Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Соловьев, К вопросу о минимаксно-байесовском оценивании, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 247–248

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm85>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:54:33

К ВОПРОСУ О МИНИМАКСНО-БАЙЕСОВСКОМ ОЦЕНИВАНИИ

В. Н. СОЛОВЬЕВ

Обозначим через $\mathcal{P}$ класс всех распределений $P(y)$ случайного вектора $Y = \{\gamma, \theta\}$ с компонентами $\gamma \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R}^m$, имеющего известное среднее $\mathbb{E}_P Y = Y_0 = \{\gamma_0, \theta_0\}$, но неизвестную ковариантную матрицу $K = \text{cov}(Y, Y)$, которая принадлежит априорно заданному классу $\mathcal{K}$ симметрических матриц порядка $n+m$. Пусть по наблюдениям компоненты γ нужно найти оценку $\hat{\ell} = \hat{\ell}(\gamma)$ для вектора $\ell = C\theta \in \mathbb{R}^r$. В качестве характеристики точности этой оценки примем величину

$$(1) \quad D(\hat{\ell}) := \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P |\hat{\ell} - \ell|^2$$

для отыскания оптимальной оценки $\hat{\ell}_*(\gamma)$ нужно на классе всех измеримых функций $\hat{\ell}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ найти решение задачи

$$(2) \quad D_{\min} := \inf_{\hat{\ell}(\cdot)} D(\hat{\ell})$$

Вместо величины $\mathbb{E}_P |\hat{\ell} - \ell|^2$ некоторые рассматривают $\mathbb{E}_P |\hat{\theta} - \theta|_{\Sigma}^2$, где $\|x\|_{\Sigma}^2 = x^T \Sigma x$ и Σ – заданная неотрицательно определенная матрица ранга $r \leq m$. Поскольку найдется разложение $\Sigma = C^T C$, в котором матрица $C \in \mathbb{R}^{rm}$ имеет ранг r , то $\|\hat{\theta} - \theta\|_{\Sigma}^2 = |\hat{\ell} - \ell|^2$, где $\ell = C\theta$ и $\hat{\ell} = C\hat{\theta}$. Поэтому задача отыскания оптимальной оценки $\hat{\theta}_*$ сводится к задаче (1)–(2).

В работе [1] были получены условия, при которых в задаче (1)–(2) существует седловая точка $\{\hat{\ell}_*, P_*\}$, и поэтому она эквивалентна двойственной задаче

$$(3) \quad D_{\min} = \sup_{P \in \mathcal{P}} \inf_{\hat{\ell}(\cdot)} \mathbb{E}_P |\hat{\ell} - \ell|^2$$

Распределение $P_* \in \mathcal{P}$, которое доставляет максимум в (3), называют наименее благоприятным. Введем обозначение

$$K = \begin{pmatrix} K_{\gamma\gamma} & K_{\gamma\theta} \\ K_{\theta\gamma} & K_{\theta\theta} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{matrix} K_{\gamma\gamma} = \text{cov}(\gamma, \gamma) \\ K_{\gamma\theta} = \text{cov}(\gamma, \theta) \end{matrix}$$

$\text{Sp } K$ – след матрицы K ; K^+ – псевдообратная матрица (по Муру–Пенроузу).

ТЕОРЕМА 1. Если множество $\mathcal{K}$ компактно, выпукло и состоит из неотрицательно определенных матриц, то

$$(4) \quad D_{\min} = \max_{K \in \mathcal{K}} \text{Sp } C(K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta}) C^T$$

Наименее благоприятным в априорном классе $\mathcal{P}$ является нормальное распределение $Y \sim N(Y_0, \bar{K})$, в котором $\bar{K} \in \mathcal{K}$ – любое решение задачи (4). Решение исходной задачи (1)–(2) дает линейная оценка $\hat{\ell}_*$, которая в случае невырожденной матрицы $\bar{K}_{\gamma\gamma}$ имеет вид

$$(5) \quad \hat{\ell}_* = C(\theta_0 + \bar{K}_{\theta\gamma} \bar{K}_{\gamma\gamma}^{-1} (\gamma - \gamma_0))$$

ТЕОРЕМА 2. Если множество $\mathcal{K}$ компактно и состоит из неотрицательно определенных матриц, то все утверждения Теоремы 1 останутся справедливыми, если выпукло не само это множество, а матричное множество $\{\bar{K} : \exists K \in \mathcal{K}, K \geq \bar{K}\}$.

Теоремы 1 и 2, которые являются обобщениями теоремы о нормальной корреляции [2], получены в [3]. В случае, когда все распределения $P \in \mathcal{P}$ имеют известные среднее Y_0 и матрицу ковариаций K или же множество $\mathcal{K}$ содержит максимальный элемент (т.е. существует матрица

$\overline{K} \in \mathcal{K}$, такая что $K \leq \overline{K}$ при всех $K \in \mathcal{K}$), аналогичные результаты для общих линейно-квадратичных задач получены (на языке седловых точек) в работе V. D. Vanderlinde [4], уровень которой настолько высок, что ее автор не счел нужным обременять читателей общеизвестными формулами.

В указанных частных случаях линейная оценка $\hat{\ell}_*$ имеет вид [5]

$$(6) \quad \hat{\ell}_* = C(\theta_0 + \overline{K}_{\theta\gamma} \overline{K}_{\gamma\gamma}^+(\gamma - \gamma_0))$$

Но, к сожалению, в общем случае в теореме 1 нельзя просто заменить формулу (5) на (6). В качестве контрпримера можно взять

$$\gamma_1 = \theta_1 + \theta_2 + \rho_1, \quad \gamma_2 = \theta_1 + \rho_2, \quad \ell = \theta_1 + \theta_2 \quad (m = n = 2, \quad r = 1),$$

где $\mathbb{E}\theta_i = \mathbb{E}\rho_i = 0$, $\mathbb{E}\theta_i^2 \leq 1$, $\mathbb{E}\rho_i^2 \leq 1$, $i = 1, 2$, а взаимные ковариации 4 случайных величин $\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2$ совершенно произвольны. В этом случае будут выполнены условия теоремы 1. Пусть P_* — вырожденное нормальное распределение, в котором $\theta_1 = -\varepsilon$, $\theta_2 \equiv 0$, $\rho_1 = \varepsilon$, $\rho_2 = \varepsilon$, где ε — это стандартная гауссовская случайная величина. Покажем, что пара $\{\hat{\ell}_*, P_*\}$, в которой $\hat{\ell}_* = \gamma_1$, образует седловую точку в задаче (1)–(2). Действительно, поскольку $\hat{\ell}_* - \ell = \gamma_1 - (\theta_1 + \theta_2) = \rho_1$, то

$$(7) \quad \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P(\hat{\ell}_* - \ell)^2 = \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P \rho_1^2 = \mathbb{E}_{P_*}(\hat{\ell}_* - \ell)^2 = 1$$

Кроме того, для указанного распределения P_* имеем $\gamma_1 \equiv 0$, $\gamma_2 \equiv 0$, $\ell = -\varepsilon$, и поэтому любая линейная оценка $\hat{\ell}(\gamma)$ постоянна: $\hat{\ell} \equiv \alpha$, откуда

$$(8) \quad \inf_{\hat{\ell}(\cdot)} \mathbb{E}_{P_*}(\hat{\ell} - \ell)^2 = \inf_{\hat{\ell} = \alpha} \mathbb{E}_{P_*}(\alpha + \varepsilon)^2 = \mathbb{E}_{P_*}(\hat{\ell}_* - \ell)^2 = 1$$

Равенства (7), (8) по определению означают, что пара $\{\hat{\ell}_*, P_*\}$ — это седловая точка.

Тогда, как известно [3], $\hat{\ell}_*$ — это решение задачи (2), а P_* — решение задачи (3). В то же время, поскольку для распределения P_* имеем $\gamma_1 \equiv 0$, $\gamma_2 \equiv 0$, то в соответствующем ему решении $\overline{K}$ задачи (4) получим $\overline{K}_{\theta\gamma} = 0$, $\overline{K}_{\gamma\gamma} = 0$. Поэтому формула (6) дает оценку $\hat{\ell} \equiv 0$, которая не оптимальна, ибо согласно (7) имеем $D(\hat{\ell}_*) = 1$, тогда как

$$D(\hat{\ell}) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P \ell^2 = \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P(\theta_1 + \theta_2)^2 = 4$$

Данный пример возник в связи с теоремой 3.1 из [8], в которой (в чуть иных обозначениях) утверждалось, что для критерия $\sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P \|\hat{\theta} - \theta\|_{\Sigma}^2$ и выпуклого компактного подмножества неотрицательно определенных матриц $\mathcal{K}$ максимальная оценка $\hat{\theta}_*$ имеет вид

$$\hat{\theta}_* = \theta_0 + \overline{K}_{\theta\gamma} \overline{K}_{\gamma\gamma}^+(\gamma - \gamma_0), \quad \overline{K} \in \arg \max_{K \in \mathcal{K}} \text{Sp } \Sigma(K_{\theta\theta} - K_{\theta\gamma} K_{\gamma\gamma}^+ K_{\gamma\theta})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Соловьев В. Н. // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 171–172. [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. [3] Соловьев В. Н. Двойственные экстремальные задачи и их применение к задачам минимаксного оценивания // Автореферат дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МИРАН, 1996. [4] Vanderlinde V. D. // IEEE Trans. on Automatic Control. 1977. V. AC 22. № 1. P. 138–139. [5] Панков А. Р. // Технич. киберн. 1992. № 3. С. 63–70. [6] Соловьев В. Н. // УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 211–212. [7] Соловьев В. Н. // УМН. 1997. Т. 52. № 4. С. 49–86. [8] Панков А. Р. Минимаксные методы оценивания и оптимизации процессов в неопределенно-стохастических системах // Автореферат дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МАИ, 1998.