88. P. 465–477.
- [13] Frohlich J. Spencer T., Wittwer P. Localization for a class of one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operator // Comm. Math. Phys. 1990. V. 132. P. 5–25.
- [14] Jitomirskaya S., Simon B. Operator with singular continuous spectrum: III Almost periodic Schrodinger operators // Comm. Math. Phys. 1994. V. 165. P. 201–205.
- [15] Avron J., Simon B. Almost periodic Schrodinger operators, II. The integrated density of states // Duke Math. J. 1983. V. 50. P. 369–391.
- [16] Herman M. Une methode pour minorer les exposant de Lyapunov et exemples montrant le caractere local d'un theoreme d'Arnold et de Moser sur le tore en dimension 2 // Comment. Math. Helv. 1983. V. 58. P. 453–502.
- [17] Jitomirskaya S. Anderson localization for the almost Mathieu equation: A nonperturbative proof // Comm. Math. Phys. 1994. V. 165. P. 49–57; II Point spectrum for $\lambda > 2$ // Comm. Math. Phys. 1995. V. 168. P. 563–570.
- [18] Gesztesy F., Simon B. The xi function // Preprint, 1995.

- [19] Avron F., Simon B. Singular continuous spectrum for a class of almost periodic Jacobi matrices // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1982. V. 6. P. 81–85.
- [20] Last Y. A relation between absolutely continuous spectrum of ergodic Jacobi matrices and the spectra of periodic approximants // Comm. Math. Phys. 1993. V. 151. P. 183–192.
- [21] Aubry S., Andre G. Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices // Ann. Israel Phys. Soc. 1981. V. 3. P. 133–164.
- [22] Thouless D. J. Bandwidth for a quasiperiodic tight binding model // Phys. Rev. 1982. V. B28. P. 4272–4276.
- [23] Avron F., van Mouche P., Simon B. On the measure of the spectrum for the almost Mathieu operator // Comm. Math. Phys. 1990. V. 132. P. 103–118.
- [24] Eliasson L. Floquet solution for 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation // Comm. Math. Phys. 1992. V. 146. P. 447–482.
- [25] Johnson R., Moser J. The rotation number for almost periodic potentials // Comm. Math. Phys. 1982. V. 84. P. 403–438.
- [26] Белокопос Е. Д. Квантовая частица в однородной деформированной решетке. Оценки размера лагун в спектре // ТМФ. 1975. Т. 25. № 3. С. 344–357.
- [27] Moser J., Poschel J. An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials // Comm. Math. Helvetici. 1984. V. 59. P. 39–85.
- [28] Chulaevsky V. A., Dinaburg E. I. Methods of KAM-theory for long-range quasi-periodic operators on $\mathbb{Z}^d$. Pure point spectrum // Comm. Math. Phys. 1993. V. 153. P. 559–577.
- [29] Gordon A., Jitomirskaya S., Last Y., Simon B. Duality and Singular Continuous Spectrum in the Almost Mathieu Equations // Preprint, 1996.