Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Дубинский, Об аналитических “краевых” задачах на плоскости, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 53–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm849>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:34:23

УДК 517.53+517.91+517.988.34

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ “КРАЕВЫХ” ЗАДАЧАХ НА ПЛОСКОСТИ

Ю. А. Дубинский

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	53
§ 1. Аналитическое продолжение решений линейных уравнений	57
§ 2. Принцип конформной эквивалентности многоточечных задач	60
§ 3. Аналитическая нелинейная периодическая задача	65
§ 4. Аналитическая нелинейная задача без краевых условий	76
§ 5. Комментарии и задачи	95
§ 6. Об одной задаче продолжения с наименьшим коаналитическим укло- нением	98
Список литературы	104

Введение

В настоящем обзоре изложены результаты последних лет, относящиеся к теории краевых задач комплексной математической физики или, что то же в нашем тексте, к теории краевых задач для дифференциальных уравнений с комплексными аргументами.

Строго говоря, как слово “краевые”, так и слова “комплексная математическая физика” должны быть взяты в кавычки и не только потому, что к настоящему времени такой теории в четко сформулированном виде не существует, но и потому, что даже самые первые результаты в этом направлении показывают, что естественные краевые задачи для уравнений с комплексными аргументами по самой постановке существенно отличаются от традиционных краевых задач математической физики и потому требуют собственной терминологии.

Чисто внешне (по крайней мере для автора) необходимость построения теории краевых задач комплексной математической физики обусловлена следующим наблюдением.

Как известно, в теории вещественной математической физики среди всевозможных задач принято выделять в отдельную главу задачу Коши как простейшую краевую задачу для эволюционных уравнений по переменной $t \in \mathbb{R}^1$, играющей роль времени.

В случае комплексных аргументов выделенная переменная $t \in \mathbb{C}^1$ теряет физический смысл времени, и тем самым понятие эволюционности в обычном смысле исчезает.

Тем не менее, аналитическая теория задачи Коши – теория Коши–Ковалевской – получила глубокое и всестороннее развитие. Более того, вместе с экспоненциальной теорией для псевдодифференциальных уравнений с комплексными аргументами (см. [13], [14]) сложился единый комплекс задачи Коши для уравнений с комплексными аргументами.

Совсем иное положение с комплексными *краевыми* задачами, вопрос о постановке которых, насколько нам известно, пока не рассматривался. Совершенно понятно, что прямой перенос постановок основных краевых задач вещественной математической физики на комплексный случай невозможен, поэтому первоочередной задачей в этом направлении является проблема формирования самих математических моделей краевых задач для дифференциальных уравнений с комплексными аргументами (в особенности это касается, как мы увидим ниже, нелинейных аналитических краевых задач).

С этой целью мы предлагаем два подхода для постановок и исследования комплексных краевых задач.

1. Аналитическое продолжение решений краевых задач вещественной математической физики (аналитическое продолжение краевых задач).
2. Минимизация функционалов в пространствах Соболева аналитических функций (вариационный подход).

Коль скоро реализуем первый подход, мы получаем, что в пространствах аналитических функций корректны те комплексные краевые задачи, сужение которых на вещественные подпространства являются корректными вещественными задачами, и наоборот, продолжение вещественных краевых задач дает корректную комплексную задачу. Таким образом, при первом подходе постановка комплексной задачи по форме та же, что и в вещественном случае, и речь идет о ее рассмотрении в пространствах аналитических функций комплексных аргументов.

При втором же подходе, как выяснилось, возникают принципиально новые постановки задач, особенность которых в первую очередь в том, что соответствующее уравнение Эйлера задачи минимизации аналитического функционала содержит в качестве неизвестных не только аналитическую функцию, но и дополнительную неаналитическую функцию – коаналитический потенциал. (Последнее объясняется тем, что в точке минимума градиент аналитического функционала определяется с точностью до произвольного слагаемого, ортогонального подпространству аналитических функций.) Таким образом, второй подход приводит к существенно иным аналитическим моделям краевых задач математической физики.

Формально оба подхода пригодны для исследования задач математической физики в случае произвольного числа независимых переменных $z_1, \dots, z_n$, однако строгое обоснование весьма различно для $n = 1$ и $n > 1$.

В настоящий момент завершенные результаты получены только в одномерном случае, т.е. для уравнений на комплексной плоскости. Эти результаты мы и представляем читателю в настоящей работе. (Что же касается многомерных задач, то с первыми теоремами по нелинейным аналитическим задачам для эллиптических и параболических уравнений можно познакомиться по работам [16], [20].)

Непосредственное содержание обзора следующее.

В § 1 и § 2 реализуется первый подход (аналитическое продолжение краевых вещес-

твенных задач) применительно к комплексной многоточечной задаче

$$(1) \quad f^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) f^{(k)}(z) = h(z), \quad z \in G,$$

$$(2) \quad f^{(k)}(z_j) = f_{kj}, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots, k_j - 1,$$

где $z_1, \dots, z_m$ ($m \leq n$) – произвольные точки в области G или на ее границе, $k_1 + \dots + k_m = n$; f_{kj} – произвольные комплексные числа.

Основной результат – принцип конформной эквивалентности многоточечных задач – гласит, что любая задача (1), (2) “конформно” эквивалентна некоторой вещественной многоточечной задаче на интервале (a, b)

$$(3) \quad g^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k(x) g^{(k)}(x) = q(x),$$

$$(4) \quad g^{(k)}(x_j) = g_{kj}, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots, k_j - 1,$$

где $x_j \in (a, b)$, $j = 1, \dots, m$.

Тем самым исследование всякой комплексной задачи (1), (2) адекватно исследованию вещественной (не обязательно аналитической) задачи (3), (4).

Ключевым моментом этого подхода является теорема 1.1 об аналитическом продолжении решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с интервала (a, b) в комплексную плоскость. В частности, из этой теоремы следует, что если с самого начала точки $z_1, z_2, \dots, z_m$ лежат на вещественной оси, то все решения комплексной задачи (1), (2) суть аналитические продолжения решений вещественной задачи (3), (4), где

$$b_k(x) = a_k(x + i0), \quad q(x) = h(x + i0),$$

т.е. решений сужения исходной комплексной задачи на вещественную ось.

Второму (вариационному) подходу посвящены §3 и §4, в которых рассмотрены нелинейная аналитическая задача с периодическими условиями и нелинейная аналитическая задача без каких-бы то ни было условий на границе.

Как оказывается, уравнение Эйлера аналитического функционала в пространстве периодических функций имеет вид

$$(5) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)) + \partial_z r(z) = h(z), \quad z \in (y_-, y_+) \times (-\pi, \pi),$$

где $\partial_z = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$ есть оператор Коши–Римана; при этом

$$(6) \quad f(z + 2\pi) = f(z), \quad r(z + 2\pi) = r(z), \quad r(x + iy_{\pm}) = 0.$$

Здесь наряду с неизвестной аналитической функцией $f(z)$ появляется дополнительная неаналитическая (также неизвестная) функция $r(z)$, играющая роль “невязки” между функциональной и “поточечной” записями равенства нулю вариации функционала.

При выводе периодической модели (5), (6) центральную роль играет ортогональное разложение

$$(7) \quad L_2 = \mathcal{O}_2 \dot{+} \partial_z \overset{\circ}{W}_2^{1,1},$$

где $\mathcal{O}_2$ – подпространство аналитических функций, суммируемых с квадратом, а $\overset{\circ}{W}_2^{1,1}$ – пространство Соболева функций, периодических с периодом 2π и равных нулю при $y = y_{\pm}$.

Именно задача (5), (6) с двумя неизвестными функциями $f(z)$ и $r(z)$ является естественной нелинейной аналитической задачей вариационного типа на классе периодических функций.

С аналогичных позиций в § 4 исследуется нелинейная аналитическая задача, возникающая при минимизации функционала в пространстве Соболева $\mathcal{O}_2^m$ аналитических функций в односвязной области G (никаких дополнительных условий на функции не налагаются). В этом случае уравнение Эйлера имеет более сложный вид

$$\sum_{k=0}^m (\partial_{\Gamma}^*)^k A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)) + \partial_z r(z) = h(z),$$

где $r(z) = \overset{\circ}{W}_2^1(G)$ есть по-прежнему коаналитический потенциал, определяемый ортогональным разложением

$$(8) \quad L_2 = \mathcal{O}_2 \dot{+} \partial_z \overset{\circ}{W}_2^1,$$

а ∂_{Γ} – дифференциальный оператор первого порядка (конграничный оператор), определяемый “геометрией” границы Γ области G .

Отметим, что доказательство ортогональных разложений (7), (8) сводится к решению краевых эллиптических задач для уравнения Коши–Римана

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) r(z) = q(z)$$

либо при условиях

$$r(z + 2\pi) = r(z), \quad r(x + iy_{\pm}) = 0$$

(периодический случай), либо при условиях Дирихле

$$r(z)|_{\Gamma} = 0$$

(случай отсутствия краевых условий в исходной задаче минимизации). Обе эти задачи нормально разрешимы по Хаусдорфу, т.е. однозначно разрешимы тогда и только тогда, когда

$$q(z) \perp \text{Ker } \partial_{\bar{z}}$$

или, что то же, когда правая часть ортогональна подпространству аналитических функций. (В скобках заметим, что аналогичная теорема для аналитических функций дает окончательный ответ на вопрос о корректности известной $\bar{\partial}$ -проблемы Неймана на плоскости, который, насколько нам известно, оставался открытым).

Завершая введение, отметим, что, познакомившись с содержанием статьи, читатель скорее всего задаст себе больше вопросов, чем найдет ответов, поэтому часть возможных вопросов, решение которых нам представляется достаточно важным, сформулирована в виде задач. Автор будет признателен за любую информацию по затронутым проблемам.

В процессе подготовки статьи для меня весьма полезным были беседы с О. А. Олейник, А. Г. Витушкиным, Е. П. Долженко, М. А. Евграфовым, которым я выражаю искреннюю благодарность.

В заключение благодарю Российский фонд фундаментальных исследований (проекты 93-011-1723, 96-01-00621) и Американское математическое общество за поддержку.

§ 1. Аналитическое продолжение решений линейных уравнений

1.1. Постановка задачи.

Пусть $f_0(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{C}^1$ есть решение линейного дифференциального уравнения порядка $n \geq 1$

$$(1.0) \quad f_0^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) f_0^{(k)}(x) = h(x), \quad x \in (a, b),$$

где коэффициенты $a_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, и правая часть $h(x)$ суть непрерывные функции на интервале (a, b) , а решение $f_0(x) \in \mathbb{C}^n(a, b)$.

Пусть, далее, G — односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}^1$, $z = x + iy$, содержащая интервал (a, b) или примыкающая к этому интервалу.

Предположим, что функции $a_k(x)$ и $h(x)$ допускают аналитические продолжения в указанную область G , т.е. существуют аналитические в области G функции $a_k(z)$ и $h(z)$ такие, что для всех $x \in (a, b)$

$$a_k(x + i0) \equiv \lim_{y \rightarrow 0} a_k(z) = a_k(x), \quad h(x + i0) \equiv \lim_{y \rightarrow 0} h(z) = h(x)$$

(в случае, если интервал (a, b) является граничным интервалом для области G , то, естественно, либо $y \rightarrow +0$, либо $y \rightarrow -0$).

Возникает вопрос: допускает ли аналитическое продолжение в область G решение $f_0(x)$ уравнения (1.0), т.е. существует ли аналитическая в области G функция $f(z)$ такая, что

$$(1.1) \quad f^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) f^{(k)}(z) = h(z), \quad z \in G,$$

причем

$$f(x + i0) = f_0(x), \quad x \in (a, b).$$

Прежде чем дать ответ на этот вопрос, отметим, что коль скоро аналитические продолжения $a_k(z)$ и $h(z)$ существуют, то в соответствии с классическими результатами по проблеме единственности аналитических функций (см., в частности, известную теорему единственности М. и Ф. Риссов [1, с. 1101]) они единственны и, значит, уравнение (1.1) является единственным аналитическим продолжением исходного

уравнения (1.0). Следовательно, поставленный вопрос о продолжении решений уравнения (1.0) как решений уравнений (1.1), во-первых, является корректным и, во-вторых, если он имеет положительный ответ, то по тем же причинам искомое продолжение будет также единственным. Таким образом, все дело сводится к вопросу существования продолжения $f(z)$.

1.2. Теоремы продолжения.

Рассмотрим вначале частный случай области G , а именно случай прямоугольника.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть функции $a_k(x)$, $h(x)$, определенные на интервале (a, b) , допускают аналитические продолжения $a_k(z)$, $h(z)$ в область $G = \{x \in (a, b), y \in (c, d)\}$, где $c \leq 0$, $d \geq 0$ – произвольные числа, причем $c < d$. Тогда существует аналитическая в G функция $f(z)$, являющаяся решением уравнения (1.1) и такая, что $f(x + i0) = f_0(x)$, $x \in (a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим в области G функцию $f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$ как решение задачи Коши (по $y \in (c, d)$)

$$(1.2) \quad L(f) \equiv (-i)^n f_y^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} (-i)^k a_k(z) f_y^{(k)}(z) = h(z),$$

$$(1.3) \quad f_y^{(k)}(x + i0) = i^k f_0^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $x \in (a, b)$ рассматривается как параметр, а $f_y(z)$ означает дифференцирование по y . Ясно, что если функция $f(z)$ будет аналитична по $z = x + iy$, то она и окажется искомым аналитическим продолжением, ибо в этом случае $f_y^{(k)}(z) = i^k f^{(k)}(z)$ и уравнение (1.2) совпадает с уравнением (1.1).

Как известно, для доказательства аналитичности $f(z)$ надлежит установить, что $f(z)$ есть дифференцируемая функция в смысле $\mathbb{R}_{x,y}^2$ и при этом выполнены условия Коши–Римана.

С этой целью, прежде всего, заметим, что решение задачи (1.2), (1.3) можно, очевидно, представить в виде

$$(1.4) \quad f(z) = f_h(x, y) + \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x, y) (i)^k f_0^{(k)}(x),$$

где $f_h(x, y)$ – решение уравнения (1.2), отвечающее нулевым данным Коши при $y = 0$, а функции $w_0(x, y), \dots, w_{n-1}(x, y)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, отвечающую “кронекевским” данным Коши, т.е.

$$L(w_j) = 0, \quad y \in (c, d); \quad w_j^{(k)}(x, 0) = \delta_{jk}, \quad k, j = 0, 1, \dots, n-1.$$

В соответствии с классическими результатами об аналитической зависимости решения задачи Коши от параметра функции $f_h(x, y)$, $w_0(x, y), \dots, w_{n-1}(x, y)$ аналитичны по $x \in (a, b)$ (разумеется, эти функции аналитичны и по основному аргументу y при $y \neq 0$). Как известно, функция, аналитическая по двум переменным порознь, аналитична и по совокупности этих переменных. Поэтому, учитывая формулу (1.4) и включение $f_0(x) \in \mathbb{C}^n(a, b)$, немедленно получаем, что $f(z) \in \mathbb{C}^1(G)$ как функция

двух переменных x и y . Следовательно, $f(z)$ дифференцируема в области G в смысле $\mathbb{R}_{x,y}^2$, что нам и требовалось.

Обратимся к условиям Коши–Римана. Для этого положим $w(z) = \partial_{\bar{z}} f(z)$, где, как обычно,

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

и покажем, что $w(z) \equiv 0$ в области G .

Действительно, так как $a_k(z)$ и $f(z)$ аналитичны в области G , т.е. $\partial_{\bar{z}} a_k(z) \equiv 0$, то

$$\partial_{\bar{z}} L(f) \equiv L(\partial_{\bar{z}} f)$$

и, следовательно, в силу аналитичности $h(z)$ из уравнения (1.2) получаем, что

$$L(w) = 0, \quad y \in (c, d),$$

при этом, повторяем, $x \in (a, b)$ – параметр. Далее, учитывая (1.3) и тот факт, что $f(z)$ является решением уравнения (1.0), немедленно находим, что

$$w(z)|_{y=0} = 0, \dots, w^{(n-1)}(z)|_{y=0} = 0.$$

Таким образом, $w(z) \equiv 0$, что вместе с предыдущим и доказывает аналитичность $f(z)$ в области G . Теорема доказана.

В качестве следствий отсюда вытекают следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1.2. *Всякое решение $f_0(x)$ уравнения (1.0), определенное на каком-либо интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$, аналитически продолжается как решение уравнения (1.1) всюду, куда продолжаются коэффициенты и правая часть этого уравнения.*

Для доказательства достаточно заметить, что в предыдущих рассуждениях x и y можно поменять ролями.

ТЕОРЕМА 1.3. *Всякое решение уравнения (1.1), определенное в некоторой подобласти $G_0 \subset G$, аналитически продолжается в полную область G .*

Этот результат известен (см., например, [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ (о единственности). Как уже отмечалось, единственность найденного продолжения $f(z)$ вытекает из известных теорем о единственности аналитических функций. В нашем случае, однако, легко установить единственность, минуя ссылки на эти теоремы, что мы и сделаем с целью замкнутости изложения.

Достаточно, очевидно, доказать, что при $f_0(x) \equiv 0$ и $h(x) \equiv 0$ единственным продолжением является функция $f(z) \equiv 0$.

Действительно, пусть $f_{01}(x), \dots, f_{0n}(x)$, $x \in (a, b)$, – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$f_0^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) f_0^{(k)}(x) = 0.$$

$$(1.5) \quad f^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) f^{(k)}(z) = 0$$
$$f(z) \equiv c_1 f_1(z) + \cdots + c_n f_n(z), \quad z \in G,$$
$$0 \equiv c_1 f_{01}(x) + \cdots + c_n f_{0n}(x), \quad x \in (a, b).$$

§ 2. Принцип конформной эквивалентности многоточечных задач

Пусть $z_1, \dots, z_m$ — некоторые точки области $G \subset \mathbb{C}_z^1$. Рассмотрим задачу о нахождении аналитического в области G решения следующей многоточечной задачи:

$$(2.1) \quad f^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) f_0^{(k)}(z) = h(z),$$

[illegible]

Основная теорема 1.2 позволяет высказать принцип конформной эквивалентности задач (2.1), (2.2) аналогичным вещественным задачам на интервале (a, b) . Вначале будет доказана

- 1) $w'(z) \neq 0$, $z \in G_0$;
- 2) образ $W_0 = \text{Im } G_0$ при отображении $w = w(z)$ содержит некоторый отрезок $[a, b]$ вещественной оси комплексной плоскости $w = u + iv$;
- 3) точки $w(z_1) = u_1, \dots, w(z_m) = u_m$ принадлежат интервалу (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через точки $z_1, \dots, z_m$ проведем в области G простую аналитическую кривую $\Gamma = \{z = z(u), a \leq u \leq b\}$ такую, что $z'(u) \neq 0$, $a < u < b$ (существование такой кривой будет установлено ниже). Поскольку $z(u)$ – аналитическая функция на отрезке $[a, b]$, то на комплексной плоскости $w = u + iv$ существует некоторая окрестность W_0 этого отрезка, на которую она продолжается как аналитическая функция $z = z(w)$, причем $z'(w) \neq 0$, $w \in W_0$. Следовательно, при отображении $z = z(w)$ образ окрестности W_0 дает некоторую односвязную окрестность G_0 кривой Γ . Это и есть искомая подобласть области G . Ясно, что обратная функция $w = w(z)$ и определяет требуемое в лемме отображение.

Нам остается установить существование аналитической кривой Γ , содержащейся в области G и проходящей через точки $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_m = x_m + iy_m$.

Удобно для этого, не ограничивая общности, считать область G квадратом $\{-1 < x < 1, -1 < y < 1\}$, при этом $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1$.

Очевидно, существует полином $P(x)$, график которого при $|x| < 1$ лежит в рассматриваемом квадрате и который принимает приближенно в точках x_j ($1 \leq j \leq m$) значение y_j с любой наперед заданной точностью. Обозначим $\varepsilon_j = y_j - P(x_j)$ и положим

$$L(x) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j l_j(x),$$

где

$$l_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

(интерполяционный полином Лагранжа). Ясно, что график многочлена

$$Q(x) = P(x) + L(x), \quad |x| < 1,$$

приходит через точки $z_1, \dots, z_m$ и при малых ε_j остается также внутри квадрата.

Следовательно, функция $z(u) \equiv u + iQ(u)$, $-1 < u < 1$, и есть искомая функция, определяющая аналитическую кривую Γ .

Лемма доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что в частном случае $G = G_z^1$, когда нет надобности контролировать график Γ , ответ дает график функции $z(u) = v + iL(u)$, где

$$L(u) = \sum_{j=1}^m y_j l_j(u)$$

есть интерполяционный полином Лагранжа.

Вернемся к рассмотрению многоточечной задачи (2.1), (2.2), предполагая, что коэффициенты $a_k(z)$ и правая часть $h(z)$ аналитичны в области G .

В соответствии с доказанной леммой существуют односвязная подобласть G_0 , содержащая точки $z_1, \dots, z_m$, и невырожденное конформное преобразование, которое

[illegible]

Более того, в силу теоремы 1.2 аналитическая многоточечная задача (2.3), (2.4) с данными на интервале (a, b) эквивалентна обычной вещественной многоточечной задаче с аналитическими коэффициентами $b_k(x)$ и правой частью $k(x)$ в пространстве $\mathbb{C}^n(a, b)$:

$$(2.6) \quad \begin{cases} g(x_1) = g_{01}, & g'(x_1) = g_{11}, \quad \dots, \quad g^{(l_1-1)}(x_1) = g_{l_1-1,1}, \\ \dots\dots\dots \\ g(x_m) = g_{0m}, & g'(x_m) = g_{1m}, \quad \dots, \quad g^{(l_m-1)}(x_m) = g_{l_m-1,m}. \end{cases}$$

Остается заметить, что, поскольку всякое аналитическое в подобласти G_0 решение уравнения (2.1) продолжается в исходную область G (теорема 1.3), отмеченное взаимно однозначное соответствие имеет место и между решениями первоначальной задачи (2.1), (2.2) и решениями вещественной задачи (2.5), (2.6).

ПРИНЦИП КОНФОРМНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. *Совокупность всевозможных комплексно-аналитических многоточечных задач вида (2.1), (2.2) конформно эквивалентна совокупности всех вещественно-аналитических задач вида (2.5), (2.6).*

Итак, ввиду принципа конформной эквивалентности изучение аналитических многоточечных задач в комплексной области всегда может быть сведено к изучению вещественно-аналитических задач на интервале. Тем самым известные результаты по вещественно-аналитической теории многоточечных задач переносятся и на комплексно-аналитическую теорию. Это касается, прежде всего, таких вопросов, как корректность поставленных задач, теория спектра, фредгольмовость и др. Какими свойствами по этим вопросам обладает вещественная задача, точно такими же свойствами обладает и комплексная задача.

2.3. Случай “краевых” условий на прямой.

Особенно просто выглядит принцип конформной эквивалентности многоточечных задач при расположении точек $z_1, \dots, z_m$ на одной прямой, которую без ущерба общности можно считать вещественной осью. В этом случае комплексная многоточечная задача является просто аналитическим продолжением вещественной задачи, и наоборот, сужение комплексной задачи есть вещественная задача.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим двуточечную задачу

$$(2.7) \quad -\frac{d}{dz} \left(a(z) \frac{df}{dz} \right) + q(z)f = h(z), \quad z \in G,$$

$$(2.8) \quad f(a) = 0, \quad f(b) = 0.$$

Известно, что соответствующая вещественная задача

$$(2.9) \quad -\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{df}{dx} \right) + q(x)f = h(x), \quad x \in (a, b),$$

$$(2.10) \quad f(a) = 0, \quad f(b) = 0,$$

фредгольмова, спектр ее дискретен. В частности, при $\operatorname{Re} a(x) \geq a_0 > 0$, $\operatorname{Re} q(x) \geq q_0 > 0$ задача (2.9), (2.10) однозначно разрешима при любой правой части.

Следовательно, всеми этими свойствами обладает и комплексная задача (2.7), (2.8), причем соответствующие решения получаются из решений задачи (2.9), (2.10) аналитическим продолжением.

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим комплексную задачу Валле-Пуссена

$$f^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) f^{(k)}(z) = h(z), \quad z \in G,$$

$$f(x_1) = f_1, \dots, f(x_n) = f_n,$$

где $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ — фиксированные точки на некотором интервале (a, b) .

Как известно (см., например, [12], [1, с. 573]), вещественная задача Валле-Пуссена

$$f^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) f^{(k)}(x) = h(x), \quad x \in (a, b),$$

$$f(x_1) = f_1, \dots, f(x_n) = f_n,$$

корректна, если выполнено условие

$$(2.11) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sup |a_{n-k}(x)| \frac{(b-a)^k}{k!} < 1.$$

Следовательно, условие (2.11) достаточно и для корректности комплексной задачи Валле-Пуссена.

§ 3. Аналитическая нелинейная периодическая задача

3.1. Необходимые пространства. Основное ортогональное разложение.

3.1.1. Определения. Пусть $f(z)$ – комплексная функция, определенная в полосе $y^- < \operatorname{Im} z < y^+$ (y^-, y^+ – произвольные числа), периодическая с периодом 2π . Пусть, далее, $G = \{x \in (-\pi, \pi), y \in (y^-, y^+)\}$ – основной прямоугольник периодичности.

Обозначим через $L_2 \equiv L_2(G)$ гильбертово пространство указанных функций, суммируемых с квадратом, т.е.

$$L_2 = \left\{ f(z) : f(z + 2\pi) \equiv f(z) \text{ \& } \|f(z)\| \equiv \iint_G |f(z)|^2 dx dy < \infty \right\};$$

скалярное произведение в L_2 вводится стандартно, т.е. $\langle f, g \rangle_{L_2} \equiv \iint_G f(z) \bar{g}(z) dx dy$.

Далее обозначим через $\mathcal{O}_2$ подпространство пространства L_2 , состоящее из аналитических периодических функций $f(z)$, суммируемых с квадратом в области G , т.е.

$$\mathcal{O}_2 = \{f(z) : f(z) \in L_2 \text{ \& } \partial_{\bar{z}} f(z) \equiv 0\},$$

где, как обычно, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$.

Наша ближайшая цель – описать пространство $\mathcal{O}_2$ и его ортогональное дополнение $\mathcal{O}_2^\perp$, что необходимо в дальнейшем для постановки нелинейной периодической задачи в пространствах аналитических функций.

3.1.2. Базисность системы экспонент. Прежде всего, отметим, что при любых y^- и y^+ функции $\exp inz$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) образуют ортогональную систему в $\mathcal{O}_2$. Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 3.1 (ср. [3, с. 324]). Система функций e^{inz} , $n = 0, \pm 1, \dots$, образует в $\mathcal{O}_2$ базис Фурье, т.е. любая функция $f(z) \in \mathcal{O}_2$ представляется рядом

$$(3.1) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inz}.$$

При этом коэффициенты C_n могут быть вычислены по одной из формул:

$$(3.2) \quad C_n = \frac{n}{\pi(e^{-2ny^-} - e^{-2ny^+})} \iint_G f(z) e^{-in\bar{z}} dx dy \quad (n \neq 0),$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi(y^+ - y^-)} \iint_G f(z) dx dy,$$

или

$$(3.3) \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + i0) e^{-inx} dx$$

(для удобства считаем, что $y^- < 0 < y^+$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как при любом фиксированном $y \in (y^-, y^+)$, очевидно, $f(x + iy) \in L_2(-\pi, \pi)$, то

$$(3.4) \quad f(x + iy) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(y) e^{inx},$$

где

$$C_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + iy) e^{-inx} dx.$$

Используя интегральную теорему Коши и условие периодичности, имеем

$$\begin{aligned} C_n(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + iy) e^{-in(x+iy)} dx e^{-ny} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + i0) e^{-inx} dx e^{-ny} = C_n(0) e^{-ny} \equiv C_n e^{-ny}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд (3.4) принимает вид искомого ряда Фурье (3.1) в $\mathcal{O}_2$, при этом коэффициенты Фурье вычисляются по формулам (3.3). Ясно (равенство Парсеваля и теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла), что ряд (3.4) сходится к $f(z)$ в смысле $L_2(G)$.

Остается заметить, что в силу теоремы Коши

$$\begin{aligned} \langle f(z), e^{inz} \rangle_G &\equiv \iint_G f(x + iy) e^{-in\bar{z}} dx dy \\ &= \int_{y^-}^{y^+} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x + iy) e^{-in(x+iy)} dx \right) e^{-2ny} dy \\ &= 2\pi C_n(0) \int_{y^-}^{y^+} e^{-2ny} dy = C_n \frac{\pi}{n} (e^{-2ny^-} - e^{-2ny^+}), \end{aligned}$$

что и дает формулы (3.2). Теорема доказана.

В рамках обсуждения доказанной теоремы сделаем несколько замечаний.

Во-первых, отметим, что если область G симметрична относительно начала координат, т.е. $y^+ = -y^- = y_0 > 0$, то, как и в случае вещественных рядов Фурье, нечетные функции разлагаются в ряд по системе $\sin nz$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а четные – по системе $\cos nz$, $n = 0, 1, 2, \dots$, при этом

$$C_n = \frac{n}{\pi \operatorname{sh} 2ny_0} \left\langle f(z), \frac{\sin nz}{\cos nz} \right\rangle_G.$$

Во-вторых, если область G является полуполосой, т.е. либо $y^- = -\infty$, либо $y^+ = +\infty$, то соответствующие ряды Фурье определяются только частью экспонент. Именно, в первом случае базис образует система $\exp inz$ при $n > 0$, а во втором случае – при $n < 0$.

Наконец, отметим, что случай полосы, т.е. случай, когда одновременно $y^- = -\infty$, а $y^+ = +\infty$, бессодержателен, ибо в этом случае, как можно показать, пространство $\mathcal{O}_2$ тривиально, т.е. состоит из одного нуля.

3.1.3. Формула $\mathcal{O}_2^\perp = \partial_z \overset{\circ}{W}_2^{1,1}$. Обратимся к подпространству $\mathcal{O}_2$. Для этой цели будем использовать пространства Соболева функций $r(z): G \rightarrow \mathbb{C}^1$, рассматриваемых как комплекснозначные функции вещественных переменных $x \in \mathbb{R}^1$ и $y \in (y^-, y^+)$, периодические по x с периодом 2π . Именно, положим

$$W_2^{1,1} = \{r(z) : \|r(z)\|_1 \equiv \|r(z)\|_0 + \|r'_x(z)\|_0 + \|r'_y(z)\|_0 < \infty, r(z+2\pi) = r(z)\},$$

где, напомним, $\|\cdot\|_0$ – норма в L_2 .

Наконец, примем

$$\overset{\circ}{W}_2^{1,1} = \{r(z) : r(z) \in W_2^{1,1}, r(x+iy^+) = 0, r(x+iy^-) = 0\}.$$

ТЕОРЕМА 3.2. *Имеет место формула*

$$\mathcal{O}_2^\perp = \partial_z \overset{\circ}{W}_2^{1,1},$$

где $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$. Более точно, $q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp$ тогда и только тогда, когда существует (единственная) функция $r(z) \in \overset{\circ}{W}_2^{1,1}$ такая, что

$$q(z) = \partial_z r(z), \quad z \in G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp$, т.е. $q(z) \in L_2$ и при этом

$$(3.5) \quad \langle q(z), e^{inz} \rangle_G = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Нетрудно проверить, что если $q(z)$ представить в виде ряда Фурье

$$q(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(y) e^{inx},$$

то условия (3.5) эквивалентны условиям

$$(3.6) \quad \int_{y^-}^{y^+} q_n(y) e^{-ny} dy = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Для нахождения функции $r(z)$, указанной в теореме, рассмотрим краевую задачу (вообще говоря, переопределенную):

$$(3.7) \quad \partial_z r(z) = q(z),$$

$$(3.8) \quad r(x+2\pi+iy) = r(x+iy), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad y \in (y^-, y^+),$$

$$(3.9) \quad r(x+iy^-) = 0, \quad r(x+iy^+) = 0$$

и будем искать ее решение в виде

$$r(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n(y) e^{inx}.$$

Ясно, что проекции $r_n(y)$ являются решениями краевых задач

$$(3.7^n) \quad r'_n(y) - nr_n(y) = 2iq_n(y), \quad y \in (y^-, y^+),$$

$$(3.9^n) \quad r_n(y^-) = 0, \quad r_n(y^+) = 0.$$

Решение задачи (3.7ⁿ), (3.9ⁿ) задается формулой

$$r_n(y) = 2i \int_{y^-}^y q_n(\eta) e^{-n\eta} d\eta e^{ny}$$

(отметим, что $r_n(y^+) = 0$ в силу условия (3.6)). Остается получить оценку, показывающую, что $r(z) \in W_2^{1,1}(G)$.

Имеем ($n \neq 0$):

$$\begin{aligned} \|r_n(y)\|_{L_2(y^-, y^+)}^2 &= 4 \int_{y^-}^{y^+} \left| \int_{y^-}^y q_n(\eta) e^{-n\eta} d\eta \right|^2 e^{2ny} dy \\ &= \frac{2}{n} \int_{y^-}^{y^+} \left| \int_{y^-}^y q_n(\eta) e^{-n\eta} d\eta \right|^2 \frac{d}{dy} e^{2ny} dy \\ &\leq \frac{4}{n} \int_{y^-}^{y^+} \left| \int_{y^-}^{y^+} q_n(\eta) e^{-n\eta} d\eta \right| e^{ny} |q_n(y)| dy \\ &\equiv \frac{2}{n} \int_{y^-}^{y^+} |r_n(y)| \cdot |q_n(y)| dy \\ &\leq \frac{2}{n} \|r_n(y)\|_{L_2(y^-, y^+)} \cdot \|q_n(y)\|_{L_2(y^-, y^+)}, \end{aligned}$$

откуда немедленно заключаем, что

$$\|r_n(y)\|_{L_2(y^-, y^+)} \leq \frac{2}{n} \|q_n(y)\|_{L_2(y^-, y^+)}.$$

Используя теперь равенство Парсеваля и уравнение (3.7ⁿ), получаем, что $r(z) \in W_2^{1,1}$, причем

$$\|r(z)\|_{W_2^{1,1}(G)} \leq M \|q(z)\|_{L_2(G)},$$

где $M > 0$ — постоянная.

Итак, представление функции $q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp$ в виде $q(z) = \partial_z r(z)$ получено.

Обратно, пусть функция $q(z) \in L_2$ имеет вид $q(z) = \partial_z r(z)$, где $r(z) \in \mathring{W}_2^{1,1}$. Тогда, интегрируя по частям, находим

$$\langle q(z), \exp inz \rangle_G = \langle \partial_z r(z), \exp inz \rangle_G = -\langle r(z), \partial_{\bar{z}} \exp inz \rangle_G = 0,$$

т.е. $q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Теорема 3.2 справедлива и для случая полосы $G = \{-\pi < x < \pi, y^- < y < +\infty\}$, при этом в условиях (3.9) сохраняется только условие $r(z + iy^-) = 0$. Доказательство проводится по той же схеме, но дополнительно надо заметить, что $r_n(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$. Именно, в силу условий (3.6) (при $y^+ \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} |r_n(y)| &\equiv \left| 2e^{ny} \int_y^\infty q_n(\eta) e^{-n\eta} d\eta \right| \leq 2e^{ny} \left(\int_y^\infty |q_n(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \left(\int_y^\infty e^{-2n\eta} d\eta \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\int_y^\infty |q_n(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $y \rightarrow +\infty$, ибо $q_n(y) \in L_2(y^-, +\infty)$.

Аналогично рассматривается и случай $(-\infty, y_+)$.

Вывод. Итак, всякая функция $f(z) \in L_2$ представляется в виде ортогональной суммы аналитической и, скажем, коаналитической составляющих. Именно, $f(z) = f_a(z) + f_{ca}$, где $f_a(z) \in \mathcal{O}_2$, т.е. $\partial_{\bar{z}} f_a(z) \equiv 0$, а коаналитическая составляющая $f_{ca}(z)$ имеет вид $f_{ca}(z) = \partial_z r(z)$, где $r(z) \in \mathring{W}_2^{1,1}$ (функцию $r(z)$ естественно назвать коаналитическим потенциалом). Коль скоро известна аналитическая часть $f_a(z)$ (и тем самым коаналитическая часть $f_{ca}(z)$), то потенциал $r(z)$ определяется теоремой 3.2. Что же касается аналитической части $f_a(z)$, то в соответствии с теоремой 3.1

$$f_a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp inz,$$

где

$$C_n = \frac{n}{\pi(e^{-2ny_-} - e^{-2ny_+})} \langle f(z), \exp inz \rangle_G.$$

Все сказанное и составляет содержание разложения

$$L_2 = \mathcal{O}_2 + \partial_z \mathring{W}_2^{1,1}.$$

В заключение пункта укажем интегральное представление решения задачи (3.7)–(3.9). Используя (3.6), находим

$$\begin{aligned} r(z) &= 2i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y^-}^y q_n(\eta) e^{-n\eta} d\eta \right) e^{ny} e^{inx} \\ &= 2i \sum_{n=-\infty}^0 \int_{y^-}^y q_n(\eta) e^{n(y-\eta)} d\eta e^{inx} - 2i \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y^-}^{y^+} q_n(\eta) e^{n(y-\eta)} d\eta e^{inx}. \end{aligned}$$

Такое представление дает возможность суммирования под знаком интеграла. Имено,

$$\begin{aligned}
 r(z) &= \frac{i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^0 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{y^-}^y q(\xi + i\eta) e^{n(y-\eta) + in(x-\xi)} d\xi d\eta \\
 &\quad - \frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_y^{y^+} q(\xi + i\eta) e^{n(y-\eta) + in(x-\xi)} d\xi d\eta \\
 &= \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{y^-}^y \frac{e^{y-\eta+i(x-\xi)}}{e^{y-\eta+i(x-\xi)} - 1} q(\xi + i\eta) d\xi dy \\
 &\quad + \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_y^{y^+} \frac{e^{y-\eta+i(x-\xi)}}{e^{y-\eta+i(x-\xi)} - 1} q(\xi + i\eta) d\xi dy \\
 &= \frac{i}{\pi} \iint_G \frac{q(\xi + i\eta) e^{y-\eta+i(x-\xi)}}{e^{y-\eta+i(x-\xi)} - 1} d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи

$$\partial_z r(z) = q(z), \quad r(z + 2\pi) = r(z), \quad r(x + iy^+) = r(x + iy^-) = 0$$

имеет вид

$$r(z) = q(z) * \frac{1}{\pi i} \frac{e^{i\bar{z}}}{e^{i\bar{z}} - 1}.$$

Поскольку $q(z)$ ортогональна единице, решение $r(z)$ можно записать также в виде

$$r(z) = q(z) * \frac{1}{\pi i} \frac{1}{e^{i\bar{z}} - 1}.$$

3.1.4. Шкала соболевских пространств функций и функционалов. Пусть $\mathcal{O}_2^m$ ($m \geq 1$ – целое) есть пространство Соболева аналитических функций, т.е.

$$\mathcal{O}_2^m = \{f(z) : f(z) \in \mathcal{O}_2, \dots, f^{(m)}(z) \in \mathcal{O}_2\},$$

со скалярным произведением

$$(f, g)_m = \sum \langle f^{(k)}(z), g^{(k)}(z) \rangle_G.$$

Ясно, что система $\exp inz$, $n = 0, \pm 1, \dots$, образует в $\mathcal{O}_2^m$ ортогональный базис.

Далее, пусть $\mathcal{O}_2^{-m} = (\mathcal{O}_2^m)^*$ – сопряженное пространство. Очевидно,

$$(3.10) \quad \mathcal{O}_2^m \subset \dots \subset \mathcal{O}_2^1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_2^{-1} \subset \dots \subset \mathcal{O}_2^{-m} \subset \dots,$$

причем, как нетрудно видеть, оператор

$$\Lambda_{2m} \equiv \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{d^{2k}}{dz^{2k}}$$

является дуальным оператором пары $(\mathcal{O}_2^{+m}, \mathcal{O}_2^{-m})$, т.е. отображение

$$\Lambda_{2m}: \mathcal{O}_2^m \rightarrow \mathcal{O}_2^{-m}$$

есть изоморфизм, удовлетворяющий равенству

$$\langle \Lambda_{2m} f, f \rangle = (f, f)_m = \|f\|_m^2,$$

где $f(z) \in \mathcal{O}_2^m$ – произвольная функция.

Отсюда следует, что нормы в $\mathcal{O}_2^{-m}$ определяются скалярным произведением

$$(f, g)_{-m} \equiv (\Lambda_{2m}^{-1} f, \Lambda_{2m}^{-1} g)_m,$$

а система экспонент и в пространствах $\mathcal{O}_2^{-m}$ также образует ортогональный базис.

Таким образом, вся шкала пространств (3.10) обладает единым базисом Фурье $\exp inz$, $n = 0, \pm 1, \dots$. Отсюда, в частности, следует, что все вложения в цепочке (3.10) являются плотными.

Далее, с цепочкой пространств аналитических функций (3.10) свяжем “объемлющую” ее цепочку анизотропных соболевских пространств

$$(3.11) \quad W_2^{+m,0} \subset \dots \subset W_2^{+1,0} \subset L_2 \subset W_2^{-1,0} \subset \dots \subset W_2^{-m,0} \subset \dots,$$

где

$$W_2^{m,0} = \left\{ q(z) : q(z) \in L_2, \frac{\partial q}{\partial x}(z) \in L_2, \dots, \frac{\partial^m q}{\partial x^m} \in L_2 \right\}.$$

Очевидно, $\mathcal{O}_2^m \subset W_2^{m,0}$, причем $\mathcal{O}_2^m$ является замкнутым подпространством в пространстве $W_2^{m,0}$, более того,

$$(3.12) \quad W_2^{m,0} = \mathcal{O}_2^m + \partial_z(\nabla^{-1} W_2^{m,0}),$$

где

$$\nabla^{-1} W_2^{m,0} = \{ r(z) : \nabla r(z) \in W_2^{m,0}, r(x + iy^\pm) = 0 \}.$$

Формула (3.12) означает, что всякая функция $f(z) \in W_2^{m,0}$ может быть представлена в виде

$$(3.13) \quad f(z) = f_a(z) + \partial_z r(z),$$

где $f_a(z) \in \mathcal{O}_2^m$ есть аналитическая часть, а $r(z) \in \nabla^{-1} W_2^{m,0}$ – коаналитический потенциал.

Указанное представление есть следствие теоремы 3.2 и очевидной возможности дифференцировать по x уравнение $\partial_z r(z) = q(z)$, оставаясь в рамках периодических функций.

Далее, дуальным оператором пары $W^{m,0}, W^{-m,0}$ является оператор

$$\tilde{\Lambda}_{2m} \equiv \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},$$

являющийся, очевидно, расширением оператора Λ_{2m} . Отсюда следует, что всякий функционал $h(z) \in W_2^{-m,0}$ представляется в виде $h(z) = \tilde{\Lambda}_{2m}f(z)$, где $f(z) \in W_2^{m,0}$ – некоторая функция. Следовательно, в соответствии с формулой (3.13)

$$h(z) = \tilde{\Lambda}_{2m}f_a(z) + \tilde{\Lambda}_{2m}(\partial_z r(z)) = \Lambda_{2m}f_a(z) + \partial_z \tilde{\Lambda}_{2m}r(z) \equiv h_a(z) + h_{ca}(z),$$

где аналитическая часть $h_a(z)$ есть сужение $h(z)$ на $\mathcal{O}_2^m$, равное нулю на ортогональном дополнении, а коаналитическая часть $h_{ca}(z)$, напротив, есть сужение $h(z)$ на ортогональное дополнение, равное нулю на $\mathcal{O}_2^m$. При этом коаналитическая часть функционала может быть записана в виде $h_{ca}(z) = \partial_z \tilde{r}(z)$, где

$$\tilde{r}(z) \in \nabla^{-1}W^{-m,0} = \{\tilde{r}(z) : \nabla \tilde{r}(z) \in W_2^{-m,0}, \tilde{r}(x \pm iy^\pm) = 0\}.$$

В заключение отметим, что сказанное в этом пункте можно эквивалентно сформулировать в виде теоремы, обобщающей основную теорему 3.2.

ТЕОРЕМА 3.3. *Для любой функции (функционала) $q(z) \in W_2^{s,0}$, $s = 0, \pm 1, \dots$, удовлетворяющей условиям ортогональности*

$$\langle q(z), \exp inz \rangle = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

задача

$$\partial_z r(z) = q(z), \quad r(z + 2\pi) = r(z), \quad r(x \pm iy^\pm) = 0$$

имеет единственное решение $r(z) \in \nabla^{-1}W_2^{s,0}$.

Тем самым для любых $s = 0, \pm 1, \dots$

$$W_2^{s,0} = \mathcal{O}_2^s \dot{+} \partial_z(\nabla^{-1}W_2^{s,0}).$$

3.2. Уравнение Эйлера квадратичного функционала. Нелинейная периодическая задача.

3.2.1. Основная “наводящая” модель. Для того чтобы естественно прийти к аналитической постановке нелинейной периодической задачи, рассмотрим вопрос о минимуме аналитического функционала. Именно, в пространстве $\mathcal{O}_2^1$ будем минимизировать функционал

$$J(f) \equiv \operatorname{Re} \iint_G \left[\frac{1}{2}a(z, |f'(z)|^2) + \frac{1}{2}b(z, |f(z)|^2) - h(z)\bar{f}(z) \right] dx dy,$$

где $h(z) \in L_2$ – некоторая функция, а периодические по z функции $a(z, s)$, $b(z, s)$ ($z \in G$, $s \geq 0$) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} a_0 s - k_0 &\leq \operatorname{Re} a(z, s) \leq A_0 s + K_0, \\ b_0 s - m_0 &\leq \operatorname{Re} b(z, s) \leq B_0 s + M_0, \end{aligned}$$

($0 < a_0 < A_0 < \infty$, $0 < b_0 < B_0 < \infty$, k_0, K_0, m_0, M_0 – некоторые постоянные) и имеют ограниченные производные по s . (Очевидно, при этих условиях функционал $J(f)$

определен на всем пространстве $\mathcal{O}_2^1$ и полуограничен снизу.) Как известно, в точке минимума вариация функционала

$$\delta J(f)\varphi(z) \equiv \operatorname{Re} \iint_G [a'_s(z, |f'(z)|^2) f'(z) \overline{\varphi'(z)} + b'_s(z, |f(z)|^2) f(z) \overline{\varphi(z)} - h(z) \varphi(z)] dx dy = 0$$

для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}_2^1$.

Допустим, что $\mathcal{D}_x a'(z, |f'(z)|^2) f'(z) \in L_2$. Тогда, учитывая аналитичность $\varphi(z)$ и интегрируя по частям в первом слагаемом, получаем тождество

$$\operatorname{Re} \iint_G [-\mathcal{D}_x(a'(z, |f'(z)|^2) f'(z)) + b'(z, |f'(z)|^2) f(z) - h(z)] \overline{\varphi(z)} dx dy = 0,$$

которое справедливо не только для $\varphi(z) \in \mathcal{O}_2^1$, но и для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}_2$, ибо, как было ранее отмечено, вложение $\mathcal{O}_2^1 \subset \mathcal{O}_2$ всюду плотно.

Следовательно, в соответствии с основной теоремой предыдущего параграфа (теорема 3.2) существует функция $r(z) \in \overset{\circ}{W}_2^{1,1}$ такая, что

$$(3.14) \quad -\mathcal{D}_x(a'(z, |f'(z)|^2) f'(z)) + b'(z, |f(z)|^2) f(z) + \partial_z r(z) = h(z),$$

где равенство понимается в смысле L_2 .

Это и есть уравнение Эйлера для функционала $J(f)$.

Из сказанного видно, что уравнение Эйлера, понимаемое в классическом смысле (равно, впрочем, как и в смысле теории обобщенных функций вещественных переменных), содержит в качестве неизвестных величин две функции $f(z)$ и $r(z)$, первая из которых дает решение исходной задачи минимизации в $\mathcal{O}_2^1$, а вторая является потенциалом коаналитической “невязки” в уравнении Эйлера (3.14)². Ясно, что если $a'_s(z, |f'(z)|^2) f'(z)$ и $b'_s(z, |f(z)|^2) f(z)$ суть только измеримые ограниченные функции, то уравнение (3.14) для $f(z) \in \mathcal{O}_2^1$ и $r(z) \in \nabla^{-1} W_2^{-1,0} = \overset{\circ}{W}_2^{0,1}$ понимается в смысле функционалов над $\overset{\circ}{W}_2^{1,0}$.

Итак, мы можем сказать, что необходимое условие экстремума

$$\delta J(f)\varphi(z) = 0, \quad \varphi(z) \in \mathcal{O}_2^1,$$

эквивалентно либо дифференциальному уравнению

$$L(f) \equiv -\mathcal{D}_x[a'_s(z, |f'(z)|^2) f'(z)] + b'_s(z, |f(z)|^2) f(z) = h(z),$$

понимаемому в смысле аналитических функционалов над $\mathcal{O}_2^1$, либо дифференциальному уравнению

$$L(f) + \partial_z r(z) = h(z),$$

понимаемому в смысле обобщенных функций над $\overset{\circ}{W}_2^{1,0}$. Особо отметим линейный случай $a(z, s) \equiv a(z)s$, $b(z, s) \equiv b(z)s$, где $a(z)$ и $b(z)$ – ограниченные аналитические функции в G . В этом случае $r(z) \equiv 0$ и уравнение Эйлера принимает вид

$$-(a(z)f'(z))' + b(z)f(z) = h(z).$$

²Читатель, несомненно, заметил идейную параллель с системой уравнений Навье–Стокса, содержащей потенциальную невязку $\operatorname{grad} p(x)$.

Его, очевидно, можно решать не только в классе аналитических функционалов $\mathcal{O}_2^{-1}$, но и в основном пространстве аналитических функций $\mathcal{O}_2^1$.

3.2.2. Разрешимость нелинейной периодической задачи. Обобщая модельный пример предыдущего пункта, рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$(3.15) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k \mathcal{D}_x^k A_k(z, f, \dots, f^{(m)}) + \partial_z r(z) = h(z), \quad z \in G,$$

при условиях

$$(3.16) \quad f(z + 2\pi) = f(z),$$

$$(3.17) \quad r(x + iy^-) = 0, \quad r(x + iy^+) = 0.$$

Неизвестными функциями здесь являются аналитическая функция $f(z)$ и коаналитический потенциал $r(z)$.

Допустим, что выполнены следующие условия:

I. Функции $A_k(z, \zeta_0, \dots, \zeta_m)$, $k = 0, 1, \dots, m$, непрерывны по $z \in G$ и $\zeta_0 \in \mathbb{C}^1, \dots, \zeta_m \in \mathbb{C}^1$ и удовлетворяют неравенствам

$$|A_k(z, \zeta_0, \dots, \zeta_m)| \leq M \left(\sum_{l=0}^m |\zeta_l| + 1 \right),$$

где $M > 0$ – постоянная.

II. Условие коэрцитивности. Для любых $z \in G$, $\zeta_0 \in \mathbb{C}^1, \dots, \zeta_m \in \mathbb{C}^1$

$$\operatorname{Re} \sum_{k=0}^m A_k(z, \zeta_0, \dots, \zeta_m) \bar{\zeta}_m \geq a_0 (|\zeta_0|^2 + |\zeta_m|^2) - K,$$

где $a_0 > 0$, $K > 0$ – постоянные.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть выполнены условия I, II. Тогда для любой правой части $h(z) \in W_2^{-m,0}$ существует по крайней мере одна пара функций $f(z) \in \mathcal{O}_2^m$, $r(z) \in \nabla^{-1}W_2^{-m,0}$, удовлетворяющая уравнению (3.15) над пространством $W_2^{m,0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала найдем функцию $f(z) \in \mathcal{O}_2^m$, удовлетворяющую уравнению (3.15) над пространством $\mathcal{O}_2^m$, т.е. такую функцию $f(z) \in \mathcal{O}_2^m$, что для любой основной функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}_2^m$ справедливо тождество

$$(3.18) \quad \sum_{k=0}^m \langle A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)), \varphi^{(k)}(z) \rangle_G = \langle h(z), \varphi(z) \rangle_G.$$

Решение этого интегрального тождества стандартно (метод компактности). Именно, приближенное решение $f_N(z)$, $N = 1, 2, \dots$, ищем в виде

$$f_N(z) = \sum_{|n| \leq N} C_n \exp inz,$$

при этом постоянные C_n определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$(3.18^n) \quad \sum_{k=0}^m \langle A_k(z, f_N(z), \dots, f_N^{(m)}(z)), (in)^k \exp inz \rangle_G = \langle h, \exp inz \rangle_G, \\ n = 0, \pm 1, \dots, \pm N.$$

Разрешимость системы (3.18ⁿ) обеспечивается условием коэрцитивности II и известной леммой об остром угле (см., например, [4]–[6]). Таким образом, приближенные решения $f_N(z)$ найдены.

Далее, в силу того же условия коэрцитивности для приближенных решений справедлива оценка

$$\|f_N(z)\|_m \leq M(\|h\|_{-m} + 1), \quad M > 0,$$

из которой вытекает, что существуют функция $f(z) \in \mathcal{O}_2^m$ и некоторая подпоследовательность приближенных решений (чтобы не менять обозначений, будем по-прежнему писать $f_N(z)$) такие, что $f_N(z) \rightarrow f(z)$ слабо в $\mathcal{O}_2^m$.

Поскольку функции $f_N(z)$ аналитичны в G , можно считать, что $f_N(z) \rightarrow f(z)$ равномерно на любом компакте, содержащемся в области G . Следовательно, переходя к пределу в (3.18ⁿ) при $N \rightarrow \infty$ (и любом фиксированном n) и учитывая, что система $\exp inz$, $n = 0, \pm 1, \dots$, образует базис в $\mathcal{O}_2^m$, получаем, что найденная функция $f(z)$ удовлетворяет тождеству (3.18), т.е. является искомым решением.

Остается заметить, что в соответствии с теоремой 3.3 определяется теперь и функция $r(z)$ как решение задачи

$$\partial_z r(z) = q(z), \quad r(z + 2\pi) = r(z), \quad r(x + iy^\pm) = 0,$$

где $q(z)$ есть коаналитическая составляющая разности

$$h(z) - \sum_{k=0}^m \mathcal{D}_x^k A_k(z, f, \dots, f^{(m)}).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ (о единственности). Если функции $A_k(z, \zeta_0, \dots, \zeta_m)$ таковы, что оператор

$$A(f) \equiv \sum_{k=0}^m (-1)^k \mathcal{D}_x^k A_k(z, f, \dots, f^{(m)})$$

является строго монотонным оператором из $\mathcal{O}_2^m$ в $\mathcal{O}_2^{-m}$, то решение $(f(z), r(z))$ единственно.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $a(s)$ и $b(s)$ ($s \geq 0$) – непрерывные вещественные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < a_0 \leq a(s) \leq A_0 < \infty, \quad 0 < b_0 \leq b(s) \leq B_0 < \infty.$$

Соответствующее уравнение

$$-\mathcal{D}_x(a(|f'(z)|^2)f'(z)) + b(|f(z)|^2)f(z) + \partial_z r(z) = h(z)$$

удовлетворяет условию II и, следовательно, данная периодическая задача разрешима.

ПРИМЕР 3.2. Периодическая задача для уравнения

$$(-1)^m \mathcal{D}_x^m ((1 + |z|^2) f^{(m)}(z)) + \partial_z r(z) = h(z)$$

имеет единственное решение $f(z) \in \mathcal{O}_2^m$, $r(z) \in \nabla^{-1} W_2^{-m,0}$.

Особо отметим линейный случай, в котором не возникает коаналитической невязки. Именно, рассмотрим задачу определения 2π -периодической аналитической функции $f(z)$, удовлетворяющей уравнению

$$(3.19) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k \mathcal{D}_z^k (a_k(z) \mathcal{D}_z^k f(z)) = h(z),$$

где $a_k(z)$ – аналитические ограниченные функции в области G , периодические с периодом 2π (ясно, что в этом случае $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_z$).

ТЕОРЕМА 3.5. Если для любых $\zeta_k \in \mathbb{C}^1$, $k = 0, \dots, m$,

$$\operatorname{Re} \sum_{k=0}^m a_k(z) \zeta_k \overline{\zeta_k} \geq a_0 (|\zeta_0|^2 + |\zeta_m|^2) - K,$$

где $a_0 > 0$, $K > 0$ – постоянные, то для любой $h(z) \in \mathcal{O}(G)$ и периодической с периодом 2π существует единственное 2π -периодическое решение $f(z) \in \mathcal{O}(G)$ уравнения (3.19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, всякая функция $h(z) \in \mathcal{O}(G)$ в любой подобласти $G_\varepsilon = \{-\pi < x < \pi, y^- + \varepsilon < y < y^+ - \varepsilon\}$ является, очевидно, ограниченной и, тем более, суммируемой с квадратом. Тем самым по теореме 3.4 в области G_ε существует единственное аналитическое 2π -периодическое решение $f_\varepsilon(z) \in \mathcal{O}_2^m(G_\varepsilon)$ уравнения (3.19). Ясно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательность $f_\varepsilon(z)$ определяет единственную функцию $f(z) \in \mathcal{O}(G)$, которая и есть искомое решение. Это и требовалось.

ПРИМЕР 3.3. Задача

$$-\frac{d}{dz} \left(a(z) \frac{df(z)}{dz} \right) + b(z) f(z) = h(z),$$

$$f(z + 2\pi) = f(z), \quad z \in \mathbb{C}^1,$$

имеет единственное решение, если $a(z)$ и $b(z)$ суть 2π -периодические аналитические функции, причем $\operatorname{Re} a(z) \geq a_0 > 0$, $\operatorname{Re} b(z) \geq b_0 > 0$, $z \in G$.

§ 4. Аналитическая нелинейная задача без краевых условий

4.1. Ортогональные разложения.

$$L_2 = \mathcal{O}_2 + \partial_z \overset{\circ}{W}_2^1, \quad \overline{L}_2 = \overline{\mathcal{O}}_2 + \partial_{\bar{z}} \overset{\circ}{W}_2^1,$$

$$L_2 = \mathcal{O}_2 + \overline{\mathcal{O}}_2 + \partial_z \partial_{\bar{z}} \overset{\circ}{W}_2^2.$$

4.1.1. Основная формула. Пусть $G \subset \mathbb{C}_z^1$ есть ограниченная область с границей Γ . Обозначим через $L_2 \equiv L_2(G)$ пространство Лебега функций $f(z): G \rightarrow \mathbb{C}^1$, суммируемых с квадратом, т.е.

$$L_2 = \left\{ f(z) : \|f(z)\|_0^2 \equiv \iint_G |f(z)|^2 dx dy < \infty \right\}.$$

Далее, пусть

$$\mathcal{O}_2 = \{f(z) : f(z) \in L_2 \text{ \& } \partial_{\bar{z}} f(z) \equiv 0\}, \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

есть пространство функций, аналитических в области G и суммируемых с квадратом в этой области. Очевидно, $\mathcal{O}_2 \subset L_2$ и является замкнутым подпространством.

Прежде чем описать ортогональное дополнение $\mathcal{O}_2^\perp$, сформулируем основное условие на область G . Для этого рассмотрим линейное подмножество $B \subset \mathcal{O}_2$ функций, аналитических в замыкании области G , т.е.

$$B = \{f(z) : \partial_{\bar{z}} f(z) \equiv 0, z \in \overline{G}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Назовем область G *допустимой*, если вложение $B \subset \mathcal{O}_2$ плотно.

Например, допустимой областью является круг $K_R = \{z : |z| < R < \infty\}$. Действительно, как нетрудно установить, в этом случае при любом $R > 0$ система функций $z^n, n = 0, 1, \dots$, образует в $\mathcal{O}_2$ базис Фурье, т.е. любая функция $f(z) \in \mathcal{O}_2$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

где

$$f_n = \frac{n+1}{\pi R^{n+1}} \iint_{K_R} f(z) \overline{z^n} dx dy.$$

Тем самым, очевидно, вложение $B \subset \mathcal{O}_2$ всюду плотно.

Ясно, что допустимой будет и любая область G , конформно (причем невырожденно) эквивалентная кругу K_R . Таковой будет, например, любая односвязная ограниченная область, граница которой удовлетворяет классическому условию Ляпунова. Это немедленно вытекает из известного уточнения Келлога основной теоремы теории конформных отображений (см., например, [7, гл. II, § 1, п. 29]).

Допустимой областью будет также любое кольцо

$$K_{r,R} = \{z \in \mathbb{C}^1 : r < |z| < R\}$$

(базис Фурье образует система $\{z^n\}, n = 0, \pm 1, \dots$), а также области, конформно эквивалентные кольцу.

Ниже, если не оговорено противное, область G считается допустимой.

ТЕОРЕМА 4.1. *Справедлива формула*

$$\mathcal{O}_2^\perp = \partial_z \mathring{W}_2^1, \quad \partial_z \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

где $\mathring{W}_2^1 \equiv \mathring{W}_2^1(G)$ – пространство Соболева функций, равных нулю на Γ . Это означает, что $q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp$ тогда и только тогда, когда найдется (единственная) функция $r(z) \in W_2^1$ такая, что

$$(4.1) \quad \partial_z r(z) = q(z), \quad r(z)|_\Gamma = 0.$$

При этом справедлива оценка

$$\|r(z)\|_0 + \|r_x(z)\|_0 + \|r_y(z)\|_0 \leq M \|q(z)\|_0,$$

где $M > 0$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность представления (4.1) очевидна. Действительно, пусть $\varphi(z) \in B$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle q(z), \varphi(z) \rangle_G &\equiv \iint_G q(z) \overline{\varphi(z)} dx dy = \iint_G \partial_z r(z) \overline{\varphi(z)} dx dy \\ &= - \iint_G r(z) \overline{\partial_{\bar{z}} \varphi(z)} dx dy = 0 \end{aligned}$$

(граничные значения при интегрировании по частям, очевидно, не возникают, ибо $r(z)|_\Gamma = 0$, а $\varphi(z)$ аналитична в $\overline{G}$). Поскольку область G допустима, т.е. вложение $B \subset \mathcal{O}_2$ плотно, то $\langle q(z), \varphi(z) \rangle_G = 0$ для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}_2$. Это и значит, что $q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp$.

Доказательство необходимости представления (4.1) проведем вначале для частного случая области G , а именно для круга K_R .

Пусть $q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp$, что эквивалентно тому, что

$$(4.2) \quad \langle q(z), z^n \rangle_{K_R} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Очевидно, искомая функция $r(z) \in \mathring{W}_2^1(K_R)$ должна быть решением эллиптической краевой задачи (переопределенной с точки зрения краевых условий)

$$(4.3) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) r(z) = q(z), \quad |z| < R,$$

$$(4.4) \quad r(z)|_{|z|=R} = 0.$$

Это решение в полярных координатах ρ, θ стандартно определяется методом Фурье. Именно, если

$$(4.5) \quad q(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(\rho) e^{in\theta},$$

то формально

$$(4.6) \quad r(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n(\rho) e^{in\theta},$$

где

$$r_n(\rho) = \begin{cases} 2 \int_0^\rho \eta^n q_{n-1}(\eta) d\eta \rho^{-n}, & n > 0; \\ -2 \int_\rho^R \eta^n q_{n-1}(\eta) d\eta \rho^{-n}, & n \leq 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что условия ортогональности (4.2) эквивалентны равенствам

$$\int_0^R \rho^n q_{n-1}(\rho) d\rho = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда немедленно следует, что $r_n(R) = 0$ для всех $n = 0, \pm 1, \dots$.

Таким образом, соответствующий ряд (4.6) является формальным решением задачи (4.3), (4.4).

Остается установить, что для любой функции $q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp$ ряд (4.6) действительно определяет решение $r(z) \in \mathring{W}_2^1$ этой задачи. С этой целью заметим, что если $r(z) \in \mathring{W}_2^1$ есть решение задачи (4.3), (4.4), то оно является и решением задачи Дирихле

$$\Delta r(z) = 4\partial_{\bar{z}} q(z), \quad r(z)|_{|z|=R} = 0.$$

Поэтому если $q(z) \in L_2$, то для $r(z) \in \mathring{W}_2^1$ справедлива известная L_2 -оценка

$$\|r(z)\|_0 + \|\nabla r(z)\|_0 \leq M \|q(z)\|_0,$$

где $M > 0$ – постоянная. В частности, если правые части в (4.3) являются частичными суммами ряда (4.5), то соответствующие неформальные решения – частичные суммы ряда (4.6) – образуют последовательность, сходящуюся в $\mathring{W}_2^1$. Таким образом, для любой функции $q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp$ ряд (4.6) сходится в норме пространства $\mathring{W}_2^1$ и тем самым определяет соответствующее решение.

Итак, случай $G = K_R$ изучен.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Суммируя ряд (4.6), нетрудно получить интегральное представление решения, а именно

$$(4.7) \quad r(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{K_R} \frac{q(\zeta)}{\bar{z} - \bar{\zeta}} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Обратимся теперь к случаю произвольной ограниченной области G и покажем, что решение задачи

$$(4.8) \quad \partial_z r(z) = q(z), \quad q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp, \quad z \in G,$$

$$(4.9) \quad r(z)|_\Gamma = 0,$$

определяется формулой

$$(4.10) \quad r(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{q(\zeta)}{\bar{z} - \bar{\zeta}} d\xi d\eta, \quad z \in G.$$

Действительно, выберем $R > 0$ так, чтобы $G \subset K_R$, и положим

$$q^*(z) = \begin{cases} q(z), & z \in G, \\ 0, & z \in K_R \setminus G. \end{cases}$$

Поскольку $q(z)$ ортогональна любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}_2$ в области G , $q^*(z)$ ортогональна любой функции $\varphi(z)$ из $\mathcal{O}_2$ в круге K_R . Следовательно, по доказанному соответствующее решение $r^*(z)$ определяется формулой

$$r^*(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{K_R} \frac{q^*(\zeta)}{\bar{z} - \bar{\zeta}} d\xi d\eta, \quad z \in K_R,$$

или, что то же,

$$(4.11) \quad r^*(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{q^*(\zeta)}{\bar{z} - \bar{\zeta}} d\xi d\eta, \quad z \in K_R.$$

При этом

$$(4.12) \quad \|r(z)\|_{\mathring{W}_2^1(K_R)} \leq M \|q^*(z)\|_{L_2(K_R)} = M \|q(z)\|_{L_2(G)},$$

где $M > 0$ – некоторая постоянная.

Далее, в силу исходных условий ортогональности на функцию $q(z)$ правая часть формулы (4.11) при всех $z \in K_R \setminus G$ равна нулю, т.е. $r^*(z)$ есть продолжение нулем в круг K_R функции $r(z)$, определяемой формулой (4.10). Тем самым $r(z) \in \mathring{W}_2^1(G)$ и является решением исходной задачи (4.8), (4.9). Очевидно, оценка (4.12) превращается в оценку $\|r(z)\|_{\mathring{W}_2^1(G)} \leq M \|q(z)\|_{L_2(G)}$. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Аналогичное рассуждение показывает, что если $q(z) \in \mathcal{O}_2^\perp \cap \mathring{W}_2^m(G)$, то решение $r(z) \in \mathring{W}_2^{m+1}(G)$. Это означает, что в задаче (4.8), (4.9) носители правой части и решений согласованы в том смысле, что продолжение нулем правой части $q(z)$ в более широкую область соответствует нулевому продолжению решения в ту же область.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Отметим, что классическая разрешимость задачи (4.1), т.е. разрешимость в пространстве $\mathbb{C}^1(G) \cap \mathbb{C}(\overline{G})$, анонсирована в работе А. Джураева [8].

Вывод. Подводя итог сказанному, получаем, что произвольная функция $f(z) \in L_2 \equiv L_2(G)$ представляется в виде

$$f(z) = f_a(z) + f_{ca}(z),$$

где $f_a(z) \in \mathcal{O}_2$, а $f_{ca}(z) \in \mathcal{O}_2^\perp$. Естественно назвать функцию $f_a(z)$ *аналитической частью* $f(z)$, а $f_{ca}(z)$ – ее *коаналитической частью*. При этом коаналитическая

часть $f_{ca}(z)$ однозначно представима в виде $f_{ca}(z) = \partial_z r(z)$, где $r(z) \in \mathring{W}_2^1(G)$ – ее (скажем) коаналитический потенциал. Все это мы и обозначаем формулой

$$(4.13) \quad L_2 = \mathcal{O}_2 + \partial_z \mathring{W}_2^1.$$

Для дальнейшего отметим, что это представление лежит в основе построения математической модели задачи минимизации функционалов типа нормы в пространствах аналитических функций. Поэтому формулу (4.13) будем называть *основным разложением*.

4.1.2. Разложение $L_2 = \mathcal{O}_2 + \overline{\mathcal{O}}_2 + \partial_z \mathring{W}_2^1$. Установленное в предыдущем пункте основное разложение (4.13) можно развить. Именно, обозначим через $\overline{\mathcal{O}}_2$ подпространство антианалитических функций, т.е. функций $f(z) \in L_2$, аналитических по $\bar{z}$. Очевидно, что отображение $f(z) \rightarrow \overline{f(z)}$ определяет изоморфизм $\mathcal{O}_2$ и $\overline{\mathcal{O}}_2$. Ясно также, что, повторяя предыдущие рассуждения, будем иметь разложение

$$L_2 = \overline{\mathcal{O}}_2 + \partial_{\bar{z}} \mathring{W}_2^1,$$

где $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$. Иными словами, всякая функция $q(z) \in L_2$, удовлетворяющая условиям $\langle q(z), \bar{z}^n \rangle = 0$, $n = 0, 1, \dots$, однозначно представляется в виде $q(z) = \partial_{\bar{z}} r(z)$, где $r(z) \in \mathring{W}_2^1$, при этом

$$\|r(z)\|_0 + \|\nabla r(z)\|_0 \leq M \|q(z)\|_0,$$

где $M > 0$ – постоянная.

Далее, считая для $f(z) \in \mathcal{O}_2$, что $f(0) = 0$, и тем самым устраняя нетривиальное пересечение $\mathcal{O}_2$ и $\overline{\mathcal{O}}_2$ (очевидно, $\mathcal{O}_2 \cap \overline{\mathcal{O}}_2 = \mathbb{C}^1$), мы можем ставить вопрос об описании ортогонального дополнения к сумме $\mathcal{O}_2 + \overline{\mathcal{O}}_2$, т.е. о представлении функции $q(z) \in L_2$, удовлетворяющей условиям

$$(4.14) \quad \langle q(z), \varphi(z) \rangle = 0, \quad \varphi(z) \in \mathcal{O}_2 + \overline{\mathcal{O}}_2.$$

ТЕОРЕМА 4.2. *Функция $q(z) \in L_2$ удовлетворяет условиям (4.14) тогда и только тогда, когда существует (единственная) функция $p(z) \in \mathring{W}_2^2$ такая, что $q(z) = \Delta p(z)$ в области G . При этом*

$$(4.15) \quad \|p(z)\|_{W_2^2} \leq M \|q(z)\|_0,$$

где $M > 0$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность немедленно следует из формулы $\Delta = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$ и предыдущих разложений. Обратное, если $q(z)$ удовлетворяет условиям (4.14), то последовательно решая задачи

$$\left. \begin{aligned} \partial_z r(z) &= q(z), \\ r(z)|_{\Gamma} &= 0, \\ \langle q(z), \varphi(z) \rangle &= 0, \quad \varphi(z) \in \mathcal{O}_2, \end{aligned} \right| \quad \left. \begin{aligned} \partial_{\bar{z}} p(z) &= r(z), \\ p(z)|_{\Gamma} &= 0, \\ \langle r(z), \varphi(z) \rangle &= 0, \quad \varphi(z) \in \overline{\mathcal{O}}_2, \end{aligned} \right.$$

получаем искомую функцию $p(z)$. При этом следует только заметить, что поскольку $r(z) \in \mathring{W}_2^1(G)$, то в соответствии с замечанием 4.2 функция $p(z) \in \mathring{W}_2^2(G)$. Оценка (4.15) очевидна.

В заключение отметим, что вычисления показывают, что

$$p(z) = \frac{2}{\pi} \iint_G q(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} d\zeta d\eta,$$

где $\zeta = \xi + i\eta$. Иначе говоря, решение задачи

$$\Delta p(z) = q(z), \quad p(z)|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} p(z) \Big|_\Gamma = 0$$

существует в том и только в том случае, если функция $q(z) \in L_2$ ортогональна одновременно $\mathcal{O}_2$ и $\overline{\mathcal{O}}_2$ и выражается через стандартное фундаментальное решение оператора Лапласа.

4.1.3. Полная шкала аналитических соболевских пространств. Пусть $m \geq 1$ есть целое число и

$$\mathcal{O}_2^m = \{f(z) : f(z) \in \mathcal{O}_2, \dots, f^m(z) \in \mathcal{O}_2\}$$

есть пространство Соболева аналитических в области G функций. Очевидно,

$$\mathcal{O}_2^m \subset \mathcal{O}_2^{m-1} \subset \dots \subset \mathcal{O}_2^1 \subset L_2,$$

причем эти вложения плотны, ибо (в силу допустимости области определения G) в каждом пространстве $\mathcal{O}_2^m$ всюду плотно множество B аналитических ограниченных в G функций. Ясно также, что $\mathcal{O}_2^m \subset W_2^m$ и является замкнутым подпространством. Аналогично теореме 4.1 устанавливается

ТЕОРЕМА 4.3. *Справедливы разложения:*

$$\begin{aligned} W_2^m &= \mathcal{O}_2^m + \partial_z (W_2^{m+1} \cap \mathring{W}_2^1), \\ W_2^m &= \overline{\mathcal{O}}_2^m + \partial_{\bar{z}} (W_2^{m+1} \cap \mathring{W}_2^1), \\ W_2^m &= \mathcal{O}_2^m + \overline{\mathcal{O}}_2^m + \Delta (W_2^{m+1} \cap \mathring{W}_2^1). \end{aligned}$$

4.1.4. Связь с $\bar{\partial}$ -проблемой на плоскости. Как известно (см., например, [9, с. 51]), один из вариантов $\bar{\partial}$ -проблемы состоит в нахождении условий на функции $q_j(z) \in \mathbb{C}_0^m(\mathbb{C}^n)$, $j = 1, \dots, n$ ($m \geq 1$ – целое число), при которых существует решение $f(z) \in \mathbb{C}_0^{m+1}(\mathbb{C}^n)$ системы Коши–Римана

$$\partial_{\bar{z}_j} f(z) = q_j(z), \quad j = 1, \dots, n.$$

При $n > 1$ ответ состоит в том, что правые части $f_j(z)$ должны удовлетворять естественным условиям согласования

$$\partial_{\bar{z}_k} q_j(z) \equiv \partial_{\bar{z}_j} q_k(z), \quad k, j = 1, \dots, n.$$

В предыдущем пункте получен ответ и для случая $n = 1$, который, насколько нам известно, оставался открытым. Именно, $\bar{\partial}$ -проблема на плоскости нормально разрешима в смысле Хаусдорфа, т.е. разрешима тогда и только тогда, когда правая часть $q(z) \in \dot{W}_2^m$ ортогональна антианалитическим функциям, т.е. ядру сопряженного оператора ∂_z . Решение при этом определяется единственным образом.

4.2. Конграничное и радиальное дифференцирование. Шкала пространств $W_{N,\Gamma}^{l,m}$.

4.2.1. Оператор конграничного (“углового”) дифференцирования. При постановке нелинейной аналитической задачи (см. ниже п. 4.2.3) существенную роль играет специальный дифференциальный оператор первого порядка, который мы называем оператором конграничного дифференцирования. Этот же оператор играет определяющую роль при описании аналитических функционалов над пространством Соболева аналитических функций.

Пусть G – область с непрерывно дифференцируемой границей Γ , звездная относительно начала координат. Определим на Γ две функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$, удовлетворяющие условиям

$$(4.16) \quad a(x, y) + ib(x, y) = 1,$$

$$(4.17) \quad a(x, y) \cos \alpha + b(x, y) \sin \alpha = 0,$$

где $\alpha = \angle(n, x)$ – угол между внешней нормалью к границе Γ и осью x . Продолжим $a(x, y)$ и $b(x, y)$ внутрь области G (исключая начало координат) как однородные функции и сохраним для этих продолжений те же обозначения. Ясно, что $a(x, y)$ и $b(x, y)$ – непрерывные функции в $G \setminus \{0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Оператором конграничного дифференцирования* называется оператор

$$\partial_\Gamma \equiv a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

где $a(x, y)$ и $b(x, y)$ – определенные выше функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Очевидно, оператор ∂_Γ действует “одинаково” вдоль линий, конгруэнтных границе Γ , чем и объясняется его название.

Отметим свойства оператора ∂_Γ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Оператор ∂_Γ является расширением оператора аналитического дифференцирования, т.е. если $f(z) \in \mathcal{O}(G)$, то $\partial_\Gamma f(z) \equiv f'(z)$.*

Это утверждение есть прямое следствие условий Коши–Римана и условия (4.16).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Пусть $\varphi(z) \in L_2$, $\partial_\Gamma \varphi(z) \in L_2$; $f(z) \in L_2$, $\partial_\Gamma^* f(z) \in L_2$, где*

$$\partial_\Gamma^* \circ = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}(z) \circ) - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{b}(z) \circ)$$

есть формально сопряженный оператор к ∂_Γ . Тогда

$$\iint_G f(z) \overline{\partial_\Gamma \varphi(z)} dx dy = \iint_G \partial_\Gamma^* f(z) \overline{\varphi(z)} dx dy,$$

т.е. формально сопряженный оператор ∂_Γ^ является и топологически сопряженным к ∂_Γ .*

Данное утверждение является следствием условия (4.17).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. В частности, если $\varphi(z)$ аналитична, то

$$\iint_G f(z) \overline{\varphi'(z)} dx dy = \iint_G \partial_\Gamma^* f(z) \overline{\varphi(z)} dx dy.$$

Легко устанавливается и

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. *Оператор*

$$J_m(f) \equiv \sum_{k=0}^m (-1)^k (\partial_\Gamma^*)^k f^k(z)$$

является дуальным оператором пары $\mathcal{O}_2^m$, $\mathcal{O}_2^{-m} = (\mathcal{O}_2^m)^*$ (и, в частности, отображает изометрично $\mathcal{O}_2^m$ на $\mathcal{O}_2^{-m}$).

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пространство $\mathcal{O}_2^{-m}$ состоит из тех и только тех аналитических функционалов, которые представимы в виде

$$h(z) \equiv \sum_{k=0}^m (\partial_\Gamma^*)^k f^k(z),$$

где $f_k(z) \in \mathcal{O}_2$ – некоторые функции.

4.2.2. Оператор ортогонального (“радиального”) дифференцирования.

При построении оператора конграничного дифференцирования ∂_Γ функции $a(x, y)$, $b(x, y)$ были продолжены внутрь области G как однородные функции. Однако существует множество иных продолжений, сохраняющих утверждения 4.1–4.3 (при этом область G может быть и незвездной). В частности, для построения продолжения функций $a(x, y)$, $b(x, y)$, определенных на Γ соотношениями (4.16), (4.17), можно взять любое взаимно ортогональное семейство координатных линий, например, конформные образы полярной сетки единичного круга.

При наличии такого семейства можно построить дифференциальный оператор ∂_N , “ортогональный” оператору ∂_Γ (за последним сохраним название оператора конграничного дифференцирования). Именно, положим

$$\partial_N \equiv c(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

где функции $c(x, y)$ и $d(x, y)$ определяются из системы уравнений

$$(4.18) \quad c(x, y) + i d(x, y) = 1,$$

$$(4.19) \quad \bar{a}(x, y) c(x, y) + \bar{b}(x, y) d(x, y) = 0.$$

В силу (4.18) оператор ∂_N на аналитических функциях совпадает с обычным комплексным дифференцированием (вдоль “радиальных” координатных линий).

Если через $\alpha = \alpha(x, y)$ обозначить угол между нормалью к “угловой” координатной линии в точке (x, y) и осью ординат, то, как легко подсчитать,

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \partial_\Gamma &= i e^{-i\alpha} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} - i e^{-i\alpha} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \\ \partial_N &= e^{-i\alpha} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} - e^{-i\alpha} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

При этом

$$(4.21) \quad \frac{1}{2}(\partial_\Gamma + \partial_N) = \partial_z, \quad \frac{1}{2}(\partial_\Gamma^* + \partial_N^*) = \partial_{\bar{z}},$$

где ∂_Γ^* и ∂_N^* – формально сопряженные операторы.

Таким образом, с любой ортогональной сеткой в области G естественно связано дифференциальное исчисление, порождаемое операторами углового и радиального дифференцирования, которые являются расширениями операторов аналитического дифференцирования. В частности, на формулы (4.21) можно смотреть как на “криволинейные” представления оператора Коши–Римана и сопряженного оператора.

4.2.3. ПРИМЕР. Пусть $G = K$ – круг единичного радиуса. Тогда, как легко подсчитать, оператор ∂_Γ , соответствующий полярной сетке (ρ, θ) , является с точностью до множителя $(iz)^{-1}$ оператором дифференцирования по полярному углу θ , а именно,

$$\partial_\Gamma = \frac{iy}{z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{-ix}{z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{iz} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Будем называть этот оператор *оператором комплексного углового дифференцирования* и обозначать через ∂_θ , т.е.

$$\partial_\theta = \frac{iy}{z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{-ix}{z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{iz} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Соответствующий “ортогональный” оператор ∂_N (оператор радиального комплексного дифференцирования, который обозначим через ∂_ρ) определяется формулой

$$\partial_\rho = \frac{x}{z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{z} \frac{\partial}{\partial y} \equiv e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Справедливы формулы

$$\partial_\theta + \partial_\rho = 2\partial_z, \quad \partial_\theta^* + \partial_\rho^* = -2\partial_{\bar{z}},$$

где ∂_θ^* , ∂_ρ^* – формально сопряженные операторы.

4.2.4. Пространства $W_{N,\Gamma}^{l,m}$. Операторы ∂_N и ∂_Γ позволяют ввести шкалу пространств типа пространств Соболева, которые, как нам представляется, весьма удобны при изучении аналитических задач вариационного типа.

Пусть $l \geq 0$, $m \geq 0$ – целые числа. Положим

$$W_{N,\Gamma}^{l,m} = \left\{ r(z) : \|r(z)\|_{l,m}^2 \equiv \|r(z)\|_{L_2(G)}^2 + \sum_{k=1}^l \|\partial_N^k r(z)\|_{L_2(G)}^2 + \sum_{k=1}^m \|\partial_\Gamma^k r(z)\|_{L_2(G)}^2 < \infty \right\}.$$

Очевидно (см. формулы (4.20)) для $l = 1$, $m = 1$ пространства $W_{N,\Gamma}^{1,1}$ совпадают с обычными пространствами Соболева W_2^1 . В других случаях это не так.

Отметим, что пространства $W_{N,\Gamma}^{l,m}$ конформно эквивалентны в том смысле, что при невырожденном конформном отображении $w = w(z)$ области G на единичный круг K пространство $W_{N,\Gamma}^{l,m}$ взаимно однозначно отображается на соответствующее пространство $W_{\rho,\theta}^{l,m}$ в круге K . При этом в силу формул

$$\partial_N = w'(z)\partial_\rho, \quad \partial_\Gamma = w'(z)\partial_\theta$$

норма пространства $W_{N,\Gamma}^{l,m}$ эквивалентна норме

$$\|r(z)\|_{l,m}^2 \equiv \sum_{k=1}^l \|\partial_\rho^k r(z)\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{k=0}^m \|\partial_\theta^k r(z)\|_{L_2(K)}^2$$

соответствующего пространства $W_{\rho,\theta}^{l,m}$ в единичном круге.

В дальнейшем нам потребуются пространства $W_{N,\Gamma}^{0,m}$ и сопряженные к ним пространства $W_{N,\Gamma}^{0,-m}$. Ясно, что

$$W_{N,\Gamma}^{0,m} \subset L_2 \subset W_{N,\Gamma}^{0,-m},$$

причем оператор

$$\tilde{J}r(z) \equiv \sum_{k=0}^m (\partial_\Gamma^*)^k (\partial_\Gamma)^k$$

является дуальным оператором пары $(W_{N,\Gamma}^{0,m}, W_{N,\Gamma}^{0,-m})$. Тем самым всякий линейный ограниченный функционал $q(z) \in W_{N,\Gamma}^{0,-m}$ представляется в виде

$$q(z) = \sum_{k=0}^m (\partial_\Gamma^*)^k q_k(z),$$

где $q_k(z) \in L_2(G)$ – некоторые функции.

Далее, поскольку оператор ∂_Γ является расширением оператора комплексного дифференцирования, то $\mathcal{O}_2^m \subset W_{N,\Gamma}^{0,m}$ и, следовательно, $W_{N,\Gamma}^{0,-m} \subset \mathcal{O}_2^{-m}$. При этом оператор $\tilde{J}r(z)$ является расширением оператора

$$Jf(z) \equiv \sum_{k=0}^m (\partial_\Gamma^*)^k f^{(k)}(z) : \mathcal{O}_2^m.$$

4.3. Основная нелинейная аналитическая задача. Теорема разрешимости.

4.3.1. Вновь “наводящий” модельный пример. Пусть G – односвязная область с непрерывно дифференцируемой границей Γ . Как и в §3, в пространстве $\mathcal{O}_2^1$ рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$I(f) = \operatorname{Re} \iint_G \left[\frac{1}{2} a(z, |f'(z)|^2) + \frac{1}{2} b(z, |f(z)|^2) - h(z) \bar{f}(z) \right] dx dy,$$

где $h(z) \in L_2$ – некоторая функция, а функции $a(z, s), b(z, s)$ ($z \in G, s \geq 0$) непрерывны и удовлетворяют тем же неравенствам:

$$\begin{aligned} a_0 s - k_0 &\leq \operatorname{Re} a(z, s) \leq A_0 s + K_0, \\ b_0 s - m_0 &\leq \operatorname{Re} b(z, s) \leq B_0 s + M_0 \end{aligned}$$

($0 < a_0 \leq A_0 < \infty, 0 < b_0 \leq B_0 < \infty, k_0, K_0, m_0, M_0$ – некоторые постоянные). Пусть, кроме того, функции $a(z, s), b(z, s)$ имеют ограниченные производные $a'(z, s)$ и $b'(z, s)$ по переменной s .

Как известно, в точке минимума

$$(4.22) \quad \delta I(f)(\varphi) \equiv \operatorname{Re} \iint_G [a'(z, |f'(z)|^2) f'(z) \overline{\varphi'(z)} + b'(z, |f(z)|^2) f(z) \overline{\varphi(z)} - h(z) \overline{\varphi(z)}] dx dy = 0,$$

где $\varphi(z) \in \mathcal{O}_2^1$ – произвольная функция.

Выведем соответствующее уравнение Эйлера. Для этого заметим, что, используя оператор конгрантного дифференцирования ∂_Γ , равенство (4.22) можно представить в виде (см. утверждение 4.1)

$$\iint_G [a'(z, |f'(z)|^2) f'(z) \overline{\partial_\Gamma \varphi(z)} + b'(z, |f(z)|^2) f(z) \overline{\varphi(z)} - h(z) \overline{\varphi(z)}] dx dy = 0$$

или (см. утверждение 4.2) в виде

$$(4.23) \quad \iint_G [\partial_\Gamma^* (a'(z, |f'(z)|^2) f'(z)) + b'(z, |f(z)|^2) f(z) - h(z)] \overline{\varphi(z)} dx dy = 0,$$

где $\varphi(z) \in \mathcal{O}_2^1$ (разумеется, мы должны здесь предположить, что на решении $f(z)$ функция

$$(4.24) \quad \partial_\Gamma^* (a'(z, |f'(z)|^2) f'(z)) \in L_2(G).$$

Далее, учитывая, что вложение $\mathcal{O}_2^1 \subset L_2$ всюду плотно (напомним, что G – допустимая область), получаем, что последнее равенство справедливо для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}_2$. Следовательно, в силу основного разложения пространства $L_2(G)$ (см. п. 4.1) найдется такая функция $r(z) \in \overset{\circ}{W}_2^1(G)$, что

$$(4.25) \quad \partial_\Gamma^* (a'(z, |f'(z)|^2) f'(z)) + b'(z, |f(z)|^2) f(z) + \partial_z r(z) = h(z)$$

в смысле $L_2(G)$.

Это и есть уравнение Эйлера поставленной задачи минимизации.

Отметим его особенности:

1) как и ранее в §3, несмотря на то, что ставится задача отыскания аналитической функции, дающей минимум функционала, уравнение Эйлера существенно неаналитично, так как наряду с аналитическим дифференцированием $f'(z)$ содержит и неаналитическое дифференцирование ∂_Γ^* ,

2) помимо функции $f(z) \in \mathcal{O}_2^1$ уравнение Эйлера содержит еще одну неизвестную функцию $r(z)$ (коаналитический потенциал), являющуюся “невязкой” между интегральным и дифференциальным представлениями функционального равенства $\delta I(f)(\varphi) = 0$.

Завершая рассмотрение модельного примера, отметим, что, конечно, предположение (4.24) априори неправомерно и поэтому в точке минимума $f(z) \in \mathcal{O}_2^1$ вариация

$$\delta I(f)(\varphi) \equiv \operatorname{Re} \iint_G [a'(z, |f'(z)|^2) f'(z) \partial_{\Gamma} \overline{\varphi(z)} + b'(z, |f(z)|^2) f(z) \overline{\varphi(z)} - h(z) \overline{\varphi(z)}] dx dy$$

определяет линейный ограниченный функционал только над $W_{N,\Gamma}^{0,1} \subset L_2$, который в силу (4.23) равен нулю на подпространстве $\mathcal{O}_2^1(G)$. Таким образом, уравнение Эйлера (4.25) имеет место в смысле теории обобщенных функций над пространством $W_{N,\Gamma}^{0,1}$, т.е. в смысле $W_{N,\Gamma}^{0,-1}$. Соответственно этому коаналитический потенциал $r(z)$ должен быть таким, чтобы $\partial_z r(z) \in W_{N,\Gamma}^{0,-1}$.

Перейдем к строгим определениям и формулировкам.

4.3.2. Постановка задачи. Основная теорема. В области $G \subset \mathbb{C}^1$ с границей Γ рассматривается нелинейная задача порядка $2m$

$$(4.26) \quad L(f, r) \equiv \sum_{k=0}^m (\partial_{\Gamma}^*)^k A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)) + \partial_z r(z) = h(z),$$

$$(4.27) \quad r(z)|_{\Gamma} = 0,$$

или, что то же,

$$(4.28) \quad L(f, r) \equiv \sum_{k=0}^m (\partial_{\Gamma}^*)^k A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)) + (\partial_N + \partial_{\Gamma})r(z) = h(z),$$

$$(4.29) \quad r(z)|_{\Gamma} = 0.$$

Здесь $A_k(z, \xi_0, \dots, \xi_m)$ — функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори, т.е. измеримы и ограничены по $z \in G$ и непрерывны по $\xi_0 \in \mathbb{C}^1, \dots, \xi_m \in \mathbb{C}^1$.

Допустим, что выполнены условия:

$$\text{I.} \quad |A_k(z, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)| \leq K \left(\sum_{k=0}^m |\xi_k| + 1 \right),$$

$$\text{II.} \quad \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m A_k(z, \xi_0, \dots, \xi_m) \overline{\xi_k} \geq a_0 (|\xi_m|^2 + |\xi_0|^2) - K_0,$$

где $K > 0$, $a_0 > 0$, $K_0 > 0$ — некоторые постоянные.

Решением поставленной задачи являются аналитическая функция $f(z) \in \mathcal{O}_2^m$ и неаналитическая функция $r(z) \in \nabla^{-1}(W_{N,\Gamma}^{0,-m})$, где по определению

$$\nabla^{-1}(W_{N,\Gamma}^{0,-m}) = \{r(z) : r(z) \in W_{N,\Gamma}^{0,-m}, \partial_{\Gamma} r(z) \in W_{N,\Gamma}^{0,-m}, \partial_N r(z) \in W_{N,\Gamma}^{0,-m}\}$$

(ниже мы поясним, что всякая функция $r(z) \in \nabla^{-1}(W_{N,\Gamma}^{0,-m})$ имеет след на границе Γ , так что граничное условие (4.27) (или (4.28)) имеет смысл).

Очевидно, при выполнении условий I, II оператор $L(f, r)$ определен для любой пары $f(z) \in \mathcal{O}_2^m$, $r(z) \in \nabla^{-1}(W_{N,\Gamma}^{0,-m})$, причем отображение

$$L(f, r): \mathcal{O}_2^m \times \nabla^{-1}(W_{N,\Gamma}^{0,-m}) \rightarrow W_{N,\Gamma}^{0,-m}$$

непрерывно.

Основным результатом данного параграфа является

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть выполнены условия I, II. Тогда для любой правой части $h(z) \in W_{N,\Gamma}^{0,-m}$ существует по крайней мере одно решение $(f(z), r(z))$ задачи (4.28), (4.29) в том смысле, что для любой основной функции $\varphi(z) \in W_{N,\Gamma}^{0,m}$ справедливо тождество

$$\sum_{k=0}^m \iint_G A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)) \overline{\partial_\Gamma^k \varphi(z)} dx dy + \langle (\partial_N + \partial_\Gamma) r(z), \varphi(z) \rangle = \langle h(z), \varphi(z) \rangle$$

или, что то же,

$$\sum_{k=0}^m \iint_G A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)) \overline{\partial_\Gamma^k \varphi(z)} dx dy + \langle \partial_z r(z), \varphi(z) \rangle = \langle h(z), \varphi(z) \rangle$$

$\langle h(z), \varphi(z) \rangle$ – значение функционала $h(z) \in W_{N,\Gamma}^{0,-m}$ на основной функции $\varphi(z) \in W_{N,\Gamma}^{0,m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем в два этапа: вначале методом компактности найдем функцию $f(z) \in \mathcal{O}_2^m$, а затем определим функцию $r(z)$ как решение эллиптической линейной задачи

$$\partial_N r(z) + \partial_\Gamma r(z) = q(z), \quad r(z)|_\Gamma = 0,$$

где

$$q(z) = h(z) - \sum (\partial_z^*)^k A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)) \in W_{N,\Gamma}^{0,-m}$$

есть возникшая “невязка”.

1-й этап (определение $f(z)$). Пусть $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots$ – базисная система в пространстве $\mathcal{O}_2^m \equiv \mathcal{O}_2^m(G)$. Приближенное решение $f_N(z)$ ищем в виде

$$f_N(z) = C_1 \varphi_1(z) + \dots + C_N \varphi_N(z),$$

где постоянные $C_1, \dots, C_N$ определяются из моментных уравнений Галеркина

$$(4.30^j) \quad \sum_{k=0}^m \iint_G A_k(z, f_N(z), \dots, f_N^{(m)}(z)) \overline{\varphi_j^{(k)}(z)} dx dy = \langle h(z), \varphi_j(z) \rangle, \\ j = 1, \dots, N$$

(здесь учтено, что $\partial_{\Gamma}^k \varphi_j(z) = \varphi_j^{(k)}(z)$).

Разрешимость этой системы относительно $C_1, \dots, C_N$ вытекает из условия коэрцитивности Π и известной леммы “об остром угле”. Из этого же условия для приближенных решений $f_N(z)$ следует оценка

$$(4.31) \quad \sum_{k=0}^m \|f_N^{(k)}(z)\|_{L_2(G)} \leq K, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где $K > 0$ – постоянная, зависящая от $h(z)$.

Действительно, умножая каждое равенство (4.30) на $\overline{C_j}$ и суммируя по $j = 1, \dots, N$, получаем, что

$$\sum_{k=0}^m \iint_G A_k(z, f_N(z), \dots, f_N^{(m)}(z)) \overline{f_N^{(k)}(z)} dx dy = \langle h, f_N \rangle$$

или, с учетом условия Π и вложения $\mathcal{O}_2^m \subset W_{N,\Gamma}^{0,m}$,

$$a_0 \sum_{k=0}^m \iint_G |f_N^{(k)}(z)|^2 dx dy - A_0 \leq \|h\|_{W_{N,\Gamma}^{0,-m}} \|f_N\|_{\mathcal{O}_2^m}.$$

Отсюда немедленно и следует оценка (4.31). Из этой оценки и свойства монтелевости ограниченных множеств в $\mathcal{O}_2$ вытекает, что существуют функция $f(z) \in \mathcal{O}_2^m$ и такая подпоследовательность приближенных решений (обозначим ее вновь $f_N(z)$), что $f_N(z) \rightarrow f(z)$ локально равномерно в области G со всеми производными. Переходя в (4.30^j) к пределу при $N \rightarrow \infty$ (и принимая при этом во внимание условие I), находим, что

$$\sum_{k=0}^m \iint_G A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)) \overline{\varphi_j^{(k)}(z)} dx dy = \langle h, \varphi_j(z) \rangle,$$

где $j = 1, 2, \dots$ произвольно.

Так как система $\varphi_j(z) \in \mathcal{O}_2^m$, $j = 1, 2, \dots$, является полной, это означает, что

$$(4.32) \quad \sum_{k=0}^m \iint_G A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)) \overline{\varphi^{(k)}(z)} dx dy = \langle h, \varphi(z) \rangle$$

для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}_2^m$.

Итак, функция $f(z)$ найдена.

2-й этап (определение коаналитического потенциала $r(z)$). Тожество (4.32) показывает, что разность

$$q(z) \equiv h(z) - \sum_{k=0}^m (\partial_{\Gamma}^*)^k A_k(z, f(z), \dots, f^{(m)}(z)),$$

являющаяся, очевидно, функционалом над $W_{N,\Gamma}^{0,m}$, обращается в нуль на подпространстве аналитических функций $\mathcal{O}_2^m$. Таким образом, исходная задача будет решена, если мы докажем, что задача Дирихле

$$(4.33) \quad \partial_N r(z) + \partial_{\Gamma} r(z) \equiv q(z), \quad z \in G,$$

$$(4.34) \quad r(z)|_{\Gamma} = 0$$

имеет (единственное) решение $r(z) \in \nabla^{-1}(W_{N,\Gamma}^{0,-m})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. Пусть $q(z) \in W_{N,\Gamma}^{0,-m}$, причем выполнено условие “ортогональности”

$$(4.35) \quad \langle q(z), \varphi(z) \rangle = 0, \quad \varphi(z) \in \mathcal{O}_2^m.$$

Тогда задача (4.33), (4.34) имеет единственное решение $r(z)$, причем

$$(4.36) \quad \|r(z)\|_{-m} + \|\partial_\Gamma r(z)\|_{-m} + \|\partial_N r(z)\|_{-m} \leq M \|q(z)\|_{-m},$$

где $\|\cdot\|_{-m}$ означает норму в $W_{N,\Gamma}^{0,-m}$, $M > 0$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что задачу (4.33), (4.34) достаточно решить для единичного круга. Действительно, пусть $w = w(z): G \leftrightarrow K$ – невырожденное отображение области G на единичный круг K . Как уже отмечалось, справедливы формулы

$$(4.37) \quad \partial_N r = w'(z) \partial_\rho r, \quad \partial_\Gamma r = w'(z) \partial_\theta r,$$

где ∂_ρ и ∂_θ – операторы радиального и углового дифференцирования на плоскости $w = u + iv$. Следовательно, после замены переменных $w = w(z)$ задача (4.33), (4.34) преобразуется к виду

$$\partial_\rho \tilde{r}(w) + \partial_\theta \tilde{r}(w) = \tilde{q}(w), \quad w \in K, \quad \tilde{r}(w)|_{|w|=1} = 0,$$

где $\tilde{r}(w) = r(z(w))$, $\tilde{q}(w) = q(z(w))z'(w)$, а $z(w)$ – отображение, обратное к $w(z)$.

Далее (это также отмечалось), из формул (4.37) вытекает, что в пространствах $W_{N,\Gamma}^{0,m}$ и $W_{\rho,\theta}^{0,m}$, а значит, и в сопряженных пространствах $W_{N,\Gamma}^{0,-m}$ и $W_{\rho,\theta}^{0,-m}$ нормы эквивалентны. Наконец, для любой функции $\varphi(w) \in \mathcal{O}_2^m(K)$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{q}(w), \tilde{\varphi}(w) \rangle &\equiv (\text{быть может, в смысле обобщенных функций}) \\ &\equiv \iint_K \tilde{q}(w) \overline{\tilde{\varphi}(w)} du dv = \iint_G q(z) \frac{|w'(z)|^2}{w'(z)} \overline{\varphi(z)} dx dy \\ &= \iint_G q(z) \overline{w'(z)} \varphi(z) dx dy = 0, \end{aligned}$$

т.е. условие ортогональности (4.35) также сохраняется.

Итак, без ограничения общности можно считать, что G есть единичный круг и задача (4.33), (4.34) имеет вид

$$(4.38) \quad \partial_\rho r(z) + \partial_\theta r(z) = q(z), \quad |z| < 1,$$

$$(4.39) \quad r(z)|_{|z|=1} = 0,$$

где (ρ, θ) – полярные координаты на плоскости z .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Сейчас удобно пояснить в каком смысле выполняется граничное условие (4.39). Именно, пусть $r(z) \in \nabla^{-1}(W_{\rho,\theta}^{0,-m})$. Это, в частности, означает, что

$$(4.40) \quad \sup \frac{\langle \partial_\rho r(z), \varphi(z) \rangle}{\|\varphi(z)\|_{0,m}} < \infty$$

(обозначения ясны). Рассмотрим функционал $r(z) = r(\rho, \theta)$ как функцию радиуса $\rho \in (0, 1)$, принимающую значения в пространстве Соболева $W_2^{-m}(0, 2\pi)$ функций, периодических по угловой переменной $\theta \in (0, 2\pi)$, и положим $\varphi(z) = s(\rho)\phi(\theta)$, где $s(\rho) \in L_2(1/2, 1)$, $s(\rho) \equiv 0$ при $0 < \rho < \frac{1}{2}$, $\|s(\rho)\|_{L_2} = 1$; $\phi(\theta) \in W_2^m(0, 2\pi)$, $\|\phi(\theta)\|_m = 1$. Тогда из (4.40) следует, что

$$\sup_{s, \phi} \int_{1/2}^1 s(\rho) \frac{d}{d\rho} \langle r(\rho, \theta), \phi(\theta) \rangle d\rho < \infty,$$

т.е. функция $r(z) \equiv r(\cdot, \theta) \in W_2^{-m}(0, 2\pi)$ имеет производную

$$\frac{d}{d\rho} r(\cdot, \theta) \in L_2(1/2, 1; W_2^{-m}(0, 2\pi)).$$

Следовательно, сама функций $r(\cdot, \theta) \in C(1/2, 1; W_2^{-m}(0, 2\pi))$ и тем самым определено “сужение” $r(\rho, \cdot) \in W_2^{-m}(0, 2\pi)$ для каждого $\rho \in (1/2, 1)$. В этом смысле и понимается условие (4.39).

Обратимся непосредственно к решению задачи (4.38), (4.39). Как в п. 4.1.1, формально имеем

$$(4.41) \quad r(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_n(\rho) e^{in\theta},$$

где

$$r_n(\rho) = \begin{cases} 2 \int_0^\rho \eta^n q_{n-1}(\eta) d\eta \rho^{-n}, & n > 0; \\ -2 \int_\rho^1 \eta^n q_{n-1}(\eta) d\eta \rho^{-n}, & n \leq 0 \end{cases}$$

($q_{n-1}(\rho)$ – соответствующая проекция $q(z)$ в разложении в ряд Фурье). Ясно, что, доказав оценку (4.36), мы докажем и утверждение.

Вывод оценки (4.36). Прежде всего, заметим, что, используя дуальное отображение $\tilde{J}q(z): W_{\rho,\theta}^{0,m} \rightarrow W_{\rho,\theta}^{0,-m}$, нетрудно вычислить норму $\|q(z)\|_{-m}$ в пространстве $W_{\rho,\theta}^{0,-m}$, а именно,

$$(4.42) \quad \|q(z)\|_{-m}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{\rho^{2m+1}}{s_{mn}(\rho)} |q_n(\rho)|^2 d\rho,$$

где

$$s_{mn}(\rho) = \rho^{2m} + \sum_{k=1}^m n^2(n-1)^2 \dots (n-k+1)^2 \rho^{2(m-k)}.$$

Далее, поскольку

$$\partial_{\theta} r(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n+1}{\rho} r_{n+1}(\rho) e^{in\theta},$$

имеем

$$\|\partial_{\theta} r(z)\|_{-m}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1)^2 \int_0^1 \frac{\rho^{2m-1}}{s_{mn}(\rho)} |r_{n+1}(\rho)|^2 d\rho,$$

и это выражение надо оценить через (4.42).

Соответствующую оценку получим для различных групп значений n . При этом будем существенно использовать классические неравенства Харди (см., например, [10], [11]):

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^1 \rho^s \left| \int_0^{\rho} f(\eta) d\eta \right|^2 d\rho &\leq \frac{4}{(s+1)^2} \int_0^1 \rho^{s+2} |f(\rho)|^2 d\rho \quad (s < -1); \\ \text{б) } \int_0^1 \rho^s \left| \int_{\rho}^1 f(\eta) d\eta \right|^2 d\rho &\leq \frac{4}{(s+1)^2} \int_0^1 \rho^{s+2} |f(\rho)|^2 d\rho \quad (s > -1). \end{aligned}$$

I. Пусть $n = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда (при $\rho \rightarrow +0$) $s_{mn}^{-1}(\rho) \approx \rho^{2(n-m)}$ и дело сводится к неравенству

$$(4.43) \quad \int_0^1 \rho^{2n-1} |r_{n+1}|^2 d\rho \leq M \int_0^1 \rho^{2n+1} |q_n(\rho)|^2 d\rho,$$

где $M > 0$ – постоянная.

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho^{2n-1} |r_{n+1}(\rho)|^2 d\rho &= 4 \int_0^1 \rho^{2n-1} \left| \int_0^{\rho} \eta^{n+1} q_n(\eta) d\eta \right|^2 \rho^{-2(n+1)} d\rho \\ &= 4 \int_0^1 \rho^{-3} \left| \int_0^{\rho} \eta^{n+1} q_n(\eta) d\eta \right|^2 d\rho \leq (\text{неравенство Харди а)}) \\ &\leq M \int_0^1 \rho^{2n+1} |q_n(\rho)|^2 d\rho \quad (M > 0), \end{aligned}$$

что и требуется.

II. Пусть теперь $n \neq 0, 1, \dots, m-1$. Тогда (при $|n| \rightarrow \infty$) $s_{mn}(\rho) \approx n^2(n-1)^2 \dots (n-m+1)^2$ и дело сводится к оценке

$$(n+1)^2 \int_0^1 \rho^{2m-1} |r_{n+1}(\rho)|^2 d\rho \leq M \int_0^1 \rho^{2m+1} |q_n(\rho)|^2 d\rho.$$

Последняя оценка устанавливается вполне аналогично п. I, при этом в случае $n \geq m$ используется неравенство Харди а), а в случае $n < 0$ – неравенство Харди б). (В обоих случаях при этом $s = 2(m-n) - 3$.)

Ясно, что из равенства Парсеваля теперь получаем, что

$$\|\partial_{\theta} r(z)\|_{0,-m} \leq M \|q(z)\|_{0,-m}.$$

Аналогично (и даже чуть легче) получается неравенство

$$\|r(z)\|_{0,-m} \leq M \|q(z)\|_{0,-m}.$$

Что же касается неравенства

$$\|\partial \rho r(z)\|_{0,-m} \leq M \|q(z)\|_{0,-m},$$

то оно немедленно вытекает из уравнения (4.38).

Тем самым искомая оценка (4.36) установлена.

Это завершает доказательство утверждения 4.4, а вместе с ним, как уже отмечалось, и доказательство основной теоремы 4.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Если выполнено условие строгой монотонности, то решение задачи (4.28), (4.29) единственно.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение в круге

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{iy}{\bar{z}} f'(z) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ix}{\bar{z}} f'(z) \right) + f(z) + \partial_z r(z) = h(z)$$

(уравнение Эйлера функционала $\|f'\|_0^2 + \|f\|_0^2 - \langle h, f \rangle$). Это линейное уравнение с ограниченными измеримыми коэффициентами. Условия I, II выполнены. Этому уравнению можно придать вид

$$\partial \theta^* \partial \theta f(z) + f(z) + (\partial \rho + \partial \theta) r(z) = h(z).$$

Интерес этого примера в том, что (в отличие от рассмотренного в §3 периодического случая) в данной вариационной задаче уравнение Эйлера содержит коаналитический потенциал $r(z)$ даже в том случае, когда правая часть $h(z)$ аналитична.

4.3.3. Заключительные замечания. Выше детально рассмотрена аналитическая задача, отвечающая разложению

$$L_2 = \mathcal{O}_2 + \partial_z \overset{\circ}{W}_2^1.$$

Совершенно аналогично изучается случай, соответствующий “антианалитическому” разложению

$$L_2 = \overline{\mathcal{O}}_2 + \partial_{\bar{z}} \overset{\circ}{W}_2^1.$$

В этом случае соответствующая задача имеет вид

$$\sum_{k=0}^m (\delta_\Gamma^*) A_k(\bar{z}, f_{\bar{z}}(\bar{z}), \dots, f_{\bar{z}}^{(m)}(\bar{z})) + \partial_{\bar{z}} r(\bar{z}) = h(\bar{z}), \quad r(\bar{z})|_\Gamma = 0,$$

где роль оператора конграничного дифференцирования играет оператор δ_Γ , получающийся из оператора ∂_Γ заменой y на $-y$, т.е.

$$\delta_\Gamma = a(x, -y) \frac{\partial}{\partial x} - b(x, -y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ясно теперь, что нелинейная задача, отвечающая “гармоническому” разложению

$$L_2 = \mathcal{O}_2 + \overline{\mathcal{O}}_2 + \partial_z \partial_{\bar{z}} \overset{\circ}{W}_2^2,$$

т.е. задача вариационного типа на подпространстве гармонических функций, представляется в виде

$$\sum_{k+l \leq m} (\partial_\Gamma^*)^k (\delta_\Gamma^*)^l A_{kl}(z, \bar{z}, \mathcal{D}_{z\bar{z}}^\gamma f(z, \bar{z})) + \Delta p(z, \bar{z}) = h(z, \bar{z}), \quad |\gamma| \leq m.$$

При этом никакие граничные условия на гармоническую функцию $f(z, \bar{z})$ не накладываются. Напротив, когармонический потенциал $p(z, \bar{z})$ обращается на границе в нуль вместе со всеми производными первого порядка.

§5. Комментарии и задачи

Теорема 1.1 об аналитическом продолжении решений обыкновенных дифференциальных уравнений относилась к случаю классических решений уравнения

$$(5.1) \quad f_0^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) f_0^{(k)}(x) = h(x), \quad x \in (a, b),$$

т.е. к случаю $f_0(x) \in \mathbb{C}^n(a, b)$ при непрерывных коэффициентах и правых частях уравнения.

ЗАДАЧА 1. Исследовать аналогичную задачу об аналитическом продолжении решения уравнения (5.1) в случаях: а) $f_0(x) \in W^n(a, b)$ – функция из пространства Соболева; б) $f_0(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ – обобщенная функция; в) $f_0(x)$ – гиперфункция.

Интерес представляют достаточные условия на коэффициенты уравнения, обеспечивающие разрешимость многоточечных задач, отличных от задач, рассмотренных в §2. Примером такой задачи является, например,

ЗАДАЧА 2. Указать условия на $a(z)$, достаточные для разрешимости задачи

$$f^{(\text{iv})}(z) + a(z)f(z) = h(z), \quad z \in G, \\ f(z_1) = f_{01}, \quad f'(z_1) = f_{11}, \quad f(z_2) = f_{02}, \quad f(z_3) = f_{03},$$

где z_1, z_2, z_3 – фиксированные точки в области G .

Отметим, что вне рамок данной статьи остались нелокальные многоточечные задачи.

ЗАДАЧА 3 (к §3 и §4). В связи с ортогональным разложением

$$L_2 = \mathcal{O}_2 + \partial_z \partial_{\bar{z}} \overset{\circ}{W}_2^{1,1}$$

и соответствующим разложением $f(z) \in L_2$ на аналитическую и коаналитическую составляющие (см. §3) выяснить возможный физический смысл коаналитического потенциала $r(z)$. То же самое и по отношению к разложениям (см. §4)

$$L_2 = \mathcal{O}_2 + \partial_z \partial_{\bar{z}} \overset{\circ}{W}_2^{1,1}, \quad L_2 = \overline{\mathcal{O}}_2 + \partial_{\bar{z}} \partial_z \overset{\circ}{W}_2^{1,1}, \\ L_2 = \mathcal{O}_2 + \overline{\mathcal{O}}_2 + \Delta \overset{\circ}{W}_2^2.$$

ЗАДАЧА 4. Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ – вещественно-аналитический базис в $L_2(a, b)$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. В каком случае этот базис аналитически продолжается в область G как базис в пространстве $\mathcal{O}_2(G)$, где $G \subset \mathbb{C}_z^1$ – некоторая область, содержащая (a, b) . Рассмотреть примеры классических базисов и выяснить их области продолжения как базисов в $\mathcal{O}_2(G)$.

ЗАДАЧА 5. Разработать L_p -теорию нелинейных аналитических задач из §3 и §4.

В связи с понятием допустимой области (см. §4) возникает вопрос о справедливости теоремы Рунге в пространстве $\mathcal{O}_2(G)$.

ЗАДАЧА 6. Пусть G – ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}_z^1$. Тогда, какова бы ни была функция $f(z) \in \mathcal{O}_2$, существует последовательность многочленов $P_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся в пространстве $\mathcal{O}_2$ к функции $f(z)$. Верно ли это?

Пусть G – односвязная область с гладкой границей Γ ; далее, ∂_Γ и ∂_N – операторы конграничного и радиального дифференцирования (см. §4, п. 4.2.1).

ЗАДАЧА 7. Построить теорию задачи Дирихле для уравнения

$$\partial_\Gamma r(z) + \partial_N r(z) = q(z), \quad z \in G,$$

в полной шкале пространств $W_{N,\Gamma}^{l,m}$.

ЗАДАЧА 8. То же – для задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = h(z), \quad z \in G,$$

а также для переопределенной задачи

$$\Delta u = h(z), \quad u|_\Gamma = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_\Gamma = 0.$$

Большой блок интересных, на мой взгляд, вопросов возникает при обобщении рассмотренных задач на случай многих переменных и, прежде всего, при попытках осмыслить проблему аналитического продолжения решений краевых задач “вещественной” математической физики.

С этой целью заметим, что метод продолжения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотренный в §1, формально пригоден и для продолжения решений уравнений с частными производными. Поясним это, например, для уравнения теплопроводности. Пусть $u_0(t, x)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - a(t, x) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = h(t, x),$$

определенное при $t \in (t_1, t_2)$, $x \in (x_1, x_2)$.

Продолжим вначале это решение по переменной $z = x + iy$ как решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, z) - a(t, z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t, z) &= h(t, z), \\ t \in (t_1, t_2), \quad (x, y) &\in (x_1, x_2) \times (y_-, y_+), \quad y_- \leq 0, \quad 0 < y_+, \end{aligned}$$

считая $a(t, z)$ и $h(t, z)$ аналитическими продолжениями $a(t, x)$ и $h(t, x)$ в область $(x_1, x_2) \times (y_-, y_+)$.

Для этого определим $u(t, z)$, $z = x + iy$, как решение задачи Коши по переменной y , а именно (см. доказательство теоремы 1.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= h(t, z), \quad t \in (t_1, t_2), \quad y \in (y_1, y_2), \\ u(t, x + i0) &= u_0(t, x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(t, x + i0) = i \frac{\partial u_0}{\partial x}(t, x) \end{aligned}$$

($x \in (x_1, x_2)$ – параметр).

Ясно, что так определенная функция $u(t, z)$ будет аналитической по z , ибо функция $w(t, z) \equiv \partial_{\bar{z}} u(t, z)$ является решением однородной задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t, z) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(t, z) &= 0, \\ w(t, x + i0) &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(t, x + i0) = 0. \end{aligned}$$

Далее, найденная функция $u(t, z)$ аналогичным образом продолжается аналитически по переменной t . В итоге получаем решение $u(s, z)$, $s = t + i\sigma$, комплексного “уравнения теплопроводности”

$$\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = h(s, z)$$

такое, что $u(t + i0, x + i0) = u_0(t, x)$. Это и требовалось.

Отметим также, что если решение $u_0(t, z)$ определено на всей вещественной оси, то проблему его продолжения по z можно рассматривать как проблему продолжения вещественной задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} - a(t, x) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} &= h(t, x), \\ u_0(0, x) &= \varphi_0(x), \quad t \in [0, T), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

В этом случае возможен другой вариант продолжения (возможно, более простой).

Именно, пусть $a(t, z)$, $h(t, z)$ и $\varphi_0(z)$ – аналитические продолжения $a(t, x)$, $h(t, x)$ и $\varphi_0(x)$, соответственно. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(t, z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, z) = h(t, z), \quad u_0(0, z) = \varphi_0(z),$$

где, в отличие от предыдущего примера, в качестве параметра выступает $y \in (y_-, y_+)$. Понятно, что и в этом случае функция $w \equiv \partial_{\bar{z}} u$ удовлетворяет однородной задаче

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a(t, z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad w_0(0, z) = 0,$$

т.е. найденное решение $u(t, z)$ формально аналитично.

Очевидно, обоснование данных приемов аналитического продолжения упирается, как минимум, в следующие проблемы.

1. Разрешимость задачи Коши в пространствах вещественно-аналитических функций для уравнений с частными производными, зависящими от параметра.

При этом необходимо иметь теоремы об аналитической (или конечно-гладкой) зависимости решения от параметра – аналог классической теоремы Пуанкаре–Перрона для обыкновенного дифференциального уравнения.

2. Разрешимость задачи Коши для уравнений, у которых часть независимых переменных вещественна, а часть комплексна.

Следует подчеркнуть при этом, что соответствующие уравнения не являются, вообще говоря, уравнениями типа Ковалевской, поэтому речь может идти в этих случаях о разрешимости задачи Коши только в определенных подпространствах аналитических функций, например, экспоненциальных функций, аналитических периодических функций и др. (напомним, что локальная корректность задачи Коши в классе *всех* аналитических функций имеет место только для уравнения типа Ковалевской).

Понятно, что решение этих проблем для каждого индивидуального уравнения будет требовать и индивидуального подхода. Хотелось бы осмыслить все это прежде всего для трех классических типов уравнений математической физики.

§ 6. Об одной задаче продолжения с наименьшим коаналитическим уклонением

В этом параграфе формулируется математическая модель задачи о продолжении внутри области граничной функции, наименее уклоняющемся от подпространства аналитических функций (имеющем наименьшее коаналитическое уклонение). Устанавливается корректность поставленной задачи. В частности, для круга таким продолжением является гармоническое продолжение.

6.1. Постановка задачи.

Пусть $G \subset \mathbb{C}^1$ ($z = x + iy$) – область с границей Γ . Как и ранее, обозначим через $L_2(G)$ пространство Лебега функций $f(z) : G \rightarrow \mathbb{C}^1$, суммируемых с квадратом в области G , а через $\mathcal{O}_2(G)$ – замкнутое в нем подпространство аналитических функций, т.е.

$$\mathcal{O}_2(G) = \{f(z) : f(z) \in L_2(G), \partial_{\bar{z}}f(z) \equiv 0\},$$

где $\partial_{\bar{z}}$ – оператор Коши–Римана. Тогда (см. § 3) имеет место ортогональное разложение

$$L_2(G) = \mathcal{O}_2(G) \oplus \partial_z \overset{\circ}{W}_2^1(G),$$

где ∂_z – оператор, сопряженный к оператору Коши–Римана, а $\overset{\circ}{W}_2^1(G)$ – пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на границе Γ . Это значит, что всякая функция $f(z) \in L_2(G)$ однозначно представляется в виде суммы $f(z) = f_a(z) + f_{ca}(z)$, где $f_a(z) \in \mathcal{O}_2(G)$ – ее аналитическая часть, а $f_{ca}(z) \in \overset{\circ}{W}_2^1(G)$ – ее коаналитическая часть; при этом существует единственная функция $r(z) \in \overset{\circ}{W}_2^1(G)$ (коаналитический потенциал функции $f(z)$) такая, что $f_{ca}(z) = \partial_z r(z)$.

Очевидно, функция $f_{ca}(z)$ может служить определенной характеристикой уклонения самой функции $f(z)$ от подпространства аналитических функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(z) \in W_2^1(G)$. Мерой коаналитичности (или коаналитическим уклонением) функции $f(z)$ называется число

$$\mu(f) = \|f - f_a\|_{W_2^1(G)}^2,$$

то есть

$$\mu(f) = \iint_G [|\nabla(f - f_a)|^2 + |f - f_a|^2] dx dy.$$

В связи с этим определением возникает задача. Пусть $f_0(\gamma) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ – некоторая граничная функция. Среди всевозможных ее продолжений $f(z) \in W_2^1(G)$ найти то продолжение, которое имеет наименьшее коаналитическое уклонение. Иными словами, требуется найти продолжение заданной граничной функции, наименее уклоняющееся от подпространства аналитических функций в смысле характеристики $\mu(f)$.

Очевидно, эта задача есть задача минимизации функционала $\mu(f)$ на подмножестве функций $f(z) \in W_2^1(G)$ таких, что $f(z)|_\Gamma = f_0(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$.

6.2. Математическая модель задачи продолжения.

Выведем математическую модель поставленной задачи, считая временно, что решение $f(z) \in W_2^2(G)$, т.е. имеет на единицу большую гладкость.

В соответствии с необходимым условием экстремума имеем для любой функции $\varphi(z) \in \overset{\circ}{W}_2^1(G)$

$$(6.1) \quad \delta\mu(f)(\varphi) \equiv \iint_G [\nabla(f - f_a)\nabla(\overline{\varphi} - \overline{\varphi}_a) + (f - f_a)(\overline{\varphi} - \overline{\varphi}_a)] dx dy = 0,$$

откуда, положив $\varphi(z) = \partial_z r(z)$, где $r(z) \in \mathcal{D}(G)$, находим, что

$$\iint_G [-\Delta(f - f_a) + (f - f_a)] \overline{\varphi}(z) dx dy = 0,$$

ибо для указанных функций $\varphi_a(z) = 0$. Отсюда немедленно находим, что искомое продолжение $f(z)$ удовлетворяет включению

$$(6.2) \quad -\Delta(f - f_a) + (f - f_a) \in \mathcal{O}_2(G)$$

или, что то же, включению

$$-\Delta f(z) + f(z) \in \mathcal{O}_2(G).$$

Обратимся к выводу граничного условия.

С этой целью вновь рассмотрим тождество (6.1), полагая в нем произвольно $\varphi(z) \in \overset{\circ}{W}_2^1(G)$. Тогда, интегрируя по частям, находим, что

$$\langle -\Delta(f - f_a) + f - f_a, \varphi - \varphi_a \rangle_G + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}(f - f_a) \overline{\varphi}_a(z) \Big|_\Gamma d\gamma = 0$$

($\vec{n}$ – направление внешней нормали к Γ) или, учитывая включение (6.2),

$$(6.3) \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} (f - f_a) \overline{\varphi}_a(z) \Big|_{\Gamma} d\gamma = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{O}_2^{1/2}(\Gamma)$ множество граничных значений аналитических составляющих функций $\varphi(z) \in \mathring{W}_2^1(G)$, т.е.

$$\mathcal{O}_2^{1/2}(\Gamma) = \{ \varphi_a(\gamma) : \varphi_a(\gamma) = \varphi_a(z) \Big|_{\Gamma}, \varphi(z) \in \mathring{W}_2^1(G) \}.$$

Очевидно, $\mathcal{O}_2^{1/2}(\Gamma) \subset W_2^{1/2}(\Gamma)$ и является замкнутым подпространством пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Следовательно, обозначив через P_a проектор

$$P_a : W_2^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{O}_2^{1/2}(\Gamma),$$

условие (6.3) можно записать в виде

$$P_a \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (f - f_a) \Big|_{\Gamma} \right\} = 0.$$

Таким образом, решение $f(z)$ поставленной задачи минимизации удовлетворяет дифференциальному включению

$$(6.4) \quad -\Delta f(z) + f(z) \in \mathcal{O}_2(G)$$

и двум граничным условиям

$$(6.5) \quad f(z) \Big|_{\Gamma} = f_0(\gamma),$$

$$(6.6) \quad P_a \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (f - f_a) \Big|_{\Gamma} \right\} = 0,$$

последнее из которых носит проекционный характер.

Это и есть искомая математическая модель.

Напомним, однако, что эта модель выведена нами при дополнительном условии $f(z) \in W_2^2(G)$. В общем случае этого включения, конечно, может не быть, и, строго говоря,

$$Lf \equiv -\Delta(f - f_a) + f - f_a \in W_2^{-1}(G),$$

т.е. является линейным непрерывным функционалом над пространством $\mathring{W}_2^1(G)$. Этот функционал можно, очевидно, представить в виде суммы аналитического и коаналитического функционалов

$$L(f) = L_a(f) + L_{ca}(f),$$

которые действуют по формулам

$$\begin{aligned} L_a(f)\varphi_a &= \langle \nabla(f - f_a) + (f - f_a), \varphi_a \rangle, \\ L_{ca}(f)(\varphi - \varphi_a) &= \langle \nabla(f - f_a), \nabla(\varphi - \varphi_a) \rangle + \langle f - f_a, \varphi - \varphi_a \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку $L_{ca}(f) = 0$, то $L(f) = L_a(f)$, т.е. $L(f)$ можно отождествить с функцио-
налом $L_a(f)$ над подпространством аналитических функций

$$\mathcal{O}_2^1(G) = \{f(z) \in W_2^1(G), \partial_{\bar{z}}f(z) \equiv 0\}.$$

Будем обозначать сказанное включением $L(f) \in \mathcal{O}_2^{-1}(G)$.

В конечном итоге, математическая модель задачи о продолжении граничной функ-
ции $f_0(\gamma) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$, имеющем наименьшее коаналитическое уклонение, принимает
вид

$$(6.7) \quad -\Delta(f - f_a) + (f - f_a) \in \mathcal{O}_2^{-1}(G),$$

$$(6.8) \quad f(z)|_{\Gamma} = f_0(\gamma),$$

$$(6.9) \quad P_a \left\{ \frac{\partial}{\partial n}(f - f_a) \Big|_{\Gamma} \right\} = 0$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} -\Delta f + f &\in \mathcal{O}_2^{-1}(G), \\ f(z)|_{\Gamma} &= f_0(\gamma), \\ P_a \left\{ \frac{\partial}{\partial n}(f - f_a) \Big|_{\Gamma} \right\} &= 0. \end{aligned}$$

При этом последнее условие понимается в смысле теории следов обобщенных функций
со значениями в $W_2^{-1}(\Gamma)$.

6.3. Теорема существования и единственности.

ТЕОРЕМА 6.1. *Для любой функции $f_0(\gamma) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ существует единствен-
ное решение $f(z) \in W_2^1(G)$ задачи (6.7)–(6.9) или, что то же, исходной задачи
минимизации коаналитического уклонения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По своему построению задача (6.7)–(6.9) эквивалентна зада-
че разрешимости интегрального тождества

$$(6.10) \quad \iint_G [\nabla(f - f_a)\nabla(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_a) + (f - f_a)(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_a)] dx dy = 0, \quad \varphi(z) \in \mathring{W}_2^1(G),$$

относительно функции $f(z) \in W_2^1(G)$, принимающей заданное значение на границе:

$$(6.11) \quad f(z)|_{\Gamma} = f_0(\gamma) \in W_2^{1/2}(\Gamma).$$

Единственность решения устанавливается стандартно. Действительно, пусть $f(z)$
и $g(z)$ – два решения задачи (6.10)–(6.11). Тогда для разности $u(z) = f(z) - g(z)$
будем иметь тождество

$$\iint_G [\nabla(u - u_a)\nabla(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_a) + (u - u_a)(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_a)] dx dy = 0,$$

где $\varphi(z) \in \mathring{W}_2^1(G)$ произвольна. Так как $u(z)|_\Gamma = 0$, то положив $\varphi(z) = u(z)$, немедленно получаем, что коаналитическая часть функции $u(z)$ равна нулю, т.е.

$$f_{ca}(z) = g_{ca}(z), \quad z \in G.$$

Поскольку функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на границе Γ , отсюда следует, что аналитические составляющие этих функций также равны на границе, т.е.

$$f_a(z)|_\Gamma = g_a(z)|_\Gamma.$$

Ясно теперь, что $f_a(z) \equiv g_a(z)$ и в области G , а тем самым $f(z) \equiv g(z)$ для всех $z \in G$. Единственность установлена.

Существование решения установим методом Галеркина. Для этого прежде всего сведем задачу к случаю нулевого значения на границе. Именно, пусть $h(z) \in W_2^1(G)$ – какое-либо фиксированное продолжение функции $f_0(\gamma) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$, т.е. $h(z)|_\Gamma = f_0(\gamma)$. Положим $u(z) = f(z) - h(z)$. Тогда неизвестная функция $u(z) \in \mathring{W}_2^1(G)$ должна удовлетворять интегральному тождеству

$$(6.12) \quad \iint_G [\nabla(u_{ca} + h_{ca}) \nabla \bar{\varphi}_{ca}(z) + (u_{ca} + h_{ca}) \bar{\varphi}_{ca}(z)] dx dy = 0, \quad \varphi(z) \in \mathring{W}_2^1(G),$$

где $u_{ca}(z)$, $h_{ca}(z)$ и $\varphi_{ca}(z)$ – коаналитические части функций $u(z)$, $h(z)$ и $\varphi(z)$.

Пусть $\varphi^1(z), \varphi^2(z), \dots$ – базисная система в $\mathring{W}_2^1(G)$. Приближенное решение $u^N(z)$, $N = 1, 2, \dots$, ищем в виде

$$u^N(z) = c_N^1 \varphi^1(z) + \dots + c_N^N \varphi^N(z),$$

при этом неизвестные постоянные определяются из моментных соотношений Галеркина

$$(6.12^N) \quad \iint_G [\nabla(u_{ca}^N + h_{ca}) \nabla \bar{\varphi}_{ca}^j + (u_{ca}^N + h_{ca}) \bar{\varphi}_{ca}^j] dx dy = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

(обозначения ясны).

Система (6.12^N) однозначно разрешима, при этом для коаналитических составляющих приближенных решений стандартно имеем оценку

$$(6.13) \quad \|u_{ca}^N(z)\|_{W_2^1(G)} \leq M,$$

где $M = M(h)$ – постоянная, не зависящая от N .

Нетрудно видеть, что и для аналитических составляющих $u_a^N(z)$ справедлива аналогичная оценка. Действительно, из оценки (6.13) и известных неравенств теории следов функций из соболевских пространств вытекает, что для всех $N = 1, 2, \dots$

$$\|u_{ca}^N(\gamma)\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} \leq M \|u_{ca}^N(z)\|_{W_2^1(G)} \leq M_1,$$

где $M_1 > 0$ – постоянная. Отсюда, учитывая, что

$$u^N(\gamma) \equiv u_a^N(\gamma) + u_{ca}^N(\gamma) = 0, \quad \gamma \in \Gamma,$$

получаем, что и

$$\|u_a^N(\gamma)\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} \leq M_2,$$

где $M_2 > 0$ не зависит от N .

Поскольку всякая аналитическая функция является и гармонической (комплексно-значной), то, используя известные L_2 -оценки теории эллиптических граничных задач, приходим к неравенству

$$\|u_a^N(z)\|_{W_2^1(G)} \leq M_3 \|u_a^N(\gamma)\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} \leq M_4.$$

В итоге получаем оценку

$$\|u^N(z)\|_{W_2^1(G)} \leq M_5 < \infty.$$

Далее обычными рассуждениями устанавливается, что слабо предельная точка $u(z)$ последовательности $u^N(z)$ удовлетворяет интегральному тождеству (6.12). Тем самым решение $f(z) = h(z) + u(z)$ найдено.

Теорема доказана.

6.4. Пример (еще об одном свойстве гармонической функции).

Пусть $G = K$ – единичный круг. Рассмотрим разобранную выше задачу для круга в случае “чисто” градиентной метрики, т.е. для коаналитического уклонения

$$\mu_0(f) = \iint_K |\nabla(f - f_a)|^2 dx dy.$$

В этом случае задача о наименьшем коаналитическом уклонении имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &\in \mathcal{O}_2^{-1}(G), \\ P_+ \left\{ \frac{\partial}{\partial n}(f - f_a) \Big|_{\Gamma} \right\} &= 0, \quad f(z) \Big|_{|z|=1} = f_0(\arg z), \end{aligned}$$

где P_+ – проектор на подпространство 2π -периодических функций, ряд Фурье которых содержит экспоненты с неотрицательными частотами.

Можно показать (мы опускаем соответствующие рассуждения), что последняя задача эквивалентна задаче Дирихле и, следовательно, для круга продолжение с наименьшим уклонением $\mu_0(f)$ есть обычное гармоническое продолжение.

Автору неизвестно, верно ли это для любой односвязной области. В то же время прямой подсчет решения задачи о наименьшем коаналитическом продолжении в случае кольца показывает, что оно не является гармоническим продолжением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1977.
- [2] Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ., 1962.
- [3] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 3. М.: Наука, 1968.
- [4] Browder F. E. Nonlinear elliptic boundary value problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V. 69. № 6. P. 862–874.
- [5] Лионс Ж. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [6] Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // УМН. 1968. Т. 23. № 1. С. 45–90.
- [7] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.
- [8] Джурев А. К теории эллиптических систем в многосвязных областях на плоскости // ДАН СССР. 1991. Т. 317. № 6. С. 1294–1297.
- [9] Хермандер Л. Введение в теорию функций многих комплексных переменных. М.: Мир, 1965.
- [10] Харди Г., Литтлвуд Дж., Поля Г. Неравенства. М.: ГИИЛ, 1948.
- [11] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- [12] Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1953.
- [13] Дубинский Ю. А. Задача Коши и псевдодифференциальные операторы в комплексной области // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 115–142.
- [14] Dubinskii Ju. A. Analytic Pseudodifferential operators and their applications. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ, 1991.
- [15] Дубинский Ю. А. Об аналитической нелинейной периодической задаче // Дифф. уравнения. 1993. Т. 29. № 3. С. 371–380.
- [16] Дубинский Ю. А. О периодической задаче для нелинейных эллиптических уравнений с комплексными аргументами // ДАН. 1993. Т. 330. № 2. С. 148–150.
- [17] Дубинский Ю. А. Об одной нелинейной аналитической задаче // ДАН. 1994. Т. 332. № 5. С. 556–559.
- [18] Дубинский Ю. А. Об аналитическом продолжении решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. 1994. Т. 30. № 4. С. 725–728.
- [19] Дубинский Ю. А. О корректности задачи Коши в комплексной области // Труды МИРАН. 1994. Т. 203. С. 78–90.
- [20] Дубинский Ю. А. Об аналитической нелинейной периодической задаче для параболического уравнения // Вестник МЭИ. 1994. № 4. С. 27–42.

Московский энергетический институт
(технический университет)

Поступила в редакцию
18.02.1996