Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 105–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm850>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:24:13

УДК 517.937

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРИЯ КАМ

Л. Д. Пустыльников

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	106
Общие обозначения и определения	110
Глава 1. Теория уравнения с потенциалом Френкеля–Конторовой	112
§1. Неоднозначная разрешимость и неразрешимость задачи Коши для стандартного фазового пространства	112
§2. Введение фазовых пространств и однозначная разрешимость уравнения в классах бесконечно-дифференцируемых и аналитических функций	114
§3. Построение семейств периодических решений, решений, имеющих тип бегущей волны, и задача Френкеля–Конторовой	117
§4. Неустойчивость стационарных и периодических решений в случае равных масс	124
§5. Устойчивость стационарных решений и бесконечно-мерный аналог теории КАМ	125
§6. Доказательство теоремы 1.10	130
§7. Гамильтонова форма уравнения с потенциалом Френкеля–Конторовой	134
§8. Лагранжева форма уравнения с потенциалом Френкеля–Конторовой	137
Глава 2. Теория уравнения с нелинейностью Ферми–Паста–Улама	138
§1. Построение семейств периодических решений и решений, порождающих колебания конечной дискретной струны	139
§2. Введение фазовых пространств и однозначная разрешимость уравнения в окрестности нулевого решения	141
§3. Устойчивость нулевого решения и бесконечно-мерный аналог теории КАМ ..	144
§4. Доказательство теоремы 2.4	146
§5. Об устойчивости относительно неавтономной динамической системы с дискретным временем	151
§6. Локальная неоднозначная разрешимость и неразрешимость уравнения для стандартного фазового пространства	152
Глава 3. Бесконечно-мерные обыкновенные дифференциальные уравнения обшего вида	154
§1. Формальная однозначная разрешимость и единственность аналитических решений	154
§2. Устойчивость стационарных решений	157
Список литературы	158

Введение

Эта работа посвящена исследованию двух классов бесконечномерных систем Гамильтона, которые определяются соответственно следующими системами обыкновенных дифференциальных уравнений Ньютона:

$$(0.1) \quad m_n \frac{d^2 q_n}{dt^2} = \varphi(q_n) + q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$(0.2) \quad m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = x_{n+1} - (2 - c)x_n + x_{n-1} + \beta[(x_{n+1} - x_n)^r - (x_n - x_{n-1})^r], \quad n \in \mathbb{Z}$$

(и описывают движение счетного числа массивных точек P_n , занумерованных всеми целыми числами n), а также возмущениями этих уравнений

$$(0.3) \quad m_n \frac{d^2 q_n}{dt^2} = \varphi(q_n) + q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} + \psi_n(\vec{q}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$(0.4) \quad m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = x_{n+1} - (2 - c)x_n + x_{n-1} + \beta[(x_{n+1} - x_n)^r - (x_n - x_{n-1})^r] + \psi_n(\vec{x}), \quad n \in \mathbb{Z}$$

с помощью функций $\psi_n(\vec{q})$, $\psi_n(\vec{x})$ общего вида.

В указанных уравнениях (0.1)–(0.4) m_n – положительный параметр, характеризующий массу точки P_n , $\varphi(q)$ – вещественная, бесконечно-дифференцируемая функция, имеющая по q период $a \neq 0$, r – нечетное натуральное число, $r \geq 3$, c и β – константы, $c \geq 0$, $\beta > 0$, q_n и x_n – зависимые переменные, $\vec{q} = (q_n)$ и $\vec{x} = (x_n)$ – бесконечно-мерные векторы, составленные из координат q_n и x_n ($n \in \mathbb{Z}$) соответственно, t – независимая переменная, характеризующая время. Уравнение (0.1) есть система с потенциалом Френкеля–Конторовой [1], а уравнение (0.2) представляет собой обобщение уравнения Ферми–Паста–Улама [2]–[4].

В настоящей работе построена полная теория уравнений (0.1)–(0.4), включающая правильные определения фазовых пространств, решение задачи Коши о существовании и единственности решений в классах бесконечно-дифференцируемых и аналитических по t функций, построение семейств периодических решений и решений типа бегущей волны, построение бесконечно-мерных аналогов теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (теории КАМ) и семейств квази-периодических решений с континуальным, счетным и любым конечным числом рационально-независимых частот и доказательства устойчивости стационарных решений в бесконечно-мерных фазовых пространствах. Последнее утверждение обнаруживает принципиально новое явление, касающееся устойчивости в неинтегрируемых гамильтоновых системах с числом степеней свободы большим, чем 2, в связи с тем, что в этом случае инвариантные торы не разделяют фазового пространства. Согласно общим представлениям [7]–[11], при увеличении размерности системы возможностей для неустойчивого поведения становится все больше, и поэтому в бесконечно-мерном случае такая неустойчивость безусловно должна иметь место для систем общего вида. Однако,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01411).

как следует из настоящей работы, для важных классов бесконечно-мерных гамильтоновых систем (гл. 1, 2) стационарные решения являются устойчивыми в смысле Ляпунова в бесконечно-мерном фазовом пространстве (теорема 1.10, следствие 1.4, гл. 1; теорема 2.4, следствие 2.3, гл. 2) и подобные, но более слабые, утверждения об устойчивости справедливы для близких к ним уравнений (теоремы 3.4, 3.5; замечания 3.4, 3.5; гл. 3). Теоремы 1.10, 2.4 и их следствия 1.4, 2.3 показывают, что малые изменения начальных данных в соответствии с нормами в фазовых пространствах уравнений в окрестности стационарных решений приводят к малым изменениям всех координат и импульсов решений соответствующих гамильтоновых систем во все моменты времени. При этом в окрестностях рассматриваемых стационарных решений имеет место усиленный вариант теории КАМ: существование семейств не только конечно-мерных инвариантных торов [5]–[22], но также семейств инвариантных торов, которые имеют счетную и даже континуальную размерность; более точно, построены многообразия, которые образуют существенные подмножества тора континуальной размерности (определение существенного подмножества дано в п. 13) следующего раздела). Решения уравнений порождают на этих торах квази-периодические движения (теорема 1.11, следствие 1.5, гл. 1; теорема 2.5, следствие 2.4, гл. 2). Применительно к бесконечно-мерным неинтегрируемым гамильтоновым системам эти результаты являются наиболее сильные, так как в вариантах теории КАМ нелинейных уравнений, разработанных к настоящему времени были построены квази-периодические решения только с конечным ([29]) или счетным ([24]–[28]) множеством частот. Отметим, что задача изучения поведения решений на множестве начальных данных, являющемся дополнением как к конечно-мерным, так и к счетно-мерным инвариантным торами, ставилась во многих работах (см., например, [7]–[11], [19], [23], [24]).

Важным стимулом для построения периодических и квази-периодических решений бесконечно-мерных уравнений типа (0.1)–(0.2) является так называемая проблема Ферми–Паста–Улама ([2]–[4]). Эти ученые численно исследовали систему, состоящую из большого числа уравнений (0.2), в которых все константы $m_n = 1$, константа $c = 0$, а число $r = 3$, и, вопреки ожиданиям, обнаружили решения, которые имеют устойчивое поведение, похожее на почти-периодическое. Общим моментом в попытках обоснования этих результатов является замена системы обыкновенных дифференциальных уравнений (0.2) уравнением в частных производных [54]. В нашей же работе изучается система, состоящая из бесконечного числа уравнений (0.2) с нелинейным потенциалом Ферми–Паста–Улама или его обобщением ($c \geq 0$, $r \geq 3$), как таковая (гл. 2). Результаты, полученные здесь, состоят в следующем: если константа $c = 0$, а все массы m_n равны между собой, то существует и явно строится семейство периодических решений (теорема 2.1, предложение 2.1, гл. 2), а если при всех целых n $m_n \leq M$ и константа c удовлетворяет условиям $0 < c < 4$, $c \neq 2 - 2 \cos \frac{2\pi s}{d}$, где $s = 0, \pm 1, \dots, \pm d$, $d = 1, \dots, r + 1$, то существуют такие константы $m_n^0 > 0$ ($n \in \mathbb{Z}$), что если при каком-либо $n_0 \geq 0$ и $|n| \geq n_0$ массы m_n удовлетворяют неравенствам $m_n \leq m_n^0$, то нулевое решение $x_n = 0$ ($n \in \mathbb{Z}$) уравнения (0.2) устойчиво по Ляпунову и в любой его окрестности имеет место бесконечно-мерный аналог теории КАМ (теоремы 2.4, 2.5). Отметим, что условия теорем 2.4 и 2.5 будут выполнены, если при сколь угодно большом числе n_0 для чисел n , удовлетворяющих неравенству $|n| < n_0$, выбрать массы

m_n равными между собой, а число s выбрать сколь угодно близким к нулю, и в этом случае условия теорем 2.4 и 2.5 можно сколь угодно сильно приблизить к условиям эксперимента Ферми–Паста–Улама.

Другим весьма популярным в настоящее время объектом исследования, которому посвящена гл. 1 данной работы, является уравнение (0.1) с потенциалом Френкеля–Конторовой, введенное в работе [1] в связи с теорией дислокации в физике твердого тела. По сути своей уравнение (0.1) описывает основополагающую систему классической механики, представляющую собой бесконечную цепочку обычных маятников, последовательно соединенных друг с другом. Для частного случая уравнения (0.1), при котором все массы m_n равны между собой, а функция $\varphi(q) = -h \sin \frac{2\pi q}{a}$ (h – положительная константа, не зависящая от q) в работе [1] была поставлена задача о нахождении решений, имеющих тип бегущей волны, т.е. решений $q_n(t)$, удовлетворяющих при всех вещественных t и целых n равенству $q_n(t) = q_{n+1}(t + \tau)$, где τ – положительная константа, не зависящая от n и t . В этой же работе [1] указанная задача решалась приближенно с помощью замены уравнения (0.1) уравнением в частных производных, и никакого строгого решения задачи на этом пути не получено до сих пор. В настоящей работе в §3 гл. 1 дано строгое решение задачи Френкеля–Конторовой как для функции $\varphi(q) = -h \sin \frac{2\pi q}{a}$, так и для периодической функции $\varphi(q)$ общего вида, причем в первом случае это решение имеет более конкретный характер, соответствующий постановке задачи в [1].

Уравнение (0.1) имеет бесконечно много стационарных решений, не зависящих от времени t и от масс m_n , которые в последнее время интенсивно изучались в связи с теорией Обри–Мазера о конфигурациях с наименьшей энергией [30]–[35]. Простейшие из них – это решения, имеющие вид

$$(0.5) \quad q_n^0(t) \equiv \eta + na,$$

где η – такое значение, при котором $\varphi(\eta) = 0$. Исследование поведения уравнения (0.1) в окрестности стационарных решений приводит к задаче об их устойчивости.

Если массы m_n всех частиц равны между собой, то, как показано в §4, стационарные решения вида (0.5), а также периодические решения, найденные в §3 (гл. 1), – неустойчивы. Такая неустойчивость имеет место, даже если массы m_n равны нулю [36], так как в этом случае отображение $(q_{n-1}, q_n) \rightarrow (q_n, q_{n+1})$ в окрестности решения q_n^0 ($n \in \mathbb{Z}$) становится гиперболическим, и это обстоятельство имеет важное значение в теории фазовых переходов в модели Френкеля–Конторовой, а подобные неустойчивые траектории определяют основные состояния [36]–[40].

В случае же, когда массы m_n при $|n| \rightarrow \infty$ достаточно быстро убывают, в §§ 5, 6 доказано, что для широкого класса функций $\varphi(q)$ стационарное решение (0.5) в естественном смысле устойчиво по Ляпунову в бесконечно-мерных фазовых пространствах, а в любой его окрестности имеет место бесконечно-мерный аналог теории КАМ. В силу теоремы 1.10 и следствия 1.4 (§5) результаты об устойчивости касаются гамильтоновой формы уравнения (0.1), и поэтому в §§ 7, 8 гл. 1 дается введение в гамильтонов и лагранжев формализм применительно к уравнению с потенциалом Френкеля–Конторовой и приведены некоторые общие теоремы, обобщающие классические теоремы конечно-мерной гамильтоновой и лагранжевой механики.

Все результаты справедливы для функции $\varphi(q) = -h \sin \frac{2\pi q}{a}$ и для всех близких к ней функций (следствия 1.1, 1.2, §5). Отметим, что в работе [50] получены обобщения указанных выше результатов на случай цепочек произвольной размерности, обобщающих одномерную модель Френкеля–Конторовой и описывающих движения атомов в многомерном твердом теле.

Большое внимание в настоящей работе уделяется проблеме однозначной разрешимости уравнений (0.1)–(0.4), т.е. задаче о правильной постановке задачи Коши о существовании и единственности решений. Это связано с тем обстоятельством, что, как неожиданно выяснилось, если использовать стандартное фазовое пространство, в котором начальные данные задаются значениями всех координат и их первых производных в начальный момент времени, то решения уравнений (0.1) и (0.2) в классе бесконечно-дифференцируемых по t функций определяются неоднозначно, а в классе аналитических по t функций вообще могут не существовать, причем для уравнения (0.1) эти явления имеют место как в системе без граничных условий, так и с граничными условиями вида

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} q_n(t) = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(t) = +\infty$$

(теоремы 1.1, 1.2, §1, гл. 1; теорема 2.7, §6, гл. 2).

Указанные результаты о неоднозначной разрешимости и неразрешимости уравнений (0.1) и (0.2) в стандартной постановке являются следствиями теорем 1.10 и 2.4 об устойчивости стационарных решений. В §2 гл. 1 и в §2 гл. 2 работы для классов бесконечно-дифференцируемых и аналитических функций построены фазовые пространства, в которых решения уравнений (0.1) и (0.2) существуют и единственны. Подобные же результаты, касающиеся аналитических функций, получены в §1 гл. 3 для общих уравнений (0.3) и (0.4), в которых функции $\psi_n(\vec{q})$, $\psi_n(\vec{x})$, принадлежат классу W (определение 3.1, §1, гл. 3), состоящему из аналитических функций, зависящих только от конечного числа координат q_n и x_n соответственно, причем сами эти координаты и их число могут быть разными у функций $\psi_n(\vec{q})$, $\psi_n(\vec{x})$ при разных n .

Результаты этой работы об устойчивости решений уравнений (0.1)–(0.4) существенно используют теорему об устойчивости относительно неавтономной динамической системы с дискретным временем, зависящей от параметра, которая сформулирована в §5 гл. 2 (теорема 2.6). При фиксированном значении параметра в случае, когда в нормальной форме Биркгофа предельного преобразования (равенство (2.55), §5, гл. 2) коэффициент ω_1 в линейном члене отличен от нуля, эта теорема является частным случаем теоремы 2 из [44] (ч. 2, гл. V, §1). В том виде, как она сформулирована в §5 гл. 2, ее доказательство проводится так же, как доказательство теоремы 1 из работы [45] (§2). Отметим, что указанная теорема 2.6 и ее обобщения [44], [45] имеют много других применений. Они, в частности, позволяют получать результаты об устойчивости по Ляпунову траекторий в пятимерной системе Гамильтона (две степени свободы и время) общего вида [46], которые существенным образом опираются на работу [47].

В связи с результатами, полученными в данной работе, здесь сформулированы некоторые нерешенные проблемы. К ним относятся задачи об описании множества решений типа бегущей волны для уравнения (0.1) (§3, гл. 1), множества периодических решений и решений, порождающих колебания конечной дискретной струны для уравнения (0.2) (§1, гл. 2) и гипотеза об описании множеств начальных данных, для которых

существуют аналитические решения уравнений (0.3) и (0.4) (§ 1, гл. 3). В заключение отметим, что методы, применяемые в этой работе, могут быть использованы также при изучении таких явлений, как бесконечно-мерный хаос и бифуркации в динамических системах с бесконечным числом степеней свободы [48]. Основные результаты работы опубликованы в [41]–[43], [55]–[57] и докладывались на заседании Московского математического общества 25 октября 1994 года и на симпозиуме в центре Банаха по эргодической теории и динамическим системам летом 1995 года [49].

Сразу после введения приведен список общих обозначений и определений, используемых в работе, который, в частности, содержит определения квази-периодических функций, решений и движений с произвольным множеством частот, а также определения торов любой размерности и существенного подмножества тора континуальной размерности. Кроме того, в отдельных главах и параграфах имеются другие обозначения и определения, ссылки на которые даются с указанием номеров определения, параграфа и главы.

Общие обозначения и определения

- 1) $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.
- 2) $\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел.
- 3) Аналитическая функция – функция, задаваемая абсолютно сходящимся рядом.
- 4) Решение уравнений (0.1) и (0.3) обозначается символом $(q_n(t))$, а решение уравнений (0.2) и (0.4) обозначается символом $(x_n(t))$.
- 5) Решение $(q_n(t))$ уравнений (0.1), (0.3) и решение $(x_n(t))$ уравнений (0.2), (0.4) называются бесконечно-дифференцируемыми, если при всех $n \in \mathbb{Z}$ функции $q_n(t)$, $x_n(t)$ являются бесконечно-дифференцируемыми на прямой $t \in \mathbb{R}$.
- 6) Решение $(q_n(t))$ уравнений (0.1), (0.3) и решение $(x_n(t))$ уравнений (0.2), (0.4) называются аналитическими, если при всех $n \in \mathbb{Z}$ функции $q_n(t)$, $x_n(t)$ являются целыми аналитическими функциями на прямой $t \in \mathbb{R}$.
- 7) Определение квази-периодических функций с конечным или счетным количеством частот.

Рассмотрим комплексно-значную функцию $F = F((y_\nu))$ от некоторого множества независимых вещественных переменных $y_\nu \in \mathbb{R}$, количество которых может быть конечным или счетным; т.е. параметр ν , нумерующий переменные y_ν , принадлежит множеству B , мощность которого конечна или счетна [53]. Предположим, что F имеет по каждой переменной y_ν период $T > 0$ и при фиксации всех переменных y_ν , кроме одной переменной y_{ν_0} , и подстановке этого набора (фиксированных переменных y_ν для $\nu \neq \nu_0$ и нефиксированной переменной y_{ν_0}) в качестве аргументов F мы получаем аналитическую функцию относительно y_{ν_0} . Предположим, далее, что имеется множество вещественных чисел ω_ν , занумерованных параметром $\nu \in B$. Тогда функция $G(t) = F((\omega_\nu t))$ от вещественного переменного t , полученная в результате подстановок в качестве аргументов y_ν функции F их значений $y_\nu = \omega_\nu t$, называется квази-периодической функцией с частотами ω_ν ($\nu \in B$), а их количество есть мощность множества B .

Характерный пример: $G(t) = \sum_k h_k e^{i(u_k + \omega_k t)}$, где k пробегает конечное или счетное множество, h_k , u_k – числа, u_k – вещественное, $\sum_k |h_k| < \infty$, i – мнимая единица.

- 8) Определение пространства квази-периодических функций с континуальным множеством частот.

Пусть $\mathcal{D}$ – произвольное ограниченное (содержащееся в некотором отрезке) множество на прямой $\mathbb{R}$, имеющее положительную лебегову меру, и рассмотрим множество $C_{\mathcal{D}}$ комплексно-значных функций $G(t)$ одного вещественного переменного t , имеющих вид

$$G(t) = \int_{\omega \in \mathcal{D}} h(\omega) e^{i(u(\omega) + \omega t)} d\omega,$$

где $h(\omega)$ – абсолютно интегрируемая функция, $u(\omega)$ – вещественная измеримая и всюду определенная функция на $\mathcal{D}$, а i – мнимая единица. Пространство $Q_{\mathcal{D}}$ квази-периодических функций, у которых частоты принадлежат множеству $\mathcal{D}$, есть наименьшее линейное пространство комплексно-значных функций от переменного t , содержащее множество $C_{\mathcal{D}}$ и удовлетворяющее следующим свойствам:

- а) вместе с любыми двумя функциями оно содержит их произведение;
- б) если функции $G_n(t) \in Q$, a_n – числа ($n = 1, 2, \dots$) и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n G_n(t)| < \infty$, то функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n(t) \in Q_{\mathcal{D}}$$

(наименьшее пространство, – это перечисление всех пространств с указанными свойствами).

9) Определение рационально-независимых частот.

Частоты $\omega \in \mathcal{D}$ называются рационально-независимыми, если любая конечная сумма $a_1 \omega_1 + \dots + a_s \omega_s$, в которой $\omega_k \in \mathcal{D}$, a_k – рациональные числа ($1 \leq k \leq s$), обращается в ноль тогда и только тогда, когда все $a_k = 0$.

10) Решение $(q_n(t))$ уравнения (0.1) называется квази-периодическим с частотами, принадлежащими множеству $\mathcal{D}$, если при всех $n \in \mathbb{Z}$ $q_n(t)$ – квази-периодическая функция с частотами из $\mathcal{D}$.

11) Решение $(x_n(t))$ уравнения (0.2) называется квази-периодическим с частотами, принадлежащими множеству $\mathcal{D}$, если при всех $n \in \mathbb{Z}$ $x_n(t)$ – квази-периодическая функция с частотами из $\mathcal{D}$.

12) Определение тора Tor^d произвольной размерности.

Стандартная окружность $S^1 = \{u : 0 \leq u < 2\pi\} = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Пусть символ d обозначает мощность произвольного множества $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Тором Tor^d размерности d называется множество, точка которого есть произвольная функция $u(\nu) = u_{\nu}$ на множестве $\mathcal{D}$ ($\nu \in \mathcal{D}$), удовлетворяющая неравенству $0 \leq u(\nu) < 2\pi$.

13) Определение существенного подмножества тора Tor^d континуальной размерности.

Рассмотрим тор Tor^d , в котором символ d обозначает мощность множества $\mathcal{D}$, которое представляет собой отрезок $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$ на прямой $\mathbb{R}$. Существенным подмножеством тора Tor^d называется множество, состоящее из всех точек тора Tor^d , для которых соответствующая функция $u(\nu)$ (см. п. 12)) измерима по Лебегу.

14) Определение квази-периодического движения на торе произвольной размерности.

Рассмотрим тор Tor^d , в котором d есть мощность множества $\mathcal{D}$, а произвольная точка, принадлежащая Tor^d , обозначается через u_{ν} . Пусть, далее, $\omega_{\nu} = \omega(\nu)$ – вещественно-значная функция на множестве $\mathcal{D}$. Квази-периодическим движением на торе Tor^d с частотами ω_{ν} называется движение точки со временем t , которая в момент

$t = 0$ совпадает с точкой u_ν , а в произвольный момент времени t совпадает с точкой $\tilde{u}_\nu(t) = u_\nu + \omega_\nu t \pmod{2\pi}$.

15) Уравнение называется однозначно-разрешимым в фазовом пространстве, если для любых начальных данных из этого пространства существует единственное решение.

16) Уравнение называется неразрешимым в фазовом пространстве, если существуют такие начальные данные из этого пространства, для которых решение не существует, и называется разрешимым в противоположном случае.

17) Уравнение называется неоднозначно разрешимым в фазовом пространстве, если оно разрешимо и существуют такие начальные данные из этого пространства, для которых существует более одного решения.

18) Нумерация формул, теорем, лемм, предложений на протяжении всей статьи производится согласно следующему правилу: первая цифра обозначает номер главы, а затем идет номер соответствующего утверждения в этой главе.

Глава 1.

Теория уравнения с потенциалом Френкеля–Конторовой

Эта глава посвящена уравнению

$$(1.1) \quad m_n \frac{d^2 q_n}{dt^2} = \varphi(q_n) + q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

в котором $m_n > 0$, $\varphi(q)$ – бесконечно-дифференцируемая функция, имеющая по q период $a > 0$, т.е. при всех q

$$(1.2) \quad \varphi(q) = \varphi(q + a).$$

§ 1. Неоднозначная разрешимость и неразрешимость задачи Коши для стандартного фазового пространства

Прежде чем определить фазовые пространства, в которых решение уравнения (1.1) существует и единственно (§ 2), мы докажем, что для стандартного (общепринятого) фазового пространства (определение 1.1) решение уравнения (1.1) в классе бесконечно-дифференцируемых функций $q_n(t)$ – не однозначно, а в классе аналитических функций $q_n(t)$ вообще может не существовать. При этом, когда мы изучаем уравнение (1.1) в классе аналитических функций, то всегда предполагается, что функция $\varphi(q)$ в (1.2) – аналитическая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Введем пространство Ω^* начальных данных для уравнения (1.1), точкой которого $\{(q_n^*), (v_n^*)\}$ являются две двусторонние последовательности чисел $(q_n^*), (v_n^*)$ такие, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства $q_n^* = q_n(t^*)$, $v_n^* = \frac{dq_n}{dt}(t^*)$, где t^* – начальный момент времени.

В этом параграфе мы изучаем задачу об однозначной разрешимости уравнения (1.1) с фазовым пространством Ω^* как без граничных условий (теорема 1.1), так и с граничными условиями (теорема 1.2) следующего вида:

$$(1.3) \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} q_n(t) = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(t) = +\infty.$$

Результаты этого исследования оказались отрицательными и формулируются в виде нижеследующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 1.1. *Решение уравнения (1.1) в классе бесконечно-дифференцируемых по t функций $q_n(t)$ всегда существует при всех $t \in \mathbb{R}$, но не единственно, тогда как в классе аналитических по t функций $q_n(t)$ оно существует не всегда в сколь угодно малой окрестности значения t^* , но в тех случаях, когда существует, это решение – единственное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если заданы начальные данные $\{(q_n^*), (v_n^*)\} \in \Omega^*$, то из уравнения (1.1) однозначно определяются значения вторых производных функций $q_n(t)$ в точке t^* , а продифференцировав уравнение (1.1) k раз, мы определим значения $\frac{d^{2+k}q_n}{dt^{2+k}}(t^*)$ через значения $\frac{d^s q_n}{dt^s}(t^*)$ и $q_n(t^*)$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq s \leq k$. Таким образом, имея начальные данные, мы однозначно определим значения всех производных от всех функций $q_n(t)$ в точке t^* .

ЛЕММА 1.1. *Для любого вещественного числа t^* и любой наперед заданной последовательности вещественных чисел a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) существует бесконечное множество бесконечно-дифференцируемых функций $q(t)$, определенных на прямой $t \in \mathbb{R}$ и таких, что $q(t^*) = a_0$, $\frac{d^k q}{dt^k}(t^*) = a_k$ ($k = 1, 2, \dots$).*

Применяя лемму 1.1, построим бесконечно-дифференцируемые функции $q_0(t)$ и $q_1(t)$, у которых их значения в точке t^* совпадают соответственно с q_0^* и q_1^* , а значения всех их производных в точке t^* совпадают соответственно со значениями производных $\frac{d^k q_0}{dt^k}(t^*)$, $\frac{d^k q_1}{dt^k}(t^*)$ ($k = 1, 2, \dots$), найденными выше по начальным данным. Далее, при известных функциях $q_0(t)$, $q_1(t)$ с помощью равенства (1.1) однозначно определяются функции $q_n(t)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, и при этом их значения и значения их первых производных в точке t^* совпадают соответственно с начальными данными q_n^* , v_n^* . Так как в силу леммы 1.1 функции $q_0(t)$, $q_1(t)$ определены неоднозначно, то из предыдущего утверждения следует утверждение теоремы 1.1 о неоднозначной разрешимости уравнения (1.1) в классе бесконечно-дифференцируемых функций. Для доказательства той части теоремы 1.1, которая касается аналитических решений, заметим, что аналитические функции $q_0(t)$ и $q_1(t)$, которые имеют заданные значения и значения всех производных в точке t^* , либо не существуют, либо определены однозначно. Для того чтобы доказать несуществование аналитических решений уравнения (1.1), зададим две бесконечно-дифференцируемые функции $q_0(t)$ и $q_1(t)$ так, чтобы не существовали аналитические в любой окрестности точки t^* функции $\tilde{q}_0(t)$ и $\tilde{q}_1(t)$, удовлетворяющие условиям

$$q_\nu(t^*) = \tilde{q}_\nu(t^*), \quad \frac{d^k q_\nu}{dt^k}(t^*) = \frac{d^k \tilde{q}_\nu}{dt^k}(t^*) \quad (\nu = 0, 1; \quad k = 1, 2, \dots).$$

Зная функции $q_0(t)$ и $q_1(t)$, с помощью равенства (1.1) находим функции $q_n(t)$, удовлетворяющие (1.1), для всех $n \in \mathbb{Z}$. Обозначая через $q_n^* = q_n(t^*)$, $v_n^* = \frac{dq_n}{dt}(t^*)$, получаем, что для начальных данных $\{(q_n^*), (v_n^*)\}$ аналитического решения уравнения (1.1) не существует. Теорема 1.1 доказана.

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что в уравнении (1.1) функция $\varphi(q_n)$ имеет вид $\varphi(q_n) = -h \sin\left(\frac{2\pi}{a}q_n\right)$, где константа h удовлетворяет следующим неравенствам: $0 < h < \frac{2a}{\pi}$, $h \neq \frac{a}{\pi}\left(1 - \cos \frac{2\pi s}{l}\right)$ при $s = 0, \pm 1, \dots, \pm l$; $l = 1, 2, 3, 4$. Тогда существуют такие константы $m_n^0 > 0$, что если при всех $n \in \mathbb{Z}$ массы m_n удовлетворяют неравенствам $m_n \leq m_n^0$, то существуют такие начальные данные $\{(q_n^*), (v_n^*)\} \in \Omega^*$, для которых решение уравнения (1.1) с граничными условиями (1.3) в классе бесконечно-дифференцируемых функций существует при всех $t \in \mathbb{R}$, но не единственно, а в классе аналитических функций $q_n(t)$ для тех же начальных данных решение задачи (1.1), (1.3) не существует в сколь угодно малой окрестности значения t^* .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основе доказательства лежит утверждение теоремы 1.10 и ее следствие 1.1 (§5, гл. 1). В силу этого следствия и условий теоремы 1.2 для уравнения (1.1) справедливо утверждение теоремы 1.10, согласно которому если при некоторых $m_n^0 > 0$ выполнены неравенства $m_n \leq m_n^0$, то существует бесконечно много бесконечно-дифференцируемых решений $(q_n(t))$ уравнения (1.1) таких, что при всех $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$

$$(1.4) \quad \left| q_n(t) - \left(n - \frac{1}{2}\right)a \right| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ и не зависит от n и t . При этом, так как каждое решение однозначно определяется парой функций $(q_0(t), q_1(t))$, удовлетворяющих (1.4) и неравенствам $\left| \frac{d^s q_\nu}{dt^s}(t) \right| < \delta$, в которых $\nu = 0, 1$; $\delta > 0$; $s = 1, \dots, k_0$, то, задавая две различные пары функций $(q_0(t), q_1(t))$ и $(\hat{q}_0(t), \hat{q}_1(t))$, удовлетворяющие указанным условиям, так, чтобы $q_\nu(t^*) = \hat{q}_\nu(t^*)$, $\frac{d^k q_\nu}{dt^k}(t^*) = \frac{d^k \hat{q}_\nu}{dt^k}(t^*)$ ($\nu = 0, 1$; $k = 1, 2, \dots$), получаем два различных решения уравнения (1.1) с одинаковыми начальными данными из Ω^* , удовлетворяющие неравенству (1.4), которое обеспечивает выполнение граничных условий (1.3). Возможность несуществования аналитических решений в этой ситуации доказывается так же, как и в теореме 1.1. Теорема 1.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из доказательства теоремы 1.2 и теоремы 1.10 следует, что утверждение теоремы 1.2 справедливо для функции $\varphi(t)$ общего вида.

§ 2. Введение фазовых пространств и однозначная разрешимость уравнения в классах бесконечно-дифференцируемых и аналитических функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Введем пространство Ω , состоящее из всевозможных пар $(q_0^*(t), q_1^*(t))$ бесконечно-дифференцируемых функций $q_0^*(t), q_1^*(t)$ на прямой $t \in \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $r > 0$ – вещественное число. Введем пространство Ω_r , состоящее из всевозможных пар $(q_0^*(t), q_1^*(t))$ функций $q_0^*(t), q_1^*(t)$, аналитических в области $|t - t^*| < r$, и пространство Ω_∞ , состоящее из пар $(q_0^*(t), q_1^*(t))$ целых аналитических функций $q_0^*(t), q_1^*(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Определим подпространство $\Omega_r^* \subset \Omega^*$ пространства Ω^* , введенного в определении 1.1 (§1), точкой которого $\{(q_n^*), (v_n^*)\}$ являются такие начальные данные из пространства Ω^* , для которых существует решение уравнения (1.1), аналитическое в области $|t - t^*| < r$, а также введем пространство $\Omega_\infty^* = \bigcap_{r>0} \Omega_r^*$.

ТЕОРЕМА 1.3 (существование и единственность решения в пространстве Ω). *Для любой пары функций $(q_0^*(t), q_1^*(t)) \in \Omega$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ существуют и однозначно определяются такие бесконечно-дифференцируемые на прямой $t \in \mathbb{R}$ функции $q_n(t)$, удовлетворяющие уравнению (1.1), что выполняются равенства*

$$q_0(t) \equiv q_0^*(t), \quad q_1(t) \equiv q_1^*(t).$$

Доказательство теоремы 1.3 непосредственно следует из вида уравнения (1.1).

ТЕОРЕМА 1.4 (усиленная теорема о единственности решений в пространстве Ω). *Пусть даны два бесконечно-дифференцируемых решения $(q_n'(t)), (q_n''(t))$ уравнения (1.1) такие, что пары функций $(q_0'(t), q_1'(t))$ и $(q_0''(t), q_1''(t))$ не совпадают. Тогда существует такое целое число $n \neq 0, 1$, что $q_n'(t) \neq q_n''(t)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что при всех $n \neq 0, 1$ и $t \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$(1.5) \quad q_n'(t) = q_n''(t).$$

Рассмотрим два случая:

- 1) $q_1'(t) \equiv q_1''(t)$,
- 2) $q_1'(t) \neq q_1''(t)$.

В случае 1) имеем: $q_0'(t) \neq q_0''(t)$, и поэтому в силу (1.1) $q_2'(t) \neq q_2''(t)$, что противоречит (1.5).

В случае же 2) в силу (1.5) имеем: $q_2'(t) \equiv q_2''(t)$, и поэтому в силу (1.1) получаем неравенство $q_3'(t) \neq q_3''(t)$, что противоречит (1.5). Теорема 1.4 доказана.

ТЕОРЕМА 1.5. *Для любого конечного значения $r > 0$ и для $r = \infty$ между пространствами Ω_r^* и Ω_r существует взаимно-однозначное соответствие $S: \Omega_r^* \rightarrow \Omega_r$, и в них уравнение (1.1) однозначно разрешимо в классе аналитических функций, т.е. для любых начальных данных в пространствах Ω_r и Ω_r^* существует единственное решение уравнения (1.1) в области $|t - t^*| < r$, которое в этой области аналитично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим взаимно-однозначное отображение S и обратное к нему отображение $S^{-1}: \Omega_r \rightarrow \Omega_r^*$, при которых начальные данные для уравнения (1.1) соответствуют друг другу. Пусть $\{(q_n^*), (v_n^*)\} \in \Omega_r^*$. Согласно определениям 1.4, 1.1 и теореме 1.1 (§1), в области $|t - t^*| < r$ существует единственное аналитическое решение $(q_n(t))$ уравнения (1.1) такое, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ $q_n(t^*) = q_n^*$, $\frac{dq_n}{dt}(t^*) = v_n^*$. Поэтому полагаем

$$S\{(q_n^*), (v_n^*)\} = (q_0(t), q_1(t)) \in \Omega_r.$$

Обратно, пусть $(q_0^*(t), q_1^*(t)) \in \Omega_r$. В силу определения 1.3 функции $q_0^*(t)$ и $q_1^*(t)$ — аналитические в области $|t - t^*| < r$, и поэтому из вида уравнения (1.1) следует, что

если положить $q_0(t) \equiv q_0^*(t)$, $q_1(t) \equiv q_1^*(t)$, то при всех $n \in \mathbb{Z}$ однозначно восстанавливаются аналитические в области $|t - t^*| < r$ функции $q_n(t)$, удовлетворяющие уравнению (1.1). Полагая теперь

$$S^{-1}(q_0^*(t), q_1^*(t)) = \{(q_n^*), (v_n^*)\} \in \Omega_r^*,$$

где при $n \in \mathbb{Z}$ $q_n^* = q_n(t^*)$, $v_n^* = \frac{dq_n}{dt}(t^*)$, получаем утверждение теоремы 1.5. Теорема 1.5 доказана.

Так как нас интересуют решения уравнения (1.1) при всех t на прямой $t \in \mathbb{R}$, то в дальнейшем мы будем изучать поведение решений $(q_n(t))$ только в двух случаях:

- а) в классе бесконечно-дифференцируемых функций $(q_n(t))$ с начальными данными из фазового пространства Ω ;
- б) в классе целых аналитических функций на прямой $t \in \mathbb{R}$ с начальными данными из пространства Ω_∞ или из пространства Ω_∞^* .

Пространства Ω и Ω_∞ являются линейными в естественном смысле: если $(q'_0(t), q'_1(t)) \in \Omega$, $(q''_0(t), q''_1(t)) \in \Omega$, то $(q'_0(t) + q''_0(t), q'_1(t) + q''_1(t)) \in \Omega$, а для любого вещественного числа λ точка $(\lambda q'_0(t), \lambda q'_1(t)) \in \Omega$, и те же утверждения справедливы, если заменить пространство Ω на Ω_∞ . Для исследования устойчивости стационарных решений в §§ 5, 6 нам потребуются следующие понятия, которые вводятся в определениях 1.5, 1.6 и 1.7.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Для любого целого $k \geq 0$ и любого элемента $\tilde{q} = (q_0(t), q_1(t))$, принадлежащего пространству Ω или его подпространству Ω_∞ , введем норму

$$\|\tilde{q}\|^{(k)} = \|(q_0(t), q_1(t))\|^{(k)} = \sum_{\nu=0}^1 \sum_{s=0}^k \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^s q_\nu}{dt^s}(t) \right|,$$

где по определению $\frac{d^0 q_\nu}{dt^0}(t) = q_\nu(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Для любого целого числа $k \geq 0$ введем расстояние $\rho^{(k)}(\cdot, \cdot)$ в пространстве Ω_∞^* следующим образом. Если $q' = \{(q'_n), (v'_n)\} \in \Omega_\infty^*$, $q'' = \{(q''_n), (v''_n)\} \in \Omega_\infty^*$, то

$$\rho^{(k)}(q', q'') = \|Sq' - Sq''\|^{(k)},$$

где S – отображение, введенное в теореме 1.5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Пусть $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \dots)$ – односторонняя последовательность, состоящая из положительных чисел κ_s ($s = 0, 1, \dots$), $q^0 = (q_n^0(t))$ – аналитическое решение уравнения (1.1), $\tilde{q}^0 = (q_0^0(t), q_1^0(t)) \in \Omega_\infty$, $\hat{q}^0 = \{(\hat{q}_0^0), (\hat{v}_0^0)\} \in \Omega_\infty^*$ – такой элемент пространства Ω_∞^* , что при всех $n \in \mathbb{Z}$ $\hat{q}_n^0 = q_n^0(t^*)$, $\hat{v}_n^0 = \frac{dq_n^0}{dt}(t^*)$. В пространствах Ω , Ω_∞ и Ω_∞^* введем множества $\Omega^{(\kappa)}(q^0) \subset \Omega$, $\Omega_\infty^{(\kappa)}(q^0) \subset \Omega_\infty$, $\Omega_\infty^{*(\kappa)}(q^0) \subset \Omega_\infty^*$ следующим образом:

$$\Omega^{(\kappa)}(q^0) = \{q^* = (q_0^*(t), q_1^*(t)) \in \Omega : \|q^* - \tilde{q}^0\|^{(k)} \leq \kappa_k; k = 0, 1, 2, \dots\},$$

$$\Omega_\infty^{(\kappa)}(q^0) = \{q^* = (q_0^*(t), q_1^*(t)) \in \Omega_\infty : \|q^* - \tilde{q}^0\|^{(k)} \leq \kappa_k; k = 0, 1, 2, \dots\},$$

$$\Omega_\infty^{*(\kappa)}(q^0) = \{\hat{q} = \{(\hat{q}_n), (\hat{v}_n)\} \in \Omega_\infty^* : \rho^{(k)}(\hat{q}, \hat{q}^0) \leq \kappa_k; k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

§ 3. Построение семейств периодических решений, решений, имеющих тип бегущей волны, и задача Френкеля–Конторовой

Дадим четыре основные для этого параграфа определения решений уравнения (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Решение $(q_n(t))$ называется стационарным, если оно не зависит от времени, т.е. при всех $n \in \mathbb{Z}$ $q_n(t) \equiv q_n^0$ – константа, не зависящая от t .

ПРИМЕР 1.1. Пусть η – такое значение, что $\varphi(\eta) = 0$, а k – целое число. Тогда решение $(q_n(t))$, в котором $q_n(t) \equiv \eta + nka$, будет стационарным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Решение $(q_n(t))$ называется пространственно однородным, если существует такое число η , не зависящее от n и t , что движение $q_n(t)$ частицы P_n (см. введение), определяемое этим решением, относительно положения $q_n^0 = na + \eta$, одинаково для всех $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 1.2. Решение примера 1.1 при $k = 1$ является пространственно однородным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Решение $(q_n(t))$ называется периодическим, если существует такая константа $T > 0$, не зависящая от t и n и называемая периодом, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $q_n(t + T) = q_n(t)$. Если при этом величина $2b = \max_{0 \leq t \leq T} q_n(t) - \min_{0 \leq t \leq T} q_n(t)$ не зависит от n , то число b называется амплитудой колебаний.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Будем говорить, что решение $(q_n(t))$ имеет тип бегущей волны, если существует такая константа τ , не зависящая от t и n , что при всех $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$(1.6) \quad q_n(t) = q_{n+1}(t + \tau).$$

ПРИМЕР 1.3. Решение примера 1.1 при $k = 0$ является решением, имеющим тип бегущей волны с любым τ .

Примеры 1.1–1.3 доставляют тривиальные примеры периодических, пространственно однородных решений и решений, имеющих тип бегущей волны. Главная цель этого параграфа состоит в нахождении нестационарных решений указанных видов. Далее будут построены три принципиально различных семейства таких решений и сформулированы нерешенные проблемы о существовании других решений, отличных от найденных.

При построении этих семейств мы будем считать, что все константы m_n в уравнении (1.1) одинаковые и равны $m > 0$, и первоначально предположим, что функция $\varphi(q_n)$ в уравнении (1.1) имеет вид $\varphi(q_n) = -h \sin \frac{2\pi q_n}{a}$ (теоремы 1.6, 1.7), так как для этого случая можно получить более конкретные решения и именно он рассматривался Френкелем и Конторовой в работе [1] при постановке проблемы. Далее, в теоремах 1.8 и 1.9 мы укажем общие условия на функцию $\varphi(q)$, при которых основные из описанных в теоремах 1.6 и 1.7 результатов, оказываются справедливыми.

Подставляя в уравнение (1.1) вместо значений m_n величину m , а вместо функции $\varphi(q_n)$ функцию $\varphi(q_n) = -h \sin \frac{2\pi q_n}{a}$, получим следующее уравнение:

$$(1.7) \quad m_n \frac{d^2 q_n}{dt^2} = -h \sin \frac{2\pi q_n}{a} + q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ТЕОРЕМА 1.6. *Уравнение (1.7) обладает двумя семействами решений Q_1 и Q_2 такими, что:*

- 1) *любое решение $(q_n(t)) \in Q_1$ является периодическим, имеет тип бегущей волны и удовлетворяет равенству (1.6), в котором множество значений τ содержит бесконечный интервал*

$$\sqrt{\frac{2\pi m a}{h}} < \tau < \infty;$$

- 2) *если $q_n(t) \in Q_1$, то при любом $n \in \mathbb{Z}$ $q_n(t) \not\equiv \text{const}$, а $(na + q_n(t))$ – периодическое, пространственно однородное решение уравнения (1.7), причем его амплитуда колебаний не превосходит $a/2$ (рис. 1.1);*
- 3) *если $(q_n(t)) \in Q_2$, то $(na + q_n(t))$ – пространственно однородное решение уравнения (1.7), которое периодическим не является.*

Рис. 1.1. Пространственно однородное движение частиц на фазовой плоскости q, p

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать такое решение $(q_n(t))$ уравнения (1.7), для которого при любых $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ выполнено условие

$$(1.8) \quad q_n(t) = q_{n+1}(t) = q(t).$$

Тогда в силу (1.7) функция $q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(1.9) \quad m \frac{d^2 q}{dt^2} = -h \sin \frac{2\pi q}{a}.$$

Уравнение (1.9) есть уравнение плоского нелинейного маятника [12], и утверждения теоремы 1.6 следуют из свойств уравнения (1.9). При этом решения уравнения (1.7),

принадлежащие семейству Q_2 , удовлетворяют равенству (1.8), в котором $q(t)$ – неограниченное решение уравнения (1.9), и для этого случая выполняется утверждение 3) теоремы 1.6; решения уравнения (1.7), принадлежащие семейству Q_1 , удовлетворяют равенству (1.8), в котором $q(t)$ – периодическое решение уравнения (1.9), а значение τ равно периоду этого периодического решения. Из теории уравнения нелинейного маятника известно, что при стремлении к положению равновесия $q = 0$ период периодических решений стремится к величине $\tau_0 = \sqrt{\frac{2\pi ma}{h}}$, которая является периодом колебаний плоского линейного маятника, описываемого уравнением $m \frac{d^2 q}{dt^2} = -h \frac{2\pi q}{a}$, а при стремлении к сепаратрисе период колебаний нелинейного маятника стремится к бесконечности. Так как при этом периодическое решение $q_n(t)$ уравнения (1.7) с периодом τ , удовлетворяющее равенству (1.8), является решением, имеющим тип бегущей волны, для которого выполнено (1.6), то из неравенства $\tau_0 < \tau < \infty$ следует утверждение 1) теоремы 1.6. Из свойств решений уравнения (1.9) также следует, что амплитуда колебаний периодических решений $q(t) \neq 0$ уравнения (1.9) не превосходит $a/2$, а так как в силу (1.8) и определения 1.9 для решения $q(t)$ уравнения (1.9) решение $(na + q(t))$ есть пространственно однородное решение уравнения (1.7), то выполняются утверждения 2) и 3) теоремы 1.6. Теорема 1.6 доказана.

ТЕОРЕМА 1.7. *Уравнение (1.7) обладает семейством решений Q таким, что*

- 1) *любое решение $(q_n(t)) \in Q$ является периодическим, имеет тип бегущей волны и условие (1.6) выполнено с некоторым $\tau > 0$;*
- 2) *если при некотором ξ параметр h в уравнении (1.7) удовлетворяет соотношениям*

$$(1.10) \quad \sin \frac{2\pi\xi}{a} = -\frac{4\xi}{h}, \quad \cos \frac{2\pi\xi}{a} < -\frac{2a}{h\pi},$$

то множество значений τ для решений из Q содержит бесконечный интервал $\tilde{k} \leq \tau < \infty$, где $\tilde{k}$ – некоторая константа;

- 3) *если $q_n(t) \in Q$, то при любом $n \in \mathbb{Z}$ $q_n(t) \neq \text{const}$, $q_n(t) \equiv -q_{n+1}(t)$, а $(na + q_n(t))$ – периодическое не являющееся пространственно однородным решение уравнения (1.7), амплитуда колебаний которого может быть сколь угодно большой (рис. 1.2).*

Рис. 1.2. Обменная диффузия на фазовой плоскости q, p

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если величина h – достаточно большая, то в области $\frac{1}{2}a < \xi < \frac{3}{4}a$ всегда найдется такое ξ , для которого выполнены соотношения (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать такое решение $(q_n(t))$ уравнения (1.7), для которого при любых $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$(1.11) \quad q_n(t) = -q_{n+1}(t).$$

Тогда в силу (1.7) и нечетности функции $\sin \frac{2\pi q_n}{a}$ при любом n функция $q_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(1.12) \quad m \frac{d^2 q_n}{dt^2} = -h \sin \frac{2\pi q_n}{a} - 4q_n,$$

и любое решение $q_n(t)$ уравнения (1.12) порождает решение $(q_n(t))$ уравнения (1.7), удовлетворяющее условию (1.11). Уравнение (1.12) имеет потенциал

$$(1.13) \quad U(q_n) = -\frac{ha}{2\pi} \cos \frac{2\pi q_n}{a} + 2q_n^2$$

такой, что

$$(1.14) \quad m \frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial q_n}(q_n).$$

В силу (1.13) $U(q_n)$ – четная функция, $\lim_{q_n \rightarrow \infty} U(q_n) = \infty$, $\frac{dU}{dq_n} > 0$ при $q_n > h/4$, в точке $q_n = 0$ функция $U(q_n)$ достигает минимума, а, если выполнены соотношения (1.10), то в точке $q_n = \xi$ функция $U(q_n)$ имеет локальный максимум. Поэтому из теории потенциальных систем с одной степенью свободы [12] следует существование такого числа q^* , что любому значению $\sigma > q^*$ соответствует периодическое решение $q_n(t)$ уравнения (1.14), имеющую амплитуду колебаний, равную σ , некоторый период колебаний $T > 0$ и полупериод $\tau = T/2$ такой, что

$$(1.15) \quad q_n(t + \tau) \equiv -q_n(t).$$

Сравнивая теперь равенства (1.11) и (1.15), получаем, что это периодическое решение уравнения (1.14), являющееся периодическим решением эквивалентного ему уравнения (1.12) и удовлетворяющее условию (1.15), удовлетворяет равенству (1.6) с $\tau = T/2$, и, таким образом, решение $(q_n(t))$ уравнения (1.7) имеет тип бегущей волны и при этом амплитуда колебаний σ может быть сколь угодно большой. Из теории потенциальных систем с одной степенью свободы также следует, что такие же периодические решения, удовлетворяющие равенству (1.15) и имеющие амплитуду, равную σ , существуют для любого σ , принадлежащего интервалу $0 \leq \sigma < \xi$, где ξ – наименьшее положительное значение, являющее точкой локального максимума функции $U(q_n)$, и при этом период колебаний T этих периодических решений стремится к бесконечности, если $\sigma \rightarrow \xi$. Так как соотношения (1.10) и замечание 1.2 гарантируют существование такого значения ξ , то, полагая в качестве Q семейство решений $(q_n(t))$ уравнения (1.7), у которых $q_n(t)$ – указанные периодические решения уравнения (1.12), удовлетворяющие равенствам (1.11) и (1.15), мы получаем все утверждения теоремы 1.7, в которых $\tau = T/2$. Теорема 1.7 доказана.

ТЕОРЕМА 1.8. *Предположим, что в уравнении (1.1) при всех $n \in \mathbb{Z}$ параметры $m_n = m > 0$, функция $\varphi(q)$ удовлетворяет равенству $\int_0^a \varphi(q) dq = 0$, а η – такое значение, что $\varphi(\eta) = 0$. Тогда уравнение (1.1) имеет два семейства решений Q_1 и Q_2 такие, что*

- 1) *любое решение $(q_n(t)) \in Q_1$ является периодическим, имеет тип бегущей волны и удовлетворяет равенству (1.6), в котором множество значений τ содержит бесконечный интервал $k \leq \tau < \infty$;*
- 2) *если $(q_n(t)) \in Q_1$, то при любом $n \in \mathbb{Z}$ $q_n(t) \not\equiv 0$, а $(\eta + na + q_n(t))$ – непериодическое, пространственно однородное решение уравнения (1.1), амплитуда колебаний которого не превосходит константы, не зависящей от n ;*
- 3) *если $(q_n(t)) \in Q_2$, то $(\eta + na + q_n(t))$ – пространственно однородное решение уравнения (1.1), которое периодическим не является.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и при доказательстве теоремы 1.6, будем искать такое решение $(q_n(t))$ уравнения (1.1), для которого при любом $n \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство (1.8). Тогда функция $q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(1.16) \quad m \frac{d^2 q}{dt^2} = \varphi(q) = -\frac{\partial f}{\partial q}(q),$$

где $f(q) = -\int_{\eta}^q \varphi(y) dy$. Уравнение (1.16) с гладкой периодической функцией $f(q)$ есть уравнение маятникового типа, которое имеет стационарные решения (положения равновесия) в точках $\tilde{q}$, где $\varphi(\tilde{q}) = 0$.

Рассмотрим значение $q = q'$, где функция $f(q)$ достигает минимума, и ближайшее к q' значение q'' , где функция $f(q)$ имеет локальный максимум. В достаточно малой окрестности q' решения уравнения (1.16) являются периодическими, и для них соответствующее решение $(q_n(t))$ уравнения (1.1) имеет тип бегущей волны, а число τ в равенстве (1.6) есть период периодического решения $q_n(t)$. При приближении к точке $q = q''$ период периодического решения $q(t)$ уравнения (1.16) стремится к бесконечности, и поэтому множество значений τ , для которых соответствующие решения $(q_n(t))$ уравнения (1.1) удовлетворяют равенству (1.6), содержит бесконечный интервал $k \leq \tau < \infty$. Обозначая через Q_1 множество этих решений $(q_n(t))$, мы получаем утверждения 1) и 2) теоремы 1.8. Уравнение (1.16) имеет также неограниченные решения, которые периодическими не являются, и, обозначая через Q_2 множество соответствующих решений уравнения (1.1), мы в силу (1.8) получаем утверждение 3) теоремы 1.8. Теорема 1.8 доказана.

ТЕОРЕМА 1.9. *Предположим, что в уравнении (1.1) при всех $n \in \mathbb{Z}$ параметры $m_n = m > 0$ и справедливо равенство*

$$(1.17) \quad \varphi(q) \equiv -\varphi(-q).$$

Тогда уравнение (1.1) обладает семейством решений Q таким, что

- 1) *любое решение $(q_n(t)) \in Q$ является периодическим и имеет тип бегущей волны;*

- 2) если $(q_n(t)) \in Q$, то при любом $n \in \mathbb{Z}$ $q_n(t) \neq 0$, $q_n(t) \equiv -q_{n+1}(t)$, а $(na + q_n(t))$ – периодическое решение, не являющееся пространственно однородным, амплитуда колебаний которого может быть сколь угодно большой.

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 1.7, будем искать такое решение $(q_n(t))$ уравнения (1.1), что выполнено равенство (1.11). В этом случае в силу (1.1) и (1.17) при любом $n \in \mathbb{Z}$ функция $q_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(1.18) \quad m \frac{d^2 q_n}{dt^2} = \varphi(q_n) - 4q_n,$$

и любое решение уравнения (1.18) порождает решение уравнения (1.1), удовлетворяющее (1.11). Уравнение (1.18) можно представить в потенциальной форме (1.14), где потенциал $U(q_n)$ имеет вид $U(q_n) = -\int_0^{q_n} \varphi(q) dq + 2q_n^2$. В силу (1.17) $U(q_n)$ – четная функция и существует такое значение q^* , что для любого $\sigma > q^*$ существует периодическое решение $q_n(t) \neq 0$ уравнения (1.18), имеющее амплитуду колебаний, равную σ , период колебаний $T > 0$ и полупериод $\tau = T/2$ такой, что справедливо равенство (1.15).

Так как в силу (1.17) $\varphi(0) = 0$, то утверждения 1) и 2) теоремы 1.9 очевидно следуют из равенств (1.11) и (1.15). Теорема 1.9 доказана.

В основополагающей работе [1] Я. И. Френкель и Т. А. Конторова поставили задачу изучения движения счетного числа точек P_n на прямой, взаимодействующих между собой с помощью потенциала

$$U = \gamma \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(q_n) + \chi \sum_{n \in \mathbb{Z}} (q_{n+1} - q_n - a)^2,$$

где n – целое число, q_n – координата точки P_n на прямой, $f(q)$ – бесконечно-дифференцируемая функция, имеющая по q период $a > 0$, которая в точках $q = na$ имеет минимум, а в точках $q = (n + \frac{1}{2})a$ – максимум, $\gamma > 0$, $\chi > 0$ – параметры. Физически это означает, что система представляет собой цепочку пружинок, находящихся во внешнем поле с потенциалом $\gamma f(q)$ (рис. 1.3).

Рис. 1.3. Цепочка пружинок во внешнем периодическом поле

Если обозначить массу частицы P_n через M_n , ее скорость – через v_n , а импульс – через $p_n = M_n v_n$, то гамильтониан H (см. § 7, гл. 1) примет вид

$$H = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{p_n^2}{2M_n} + U,$$

и поэтому, полагая $\psi(q) = \frac{df}{dq}(q)$, получим, что движение частиц во времени t описывается с помощью следующей бесконечной системы уравнений

$$(1.19) \quad M_n \frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\gamma \psi(q_n) + 2\chi(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

которые совпадают с уравнением (1.1), если положить

$$m_n = \frac{M_n}{2\chi}, \quad \varphi(q) = -\frac{\gamma}{2\chi} \psi(q).$$

В случае, когда массы всех частиц P_n одинаковые и равны $M > 0$, а $f(q) = 1 - \cos \frac{2\pi q}{a}$, эта система уравнений впервые была выписана в работе [1], в которой изучалась следующая задача. Рассмотрим движение частиц в окрестности стационарного решения $q_n(t) \equiv na, n \in \mathbb{Z}$. С этой целью введем неизвестные величины ξ_n с помощью равенств $q_n = na + \xi_n$ и перепишем для указанного частного случая систему уравнений (1.19) через переменные ξ_n в виде системы уравнений

$$(1.20) \quad M \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -\frac{2\pi\gamma}{a} \sin \frac{2\pi \xi_n}{a} + 2\chi(\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

которые совпадают с уравнениями (1.7), если в них положить $q_n = \xi_n$, $m = \frac{M}{2\chi}$, $h = \frac{\pi\gamma}{a\chi}$.

Задача Френкеля–Конторовой состоит в следующем: требуется найти решение $\xi_n(t) \not\equiv 0$ ($n \in \mathbb{Z}$) системы (1.20), удовлетворяющее при всех $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ равенствам

$$(1.21) \quad \xi_n(t) = \xi_{n+1}(t + \tau),$$

где τ – константа, не зависящая от t и n , удовлетворяющая условию

$$(1.22) \quad M < 2\chi\tau^2.$$

Впервые строгое решение этой задачи получено в работе [41] и отражено в теоремах 1.6 и 1.7 этого параграфа.

Действительно, согласно определению 1.11 и условиям (1.20) и (1.21), $\xi_n(t)$ является решением, имеющим тип бегущей волны, а в теоремах 1.6 и 1.7 были найдены два различных семейства Q_1 и Q таких решений. При этом, согласно утверждению 1) теоремы 1.6 и утверждению 2) теоремы 1.7, множество значений τ в равенстве (1.21) содержит бесконечный интервал $k \leq \tau < \infty$, и, следовательно, существует такое число $k^* > k$, что значения τ , расположенные в интервале $k^* \leq \tau < \infty$, удовлетворяют как равенству (1.21), так и неравенству (1.22). Таким образом, задача Френкеля–Конторовой полностью решена. Отметим, что в случае семейства Q_1 , согласно утверждению 2) теоремы 1.6, амплитуда колебаний решения $q_n(t) = na + \xi_n(t)$ ($n \in \mathbb{Z}$) системы уравнений (1.19) не превосходит $a/2$ (рис. 1.1), а в случае семейства Q , согласно утверждению 3) теоремы 1.7, амплитуда колебаний решения $q_n(t)$ может быть сколь угодно большой (рис. 1.2). В результате возникает явление обменной диффузии, при котором порядок расположения частиц на прямой периодически меняется (рис. 1.2).

В связи с задачей Френкеля–Конторовой и результатами этого параграфа (теоремы 1.6–1.9) представляется естественным сформулировать некоторые нерешенные в настоящее время проблемы, касающиеся решений, имеющих тип бегущей волны.

ПРОБЛЕМА 1.1. *Существует ли хотя бы одно решение уравнений (1.1) и (1.7), имеющее тип бегущей волны, отличное от следующих:*

- а) $q_n(t) \equiv \eta$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(\eta) = 0$ (пример 1.3);
- б) $(q_n(t)) \in Q_1$, $(q_n(t)) \in Q$, где Q_1 – семейство решений, построенное в теоремах 1.6 и 1.8, а Q – семейство, построенное в теоремах 1.7 и 1.9;
- в) $(\eta + q_n(t))$, где $\varphi(\eta) = 0$, а решение $(q_n(t)) \in Q_1$ или $(q_n(t)) \in Q$.

ПРОБЛЕМА 1.2. *Найти все решения уравнений (1.1) и (1.7), имеющих тип бегущей волны.*

§ 4. Неустойчивость стационарных и периодических решений в случае равных масс

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, что в случае, когда все массы $m_n = m > 0$, стационарные решения из примера 1.1 § 3 и периодические решения, построенные в теоремах 1.6 и 1.8 § 3 и принадлежащие семейству Q_1 , – неустойчивые относительно изменения начальных данных в пространствах Ω , Ω_∞ и Ω_∞^* , определенных в § 2. Применительно к пространству Ω_∞^* это означает, что малое изменение начальных данных $\{(q_n^*), (v_n^*)\} \in \Omega_\infty^*$ в смысле расстояния $\rho^{(k)}(\cdot, \cdot)$ (определение 1.6 § 2) при любом целом $k \geq 0$ может приводить к большому изменению функций $q_n(t)$, составляющих решение $(q_n(t))$ уравнения

$$(1.23) \quad m \frac{d^2 q_n}{dt^2} = \varphi(q_n) + q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

а применительно к пространствам Ω и Ω_∞ это означает, что малое изменение соответствующих начальных данных $(q_0^*(t), q_1^*(t))$ в смысле нормы $\|\cdot\|^{(k)}$ (определение 1.5 § 2) при любом целом $k \geq 0$ также может приводить к большому изменению функций $q_n(t)$ для достаточно больших $|n|$.

Для доказательства этих утверждений обозначим через $(\tilde{q}_n(t))$ указанное выше стационарное или периодическое решение уравнения (1.23), неустойчивость которого мы хотим установить, и введем преобразование

$$I: (q_{n-1}(t), q_n(t)) \rightarrow (q_n(t), q_{n+1}(t)),$$

которое в силу (1.23) имеет следующий вид:

$$I(x(t), y(t)) = (x'(t), y'(t)),$$

где

$$(1.24) \quad x'(t) = y(t), \quad y'(t) = -x(t) + 2y(t) - \varphi(y(t)) + m \frac{d^2 y}{dt^2}(t).$$

Если теперь I линеаризовать в точке, соответствующей решению $(\tilde{q}_n(t))$, то в силу (1.24) получим, что линейная часть dI в этой точке имеет вид $dI(dx, dy) = (dx', dy')$, где

$$dI = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - \Delta^2 \end{pmatrix} - \text{операторная матрица,}$$

в которой $\Delta^2 = -m \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dq}(\tilde{q}(t))$ – оператор Шрёдингера с периодическим потенциалом, а $\tilde{q}(t)$ периодическая функция, которая в силу определения решения ($\tilde{q}_n(t)$) не зависит от n . Так как спектр оператора Δ^2 уходит на бесконечность, то неподвижная точка $(0, 0)$ будет гиперболической относительно действия матрицы $dI(t)$, которая получается из оператора dI , если его рассматривать как матрицу, зависящую от t в плоскости, натянутой на $dx(t)$ и $dy(t)$, где $dy(t)$ – собственная функция, соответствующая достаточно большим значениям спектра.

Поэтому точка $(0, 0)$ будет неустойчивой относительно $dI(t)$, что и приводит к неустойчивости указанных выше решений уравнения (1.23).

§ 5. Устойчивость стационарных решений и бесконечно-мерный аналог теории КАМ

В этом параграфе будут сформулированы теорема 1.10 и ее следствие 1.4, согласно которым, при некоторых общих предположениях на функцию $\varphi(q)$ и параметры m_n , стационарное решение уравнения (1.1), имеющее вид

$$(1.25) \quad q^0 = (q_n^0(t)), \quad q_n^0(t) = q_n^0 \equiv \eta + na,$$

в котором

$$(1.26) \quad \varphi(\eta) = 0,$$

а η – константа, не зависящая от n и t , будет устойчиво по Ляпунову относительно изменения начальных данных в любом из трех фазовых пространств $\Omega, \Omega_\infty, \Omega_\infty^*$, введенных в § 2. Это означает, что малое изменение начальных данных по норме в соответствующем фазовом пространстве приводит к малому изменению координат $q_n(t)$ и импульсов $p_n(t) = m_n \frac{dq_n}{dt}$ соответствующей гамильтоновой системы (§ 7, гл. 1) при всех $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$. Утверждение теоремы 1.10 и следствия 1.4 справедливы для любого стационарного решения ($q_n(t)$) уравнения (1.1), в котором при произвольном $n \in \mathbb{Z}$ функция $q_n(t)$ принимает одно из значений вида $\eta + ka$, где $\varphi(\eta) = 0$, а k – целое число. В качестве следствия теоремы 1.10 мы находим, что в рассматриваемой ситуации имеет место бесконечно-мерный аналог теории КАМ (теорема 1.11 и ее следствие 1.5): в любой окрестности стационарного решения (1.25) существуют семейства квази-периодических решений уравнения (1.1) с континуальным, счетным и любым конечным числом рационально независимых частот и торы произвольной конечной и бесконечной размерности, на которых решения уравнения (1.1) порождают квази-периодические движения.

Утверждения теорем 1.10 и 1.11 справедливы, если в качестве функции $\varphi(q)$ взять функцию $\varphi(q) = -h \sin \frac{2\pi q}{a}$, где константа h удовлетворяет неравенствам следствия 1.1 теоремы 1.10; они справедливы также для всех функций, близких к функции $\varphi(q)$ из следствия 1.1 (следствие 1.2).

Напомним, что, согласно определениям 1.2–1.4 § 2, пространства Ω и Ω_∞ состоят из пар

$$(1.27) \quad (q_0^*(t), q_1^*(t)) \in \Omega, \quad (q_0^*(t), q_1^*(t)) \in \Omega_\infty$$

бесконечно-дифференцируемых и целых аналитических функций $q_0^*(t), q_1^*(t)$, определенных на прямой $t \in \mathbb{R}$, а пространство Ω_∞^* состоит из двух последовательностей чисел (q_n^*) и (v_n^*) , где $n \in \mathbb{Z}$:

$$(1.28) \quad \{(q_n^*), (v_n^*)\} \in \Omega_\infty^*.$$

При этом в силу теорем 1.3 и 1.5 § 2 любое решение $(q_n(t))$ уравнения (1.1) однозначно определяется начальными данными из Ω и Ω_∞ так, что

$$(1.29) \quad q_0(t) = q_0^*(t), \quad q_1(t) = q_1^*(t),$$

и начальными данными из Ω_∞^* так, что для $n \in \mathbb{Z}$

$$(1.30) \quad q_n(t^*) = q_n^*, \quad \frac{dq_n}{dt}(t^*) = v_n^*,$$

где t^* – начальный момент времени. Согласно (1.27)–(1.30) стационарное решение (1.25) однозначно определяется любым из следующих трех видов начальных данных:

$$(1.31) \quad (\eta, \eta + a) \in \Omega, \quad q_0^*(t) \equiv \eta, \quad q_1^*(t) \equiv \eta + a;$$

$$(1.32) \quad (\eta, \eta + a) \in \Omega_\infty, \quad q_0^*(t) \equiv \eta, \quad q_1^*(t) \equiv \eta + a;$$

$$(1.33) \quad \{(\eta + na), (0)\} \in \Omega_\infty^*, \quad q_n^* = \eta + na, \quad v_n^* = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \dots)$ – односторонняя последовательность, состоящая из заранее фиксированных положительных чисел κ_s ($s = 0, 1, \dots$). Далее будут рассматриваться возмущения начальных данных (1.31)–(1.33) следующего вида:

$$(1.34) \quad (q_0^*(t), q_1^*(t)) = (\eta + \Delta_0(t), \eta + a + \Delta_1(t)) \in \Omega^{(\kappa)}(q^0),$$

$$(1.35) \quad (q_0^*(t), q_1^*(t)) = (\eta + \Delta_0(t), \eta + a + \Delta_1(t)) \in \Omega_\infty^{(\kappa)}(q^0),$$

$$(1.36) \quad \{(q_n^*), (v_n^*)\} = \{(\eta + na + \tilde{\Delta}_n^*), (\tilde{\Delta}_n^*)\} \in \Omega_\infty^{*(\kappa)}(q^0),$$

где q_0 – стационарное решение, введенное в (1.25), $\Omega^{(\kappa)}(q^0)$, $\Omega_\infty^{(\kappa)}(q^0)$, $\Omega_\infty^{*(\kappa)}(q^0)$ – множества, введенные в определении 1.7 § 2, $\Delta_0(t)$ и $\Delta_1(t)$ – функции, определенные на прямой $t \in \mathbb{R}$, которые являются бесконечно-дифференцируемыми в равенстве (1.34) и целыми аналитическими в равенстве (1.35), а Δ_n^* и $\tilde{\Delta}_n^*$ – числа. В силу определения 1.7 § 2 и (1.31), (1.32) соотношения (1.34) и (1.35) соответственно эквивалентны неравенствам:

$$(1.37) \quad \|\Delta\|^{(k)} \leq \kappa_k,$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta = (\Delta_0(t), \Delta_1(t)) \in \Omega$ для неравенства (1.34) и $\Delta = (\Delta_0(t), \Delta_1(t)) \in \Omega_\infty$ для неравенства (1.35), а соотношение (1.36) эквивалентно неравенствам

$$(1.38) \quad \rho^{(k)}(\{(q_n^*), (v_n^*)\}, \{(\eta + na), (0)\}) \leq \kappa_k; \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\|\cdot\|^{(k)}$ – норма, введенная в определении 1.5 § 2, а $\rho^{(k)}(\cdot, \cdot)$ – расстояние в пространстве Ω_∞^* , введенное в определении 1.6 § 2.

ТЕОРЕМА 1.10. *Предположим, что $m_n \leq M$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, существует такое $\delta_0 > 0$, что в области $|q - \eta| \leq \delta_0$ функция $\varphi(q)$ аналитична, и выполнены следующие условия:*

- 1) $0 < \frac{d\varphi}{dq}(\eta) < 4$;
- 2) $\frac{d\varphi}{dq}(\eta) \neq 2 - 2 \cos \frac{2\pi s}{l}$ ($s = 0, \pm 1, \dots, \pm l$; $l = 1, 2, 3, 4$);
- 3) $b_0(\lambda) \frac{d^3\varphi}{dq^3}(\eta) + b_1(\lambda) \left(\frac{d^2\varphi}{dq^2}(\eta) \right)^2 \neq 0$, где

$$b_0(\lambda) = -\frac{\lambda}{2(\lambda - \bar{\lambda})},$$

$$b_1(\lambda) = \frac{\lambda^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^2(1 - \lambda)} - \frac{1}{(\lambda - \bar{\lambda})^2(1 - \bar{\lambda})} + \frac{\lambda^2}{2(\lambda - \bar{\lambda})^2(\lambda^2 - \lambda)} - \frac{1}{2(\lambda - \bar{\lambda})^2(\lambda^2 - \bar{\lambda})},$$

λ – собственное значение матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{d\varphi}{dq}(\eta) & 1 \\ -\frac{d\varphi}{dq}(\eta) & 1 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющее условию $\text{Im } \lambda > 0$, а $\bar{\lambda}$ – число, комплексно-сопряженное к λ . Тогда существуют такие константы $m_n^0 > 0$ ($n \in \mathbb{Z}$), зависящие только от последовательности κ , числа M и функции $\varphi(q)$, что если при каком-либо n_0 и $|n| \geq n_0$ числа m_n удовлетворяют условиям $m_n \leq m_n^0$, то стационарное решение $q^0 = (q_n^0)$ из (1.25) устойчиво в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и натуральное число k_0 , зависящие от ε , такие, что если выполнено какое-либо из трех условий

- а) соотношение (1.34) и $\|(\Delta_0(t), \Delta_1(t))\|^{(k_0)} \leq \delta$,
- б) соотношение (1.35) и $\|(\Delta_0(t), \Delta_1(t))\|^{(k_0)} \leq \delta$,
- в) соотношение (1.36) и $\rho^{(k_0)}(\{(q_n^*), (v_n^*)\}, \{(\eta + na), (0)\}) \leq \delta$,

то решение $(q_n(t))$ уравнения (1.1) с начальными данными (1.34)–(1.36) при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$|q_n(t) - q_n^0| \leq \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 1.10 будет проведено в следующем параграфе. Здесь же мы сформулируем и докажем следствия 1.1–1.4 из теоремы 1.10, теорему 1.11 и ее следствие 1.5.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Если в условии теоремы 1.10 функция $\varphi(q) = -h \sin \frac{2\pi q}{a}$, $0 < h < \frac{2a}{\pi}$, $h \neq \frac{a}{\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi s}{l}\right)$ ($s = 0, \pm 1, \dots, \pm l$; $l = 1, 2, 3, 4$), а число $\eta = -\frac{a}{2}$, то справедливо утверждение теоремы 1.10.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить справедливость условия 3) теоремы 1.10, так как условия 1) и 2) вытекают непосредственно. В силу формулировки следствия 1.1 выполнены соотношения $\frac{d^2\varphi}{dq^2}(\eta) = 0$, $\frac{d^3\varphi}{dq^3}(\eta) \neq 0$, $\lambda \neq \bar{\lambda}$, которые и приводят к справедливости условия 3).

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Утверждение теоремы 1.10 справедливо для всех функций $\varphi(q)$, близких вместе с первыми тремя производными к функции $\varphi(q)$ из формулировки следствия 1.1.*

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Утверждение теоремы 1.10 выполнено в тех случаях, когда возмущения $\Delta_\nu(t)$ ($\nu = 0, 1$) в (1.34) и (1.35) представляются в виде функций*

$$(1.39) \quad \Delta_\nu(t) = \int_{|\omega| \leq N} h_\nu(\omega) \sin(u(\omega) + \omega t) d\omega, \quad \Delta_\nu(t) = \sum_k h_\nu^{(k)} \sin(u_k + \omega_k t),$$

где $h_\nu(\omega)$ — абсолютно интегрируемая вещественная функция, $u(\omega)$ — измеримая по Лебегу вещественная функция, u_k, ω_k — вещественные числа, $|h_\nu(\omega)| \leq \gamma$, $\sum_k |h_\nu^{(k)}| \leq \gamma$, $|\omega_k| \leq N$, индекс k пробегает конечное или счетное множество, γ — достаточно малая положительная константа, не зависящая от ν и ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.39) и определения 1.7 (§2) для некоторой последовательности чисел $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \dots)$ функции $\Delta_\nu(t)$ ($\nu = 0, 1$) на прямой $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяют одному из соотношений (1.34), (1.35), и поэтому к ним применима теорема 1.10. При фиксированном $\varepsilon > 0$, выбирая достаточно малое $\gamma > 0$, согласно (1.39) мы удовлетворим одному из соотношений а), б) в условии теоремы 1.10, а это и приводит к справедливости утверждения теоремы 1.10. Следствие 1.3 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Предположим, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ параметры m_n в уравнении (1.1) удовлетворяют неравенствам $m_n \leq M$. Тогда существует такая константа K , зависящая только от числа M и функции $\varphi(q)$, что решения $(q_n(t))$ уравнения (1.1), найденные в теореме 1.10 и удовлетворяющие неравенствам $|q_n(t) - q_n^0| \leq \varepsilon$ ($n \in \mathbb{Z}$), при всех $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ также удовлетворяют неравенствам $|p_n(t)| \leq K\varepsilon$, где $p_n(t) = m_n \frac{dq_n}{dt}(t)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида уравнения (1.1) и (1.25), (1.26) следует равенство

$$\frac{dp_n}{dt}(t) = \varphi(q_n(t)) - \varphi(q_n^0) + (q_{n+1}(t) - q_{n+1}^0) - 2(q_n(t) - q_n^0) + (q_{n-1}(t) - q_{n-1}^0),$$

которое приводит к неравенству

$$\left| \frac{dp_n}{dt}(t) \right| \leq \varepsilon \left(4 + \max_{0 \leq q \leq a} \left| \frac{d\varphi}{dq}(q) \right| \right).$$

Поэтому утверждение следствия 1.4 вытекает из формулы Тейлора для функции $m_n q_n(t)$:

$$m_n q_n(t+1) = m_n q_n(t) + p_n(t) + \frac{1}{2} \frac{dp_n}{dt}(\Theta),$$

где $t \leq \Theta \leq t+1$. Следствие 1.4 доказано.

ТЕОРЕМА 1.11 (бесконечно-мерный аналог теории КАМ). *Предположим, что выполняются все условия теоремы 1.10. Тогда существуют такие константы $m_n^0 > 0$ ($n \in \mathbb{Z}$), что если при каком-либо n_0 и $|n| \geq n_0$ числа m_n удовлетворяют неравенствам $m_n \leq m_n^0$, то при любом $\varepsilon > 0$ существуют такие бесконечные множества квази-периодических решений $(q_n(t))$ уравнения (1.1) с непрерывным, счетным и любым конечным количеством рационально независимых частот, что при всех $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$(1.40) \quad |q_n(t) - q_n^0| \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим квази-периодические функции $q_0^*(t)$ и $q_1^*(t)$ в (1.34) и (1.35) с указанным в теореме 1.11 количеством рационально независимых частот, используя функции $\Delta_0(t)$ и $\Delta_1(t)$, которые введены в следствии 1.3 с помощью равенств (1.39). Пусть δ_0 – константа, введенная в условии теоремы 1.10. Согласно утверждению теоремы 1.10 и следствию 1.3, для любого положительного $\varepsilon \leq \delta_0$ существуют такие константы $m_n^0 > 0$, что если при каком-либо n_0 и $|n| \geq n_0$ справедливы неравенства $m_n \leq m_n^0$, то решение $(q_n(t))$ уравнения (1.1) с начальными данными $(q_0^*(t), q_1^*(t))$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам (1.40). Так как при этом функции $q_0(t)$ и $q_1(t)$, входящие в решение $(q_n(t))$, имеют вид $q_0(t) = q_0^*(t)$, $q_1(t) = q_1^*(t)$, а согласно условию теоремы 1.10 функция $\varphi(q)$ имеет период a по q и аналитична в области $|q - \eta| \leq \delta_0$, то в силу определений 7)–10) (см. общие обозначения и определения) из вида уравнения (1.1), из теоремы 1.3 §2, из равенства (1.25) и неравенств (1.40) и $\varepsilon \leq \delta_0$ следует, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ функции $q_n(t)$ будут квази-периодическими с тем же набором частот, что и функции $\Delta_0(t), \Delta_1(t)$. Теорема 1.11 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Если выполнены условия теоремы 1.10 и при $|n| \geq n_0$ справедливы неравенства $m_n \leq m_n^0$ (m_n^0 – константы, найденные в теореме 1.10), то для любого $\varepsilon > 0$ в области $\Gamma_\varepsilon = \{\vec{q} = (q_n) : |q_n - q_n^0| \leq \varepsilon, n \in \mathbb{Z}\}$ существуют инвариантные множества, составленные из решений уравнения (1.1), которые представляют собой торы любой конечной размерности, счетно-мерные торы и существенное подмножество тора континуальной размерности (п. п. 12), 13), общие обозначения и определения), а решения уравнения (1.1), расположенные на этих торах, порождают на них квази-периодические движения (п. 14), общие обозначения и определения).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в выражениях (1.39) для функций $\Delta_\nu(t)$, введенных в следствии 1.3, при фиксированных числах $h_\nu^{(k)}$ и функции $h_\nu(\omega)$ менять произвольным образом числа u_k в области $0 \leq u_k < 2\pi$ и измеримую функцию $u(\omega)$ в области $0 \leq u(\omega) < 2\pi$, то в силу теоремы 1.11 при достаточно малом $\gamma > 0$ множество соответствующих решений уравнения (1.1) лежит в области Γ_ε , будет заполнять конечно-мерный или счетно-мерный тор, если, соответственно, множество чисел k – конечное или счетное, а функции $\Delta_\nu(t)$ ($\nu = 0, 1$) определяются с помощью второго равенства в (1.39), и будет заполнять существенное подмножество тора континуальной размерности, если функции $\Delta_\nu(t)$ определяются с помощью первого равенства

в (1.39). При этом, согласно теореме 1.11 и определениям 11)–14) (общие обозначения и определения), решения уравнения (1.1) порождают на соответствующем торе квази-периодические движения: $\tilde{u}_k(t) = u_k + \omega_k t \pmod{2\pi}$ в случае конечно-мерного или счетно-мерного тора, и $\tilde{u}(t) = u(\omega) + \omega t \pmod{2\pi}$ в случае тора континуальной размерности. Следствие 1.5 доказано.

§ 6. Доказательство теоремы 1.10

Для любого натурального числа s обозначим через

$$\varphi_s = \sup_{\substack{1 \leq k \leq s \\ 0 \leq q \leq a}} \left| \frac{d^k \varphi}{dq^k}(q) \right|.$$

Нам потребуются четыре леммы.

ЛЕММА 1.2. Пусть $G(t) = \varphi(q(t))$, s – натуральное число. Тогда выражение для производной $\frac{d^s G}{dt^s}(t)$ есть сумма не более чем $s!$ одночленов, каждый из которых есть произведение какой-либо производной $\frac{d^k \varphi_k}{dq^k}(q)$ ($1 \leq k \leq s$) на произведение производных по t порядка, не превосходящего s , от функции $q(t)$ в количестве, не превосходящем s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по s . При $s = 1$ утверждение леммы 1.2 очевидно. Предположим, что утверждение справедливо для некоторого $s \geq 1$, и вычислим производную от выражения $\frac{d^s G}{dt^s}(t)$ по t . При вычислении производной от каждого одночлена мы получим не более чем $s + 1$ одночленов, каждый из которых есть произведение какой-либо производной $\frac{d^k \varphi}{dq^k}(q)$ ($k \leq s + 1$) на произведение производных по t порядка, не превосходящего $s + 1$, от функции $q(t)$ в количестве, не превосходящем $s + 1$. Лемма 1.2 доказана.

ЛЕММА 1.3. Предположим, что бесконечно-дифференцируемая функция $q(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и натуральных s удовлетворяет условиям

$$\left| \frac{d^s q}{dt^s}(t) \right| \leq c^{(s)}, \quad 1 \leq c^{(s)} \leq c^{(s+1)},$$

а $G(t) = \varphi(q(t))$. Тогда

$$\left| \frac{d^s G}{dt^s}(t) \right| \leq \varphi_s s! (c^{(s)})^s.$$

Лемма 1.3 есть очевидное следствие леммы 1.2.

ЛЕММА 1.4. Предположим, что для всех натуральных s и $\nu = n, n - 1$ функция $q_\nu(t)$ – бесконечно-дифференцируемая, $\left| \frac{d^s q_\nu}{dt^s}(t) \right| \leq c_n^{(s)}$, $m_\nu \leq M$, где $1 \leq c_n^{(s)} \leq c_n^{(s+1)}$, а $q_{n+1}(t)$ и $q_{n-2}(t)$ – функции, удовлетворяющие уравнению (1.1) при заданных функциях $q_n(t)$ и $q_{n-1}(t)$. Тогда при $i = n + 1$, $n - 2$ имеем $\left| \frac{d^s q_i}{dt^s}(t) \right| \leq c_{n+1}^{(s)}$, где $c_{n+1}^{(s)} = 3c_n^{(s)} + \varphi_s \cdot s! (c_n^{(s)})^s + M c_n^{(s+2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.1) имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned}\frac{d^s q_{n+1}}{dt^s} &= -\frac{d^s q_{n-1}}{dt^s} + 2\frac{d^s q_n}{dt^s} - \frac{d^s \varphi(q_n(t))}{dt^s} + m_n \frac{d^{s+2} q_n}{dt^{s+2}}, \\ \frac{d^s q_{n-2}}{dt^s} &= -\frac{d^s q_n}{dt^s} + 2\frac{d^s q_{n-1}}{dt^s} - \frac{d^s \varphi(q_{n-1}(t))}{dt^s} + m_{n-1} \frac{d^{s+2} q_{n-1}}{dt^{s+2}}.\end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что при $i = n+1, n-2$

$$\left| \frac{d^s q_i}{dt^s}(t) \right| \leq 3c_n^{(s)} + M c_n^{(s+2)} + \max_{i=n, n-1} \left| \frac{d^s \varphi(q_i(t))}{dt^s} \right|.$$

Применяя теперь лемму 1.3, получим утверждение леммы 1.4. Лемма 1.4 доказана.

ЛЕММА 1.5. *Предположим, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ $m_n \leq M$, а начальные данные решения $(q_n(t))$ уравнения (1.1) удовлетворяют какому-либо из соотношений (1.34), (1.35), (1.36). Тогда существуют такие константы $m_n^0 > 0$, что если при каком-либо n_0 и $|n| \geq n_0$ выполнены неравенства $m_n \leq m_n^0$, то решение $q_n(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^2 q_n}{dt^2}(t) \right| \leq c^*,$$

где c^* — константа, не зависящая от начальных данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было указано в §5, условия (1.34), (1.35), (1.36) эквивалентны условиям (1.37), (1.38) соответственно. Поэтому утверждение леммы 1.5 очевидно следует из определений 1.5 и 1.6 §2 и леммы 1.4. Лемма 1.5 доказана.

Предположим, что $(q_n(t))$ есть решение уравнения (1.1). Введем преобразование A и две последовательности семейств преобразований $B'_k(t)$, $B''_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) плоскости u, z , зависящих от параметра t . Преобразование A есть отображение, которое определяется с помощью равенства

$$(1.41) \quad A: (u, z) \rightarrow (u', z') = (u + z', z - \varphi(u)),$$

а $B'_k(t)$ и $B''_k(t)$ — отображения, которые задаются с помощью функций $q_n(t)$:

$$(1.42) \quad B'_k(t): (u, z) \rightarrow (u'_k(t), z'_k(t)) = \left(u, z + m_k \frac{d^2 q_k}{dt^2}(t) \right),$$

$$(1.43) \quad B''_k(t): (u, z) \rightarrow (u''_k(t), z''_k(t)) = \left(u, z + m_{-k+1} \frac{d^2 q_{-k+1}}{dt^2}(t) \right).$$

Вводя функции

$$\begin{aligned}z'_{n+1}(t) &= q_{n+1}(t) - q_n(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ z''_{n-1}(t) &= q_{n-1}(t) - q_n(t) \quad (n = 1, 0, -1, -2, \dots),\end{aligned}$$

мы из уравнения (1.1) получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} (q_{n+1}(t), z'_{n+1}(t)) &= B'_n(t) \circ A(q_n(t), z'_n(t)) & (n = 1, 2, \dots), \\ (q_{n-1}(t), z''_{n-1}(t)) &= B''_{1-n}(t) \circ A(q_n(t), z''_n(t)) & (n = 0, -1, -2, \dots), \end{aligned}$$

которые приводят к равенствам

$$(1.44) \quad (q_k(t), z'_k(t)) = B'_{k-1}(t) \circ A \circ B'_{k-2}(t) \circ A \circ \dots \circ B'_1(t) \circ A(q_1(t), z'_1(t)) \\ (k = 2, 3, \dots),$$

$$(1.45) \quad (q_r(t), z''_r(t)) = B''_{-r}(t) \circ A \circ B''_{-r-1}(t) \circ A \circ \dots \circ B''_1(t) \circ A(q_0(t), z''_0(t)), \\ (r = -1, -2, \dots).$$

Введем две последовательности преобразований A'_k, A''_k ($k = 1, 2, \dots$) плоскости u, z следующим образом:

$$(1.46) \quad A'_k: (u, z) \rightarrow (\tilde{u}'_k, \tilde{z}'_k) = A(ka + \eta + u, z + a) - (ka + \eta + a, a),$$

$$(1.47) \quad A''_k: (u, z) \rightarrow (\tilde{u}''_k, \tilde{z}''_k) = A(-ka + \eta + a + u, z - a) - (-ka + \eta, -a),$$

где η — величина, введенная в (1.25) и (1.26). В силу (1.41), (1.46) и (1.47) преобразования A'_k, A''_k не зависят от k и совпадают с преобразованием $\tilde{A}$, имеющим следующий вид

$$(1.48) \quad \tilde{A}: (u, z) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{z}) = (u + \tilde{z}, z - \varphi(u + \eta)).$$

ЛЕММА 1.6. *Существуют такие константы $m_n^0 > 0$, зависящие только от числа M , последовательности $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \dots)$ и от функции $\varphi(q)$, что если при каком-либо n_0 и $|n| \geq n_0$ массы m_n удовлетворяют условиям $m_n \leq m_n^0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и натуральное число k_0 , что если выполнено какое-либо из соотношений (1.34)–(1.36), а при $\nu = 0, 1$ и $t \in \mathbb{R}$ функция $\Delta_\nu(t)$ удовлетворяет неравенствам*

$$(1.49) \quad |\Delta_\nu(t)| \leq \delta, \quad \left| \frac{d^k \Delta_\nu}{dt^k}(t) \right| \leq \delta \quad (k = 1, \dots, k_0),$$

то при всех $t \in \mathbb{R}$ и целых $k \geq 2$ функции $\tilde{q}'_k(t), \tilde{z}'_k(t), \tilde{q}''_k(t), \tilde{z}''_k(t)$, определенные с помощью равенств

$$\begin{aligned} (\tilde{q}'_k(t), \tilde{z}'_k(t)) &= B'_{k-1}(t) \circ \tilde{A} \circ \dots \circ B'_1(t) \circ \tilde{A}(\Delta_1(t), \Delta_1(t) - \Delta_0(t)), \\ (\tilde{q}''_k(t), \tilde{z}''_k(t)) &= B''_{k-1}(t) \circ \tilde{A} \circ \dots \circ B''_1(t) \circ \tilde{A}(\Delta_0(t), \Delta_0(t) - \Delta_1(t)), \end{aligned}$$

удовлетворяют неравенствам

$$|\tilde{q}'_k(t)| + |\tilde{z}'_k(t)| \leq \varepsilon, \quad |\tilde{q}''_k(t)| + |\tilde{z}''_k(t)| \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве m_n^0 константы, найденные в лемме 1.5, и покажем, что при выполнении условий теоремы 1.10 каждое из множеств преобразований $\tilde{A}$, $B'_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) и $\tilde{A}$, $B''_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.6 (§ 5, гл. 2), которые в нашем случае сводятся к следующим утверждениям:

I) преобразование $\tilde{A}$ определено в некоторой комплексной окрестности

$$V_{\varepsilon_0} = \{u, z : \max(|u|, |z|) \leq \varepsilon_0\},$$

где $\varepsilon_0 > 0$, и $(0, 0)$ — его неподвижная точка;

II) преобразование $\tilde{A}$ сохраняет площадь, имеет в точке $(0, 0)$ общий эллиптический тип и в его нормальной форме Биркгофа [51, § 21]

$$(1.50) \quad \alpha' = \alpha + \omega_0 + \omega_1 r + \dots + \omega_k r^k + \dots, \quad r' = r,$$

(α, r — полярные координаты; α — угол, r — радиус), коэффициент $\omega_1 \neq 0$;

III) коэффициент ω_0 , входящий в (1.50) и в выражения для собственных значений $\lambda = e^{i\omega_0}$, $\bar{\lambda} = e^{-i\omega_0}$, линейной части преобразования $\tilde{A}$ в точке $(0, 0)$, удовлетворяет неравенствам $\omega_0 \neq 2\pi \frac{s}{l}$ ($s = 0, \pm 1, \dots, \pm l$; $l = 1, 2, 3, 4$);

IV) при всех t и натуральных k $B'_k(t)$ и $B''_k(t)$ — гомеоморфизмы области $\text{Re } V_{\varepsilon_0}$ ($\text{Re } V_{\varepsilon_0}$ — вещественная часть V_{ε_0}), имеющие вид

$$\begin{aligned} B'_k(t): (u, z) &\rightarrow (u'_k(t), z'_k(t)) = (u + b'_{1k}(u, z, t), z + b'_{2k}(u, z, t)), \\ B''_k(t): (u, z) &\rightarrow (u''_k(t), z''_k(t)) = (u + b''_{1k}(u, z, t), z + b''_{2k}(u, z, t)), \end{aligned}$$

и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{(u, z) \in \text{Re } V_{\varepsilon_0} \\ t \in \mathbb{R}}} (|b'_{1k}(u, z, t)| + |b'_{2k}(u, z, t)| + |b''_{1k}(u, z, t)| + |b''_{2k}(u, z, t)|) < \infty.$$

Утверждение I) следует из (1.48) и условия теоремы (1.10), согласно которому функция $\varphi(q)$ аналитична в области $|q - \eta| \leq \delta_0$, а утверждение IV) — из (1.42), (1.43) и леммы 1.5. В силу (1.48) преобразование $\tilde{A}$ сохраняет площадь, а согласно условию 1) теоремы 1.10 след $\text{Sp } d\tilde{A}$ матрицы $d\tilde{A}(0, 0)$, задающей линейную часть $\tilde{A}$ в точке $(0, 0)$, удовлетворяет неравенству $|\text{Sp } d\tilde{A}| < 2$. Поэтому $\tilde{A}$ в точке $(0, 0)$ имеет эллиптический тип. Далее, из условия 2) теоремы 1.10 следует утверждение III), тогда как утверждение II) выводится из условия 3) теоремы 1.10 в результате приведения преобразования $\tilde{A}$ к нормальной форме Биркгофа в неподвижной точке $(0, 0)$. Таким образом, утверждения I)–IV) справедливы, и, следовательно, два множества преобразований $\tilde{A}$, $B'_k(t)$ и $\tilde{A}$, $B''_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) удовлетворяют условию теоремы 2.6 из § 5 гл. 2. Применяя эту теорему, получим следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\hat{\delta} > 0$, удовлетворяющее условию $\hat{\delta} \leq \varepsilon$, и натуральные числа $\hat{n}'$, $\hat{n}''$ такие, что если $|u| \leq \hat{\delta}$, $|z| \leq \hat{\delta}$, то для любых натуральных чисел $k' \geq \hat{n}'$, $k'' \geq \hat{n}''$ при всех $t \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |B'_{k'}(t) \circ \tilde{A} \circ \dots \circ B'_{\hat{n}'}(t) \circ \tilde{A}(u, z)| &\leq \varepsilon, \\ |B''_{k''}(t) \circ \tilde{A} \circ \dots \circ B''_{\hat{n}''}(t) \circ \tilde{A}(u, z)| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

(здесь $|(u, z)| = |u| + |z|$). Согласно двум последним неравенствам, для доказательства леммы 1.6 достаточно показать, что для любого $\widehat{\delta} > 0$ найдутся такое $\delta > 0$ и натуральное число k_0 , что если при $\nu = 0, 1$ и $k = 1, 2, \dots, k_0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства (1.49), то для всех $t \in \mathbb{R}$ и всех целых чисел s и r , удовлетворяющих условиям $1 \leq s \leq \widehat{n}' - 1, 1 \leq r \leq \widehat{n}'' - 1$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |B'_s(t) \circ \widetilde{A} \circ \dots \circ B'_1(t) \circ \widetilde{A}(\Delta_1(t), \Delta_1(t) - \Delta_0(t))| &\leq \widehat{\delta}, \\ |B''_r(t) \circ \widetilde{A} \circ \dots \circ B''_1(t) \circ \widetilde{A}(\Delta_0(t), \Delta_0(t) - \Delta_1(t))| &\leq \widehat{\delta}. \end{aligned}$$

Однако эти два последние неравенства и существование указанных выше чисел δ и k_0 очевидно следуют из определений преобразований $\widetilde{A}, B'_k(t), B''_k(t)$ и леммы 1.4. Лемма 1.6. доказана.

В силу определений 1.5, 1.6 (§2), если выполнено какое-либо из двух неравенств

$$\|(\Delta_0(t), \Delta_1(t))\|^{(k_0)} \leq \delta, \quad \rho^{(k_0)}(\{(q_n^*), (v_n^*)\}, \{(\eta + na), (0)\}) \leq \delta,$$

то выполнены неравенства (1.49). Поэтому, подставляя в равенства (1.44), (1.45) вместо преобразования A его выражения через преобразование $\widetilde{A} = A'_k = A''_k$, найденные с помощью равенств (1.46), (1.47), мы выводим утверждение теоремы 1.10 из леммы 1.6. Теорема 1.10 доказана.

§ 7. Гамильтонова форма уравнения с потенциалом Френкеля–Конторовой

Рассмотрим функцию $f(q)$, удовлетворяющую равенству

$$(1.51) \quad \varphi(q) = -\frac{df}{dq}(q),$$

и введем понятие гамильтониана уравнения (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Гамильтонианом уравнения (1.1) называется формальный ряд H следующего вида:

$$(1.52) \quad H = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{p_n^2}{2m_n} + f(q_n) + \frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n - \alpha)^2 \right),$$

где $p_n = m_n v_n$ — импульс точки P_n (см. введение), а α — константа, не зависящая от n .

Смысл этого определения, состоит в том, что оно приводит к следующему понятию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. Введем семейство функций H_{n_-, n_+} , зависящих от целых параметров n_- и n_+ , удовлетворяющих условию $n_- + 1 < n_+$, которое порождено гамильтонианом H :

$$(1.53) \quad H_{n_-, n_+} = \frac{1}{2}(q_{n_-+1} - q_{n_-} - \alpha)^2 + \sum_{n_- < n < n_+} \left(\frac{p_n^2}{2m_n} + f(q_n) + \frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n - \alpha)^2 \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Каждую функцию H_{n_-, n_+} мы будем рассматривать как функцию независимых переменных $q_{n_-+1}, p_{n_-+1}, \dots, q_{n_+-1}, p_{n_+-1}$, которая дополнительно зависит от параметров q_{n_-}, q_{n_+} .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Функция H_{n_-, n_+} является гамильтонианом системы частиц P_k ($n_- \leq k \leq n_+$), в которой заданы траектории $q_{n_-}(t)$ и $q_{n_+}(t)$ частиц P_{n_-} и P_{n_+} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если $n_- < n < n_+$, то производная $\frac{\partial H_{n_-, n_+}}{\partial p_n} = \frac{p_n}{m_n}$ не зависит от чисел n_- и n_+ , а если $n_- + 1 < n < n_+ - 1$, то производная $\frac{\partial H_{n_-, n_+}}{\partial q_n} = -\varphi(q_n) - (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})$ не зависит от чисел n_- и n_+ .

Предложение 1.1 и равенства (1.52), (1.53) дают основание ввести производные гамильтониана H по переменным q_n, p_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. Определим производные $\frac{\partial H}{\partial p_n}, \frac{\partial H}{\partial q_n}$ гамильтониана H следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_n} &= \frac{\partial H_{n_-, n_+}}{\partial p_n}, \quad \text{где } n_- < n < n_+; \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} &= \frac{\partial H_{n_-, n_+}}{\partial q_n}, \quad \text{где } n_- + 1 < n < n_+ - 1. \end{aligned}$$

В силу определения 1.14 и предложения 1.1 уравнение (1.1) эквивалентно следующей бесконечно-мерной системе Гамильтона:

$$(1.54) \quad \frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В основе теории конечно-мерных гамильтоновых систем лежит теорема об интегральном инварианте Пуанкаре–Картана [52], [12]. Эта теорема допускает обобщение на бесконечно-мерную систему Гамильтона (1.54). Для того, чтобы это обобщение сформулировать и доказать, нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1.7. Пусть n_- и n_+ — целые числа, $n_- + 1 < n_+$; рассмотрим две произвольные бесконечно-дифференцируемые функции $q_{n_-}^*(t), q_{n_+}^*(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) и множество, состоящее из $2(n_+ - n_- - 1)$ чисел $q_{n_-+1}^0, \dots, q_{n_+-1}^0, p_{n_-+1}^0, \dots, p_{n_+-1}^0$. Тогда существует единственное решение системы (1.54) такое, что в начальный момент времени t^0 имеют место равенства

$$q_n(t^0) = q_n^0, \quad p_n(t^0) = p_n^0, \quad n_- < n < n_+,$$

и при всех $t \in \mathbb{R}$

$$(1.55) \quad q_{n_-}(t) = q_{n_-}^*(t), \quad q_{n_+}(t) = q_{n_+}^*(t).$$

ТЕОРЕМА 1.12. *Справедливо следующее равенство:*

$$\oint_{\gamma_1} \sum_{n_- < n < n_+} p_n dq_n - H_{n_-, n_+} dt = \oint_{\gamma_2} \sum_{n_- < n < n_+} p_n dq_n - H_{n_-, n_+} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В конечно-мерном фазовом пространстве $q_{n_-+1}, p_{n_-+1}, \dots, q_{n_+-1}, p_{n_+-1}$ рассмотрим неавтономную гамильтонову систему с функцией Гамильтона

$$\begin{aligned} H^* &= H^*(q_{n_-+1}, p_{n_-+1}, \dots, q_{n_+-1}, p_{n_+-1}, t) \\ &= H_{n_-, n_+}(q_{n_-+1}, p_{n_-+1}, \dots, q_{n_+-1}, p_{n_+-1}; q_{n_-}^*(t), q_{n_+}^*(t)). \end{aligned}$$

В силу указанного в этом параграфе замечания 1.4 эта система описывает движение частиц $P_{n_-+1}, \dots, P_{n_+-1}$ при условии, что частицы P_{n_-} и P_{n_+} движутся согласно равенствам (1.55). Поэтому из определения трубки Π_{n_-, n_+} следует, что решения $(q_n(t), p_n(t))$ ($n \in \mathbb{Z}$), входящие в нее, таковы, что вектор $(q_{n_-+1}(t), p_{n_-+1}(t), \dots, q_{n_+-1}(t), p_{n_+-1}(t))$ является решением гамильтоновой системы с функцией Гамильтона H^* . Применяя к этой конечно-мерной системе теорему об интегральном инварианте Пуанкаре–Картана, получим утверждение теоремы 1.12. Теорема 1.12 доказана.

§ 8. Лагранжева форма уравнения с потенциалом Френкеля–Конторовой

Так же как и в предыдущем параграфе, будем предполагать, что выполнено равенство (1.51).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15. Лагранжианом уравнения (1.1) называется формальный ряд

$$(1.57) \quad L = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{m_n v_n^2}{2} - f(q_n) - \frac{1}{2} (q_{n+1} - q_n - \alpha)^2 \right),$$

где α – константа, не зависящая от n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16. Введем семейство функций L_{n_-, n_+} , зависящих от целочисленных параметров n_-, n_+ удовлетворяющих условию $n_- + 1 < n < n_+$, которое порождено лагранжианом L :

$$(1.58) \quad L_{n_-, n_+} = -\frac{1}{2} (q_{n_-+1} - q_{n_-} - \alpha)^2 + \sum_{n_- < n < n_+} \left(\frac{m_n v_n^2}{2} - f(q_n) - \frac{1}{2} (q_{n+1} - q_n - \alpha)^2 \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Функция L_{n_-, n_+} будет рассматриваться как функция независимых переменных $q_{n_-+1}, v_{n_-+1}, \dots, q_{n_+-1}, v_{n_+-1}$, которая дополнительно зависит от параметров q_{n_-}, q_{n_+} .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Функция L_{n_-, n_+} является лагранжианом системы частиц P_k ($n_- \leq k \leq n_+$), в которой заданы траектории $q_{n_-}(t), q_{n_+}(t)$ частиц P_{n_-}, P_{n_+} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17. Введем производные $\frac{\partial L}{\partial q_n}$, $\frac{\partial L}{\partial v_n}$, лагранжиана L следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_n} &= \varphi(q_n) + q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} = \frac{\partial L_{n_-, n_+}}{\partial q_n}, \quad \text{где } n_- + 1 < n < n_+ - 1; \\ \frac{\partial L}{\partial v_n} &= m_n v_n = \frac{\partial L_{n_-, n_+}}{\partial q_n}, \quad \text{где } n_- < n < n_+.\end{aligned}$$

Согласно определению 1.17, уравнение (1.1) эквивалентно следующей бесконечно-мерной системе уравнений Лагранжа:

$$(1.59) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\dot{q}_n = v_n$.

Далее мы сформулируем и докажем обобщение принципа наименьшего действия Гамильтона для уравнения (1.1).

Пусть n_- и n_+ – произвольные целые числа, удовлетворяющие неравенству $n_- + 1 < n_+$, а t_1 и t_2 – фиксированные моменты времени такие, что $t_1 < t_2$. Рассмотрим произвольное решение $(q_n(t))$ уравнения (1.1), и пусть $x_n(t) = q_n(t) + h_n(t)$ ($n \in \mathbb{Z}$) – произвольная гладкая кривая в бесконечно-мерном пространстве, удовлетворяющая следующим условиям:

$$(1.60) \quad h_{n_-}(t) = h_{n_+}(t) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$(1.61) \quad h_n(t_1) = h_n(t_2) = 0, \quad n_- < n < n_+.$$

ТЕОРЕМА 1.13. *Решение $(q_n(t))$ уравнения (1.1) есть экстремаль функционала*

$$\int_{t_1}^{t_2} L_{n_-, n_+}(x_{n_-+1}, \dot{x}_{n_-+1}, \dots, x_{n_+-1}, \dot{x}_{n_+-1}; q_{n_-}(t), q_{n_+}(t)) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала, указанного в теореме 1.13, при выполнении равенств (1.60) и (1.61) приводит к справедливости уравнений (1.59) при $n_- < n < n_+$. Поэтому утверждение теоремы 1.13 следует из эквивалентности системы (1.59) и уравнения (1.1). Теорема 1.13 доказана.

Глава 2.

Теория уравнения с нелинейностью Ферми–Паста–Улама

Глава 2 посвящена уравнению

$$(2.1) \quad m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = x_{n+1} - (2 - c)x_n + x_{n-1} + \beta[(x_{n+1} - x_n)^r - (x_n - x_{n-1})^r],$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $m_n > 0$, $c \geq 0$, $\beta > 0$, $r \geq 3$, r – нечетное число, о котором говорилось во введении.

§1. Построение семейств периодических решений и решений, порождающих колебания конечной дискретной струны

В этом параграфе исследуется частный случай уравнения (2.1), когда массы m_n всех точек одинаковые и равны $m > 0$, а константа $c = 0$, и в результате мы имеем уравнение

$$(2.2) \quad m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n + \beta [(x_{n+1} - x_n)^r - (x_n - x_{n-1})^r], \quad n \in \mathbb{Z},$$

которое при $m = 1$, $r = 3$ есть уравнение Ферми–Паста–Улама [2]–[4]. Далее будет доказана теорема 2.1, в которой для любого нечетного числа $r \geq 3$ строятся семейства периодических решений уравнения (2.2), причем определение периодических решений уравнений (2.1) и (2.2) и амплитуды колебаний здесь такие же, как и для уравнения Френкеля–Конторовой (см. определение 1.10, §3, гл. 1).

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любых вещественных чисел q, p существует бесконечное семейство различных периодических решений $(x_n(t))$ уравнения (2.2), имеющих вид*

$$(2.3) \quad x_n(t) = q + pn + \xi_n(t), \quad n \in \mathbb{Z},$$

таких, что выполнены следующие утверждения:

1) *при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$*

$$(2.4) \quad \xi_n(t) = -\xi_{n+1}(t);$$

2) *амплитуда колебаний решений из этого семейства принимает любое значение между 0 и ∞ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.2), получим, что функция $\xi_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(2.5) \quad m_n \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -4\xi_n - 2\beta \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} \binom{r}{2k} p^{2k} (2\xi_n)^{r-2k},$$

которое имеет потенциал

$$(2.6) \quad U = U(\xi_n) = 2\xi_n^2 + \beta \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} \frac{\binom{r}{2k}}{r+1-2k} p^{2k} (2\xi_n)^{r+1-2k},$$

$$\text{т.е. } m_n \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \xi_n}.$$

Согласно (2.6), $U(\xi_n)$ – четная функция, и если $\xi_n > 0$, то $\frac{\partial U}{\partial \xi_n} > 0$. Поэтому для любого $\sigma > 0$ существует периодическое решение уравнения (2.5), имеющее амплитуду колебаний, равную σ . В силу нечетности числа r правая часть уравнения (2.5) есть нечетная функция относительно ξ_n , и поэтому любое решение уравнения (2.5) определяет решение (2.3) с условием (2.4) уравнения (2.2), что и доказывает утверждения 1) и 2) теоремы 2.1. Теорема 2.1 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Утверждение теоремы 2.1 и ее доказательство справедливы для любого натурального числа $r \geq 2$.*

Рассмотрим дискретную струну, которая представляется как объединение точек P_n ($n \in \mathbb{Z}$), перемещающихся согласно уравнениям (2.2) вдоль вертикальных прямых $-\infty < x_n < \infty$, проходящих через точки $\tau = n$ на горизонтальной прямой $-\infty < \tau < \infty$, и растяжимых отрезков, соединяющих соседние точки P_n и P_{n+1} при всех $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 2.1). Для любого вещественного числа τ обозначим через P_τ точку, расположенную на дискретной струне и на вертикальной прямой, проходящей через точку τ на горизонтальной прямой, а через $x_\tau(t)$ – величину смещения точки P_τ в момент времени t вдоль прямой, проходящей через точку τ на горизонтальной прямой (рис. 2.1).

Рис. 2.1. Дискретная нелинейная струна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что решение $(x_n(t))$ уравнения (2.2) порождает колебания конечной дискретной струны на отрезке $\tau_- \leq \tau \leq \tau_+$, если существуют такие вещественные числа τ_- и τ_+ , удовлетворяющие условию $\tau_- < \tau_+$, что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$(2.7) \quad x_{\tau_-}(t) = x_{\tau_+}(t) = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $(x_n(t)) = (\xi_n(t))$ – периодическое решение уравнения (2.2), найденное в теореме 2.1 для $q = p = 0$; $\tau_- = n_- + \frac{1}{2}$, $\tau_+ = n_+ + \frac{1}{2}$, где n_- , n_+ – произвольные целые числа, $n_- < n_+$. Тогда решение $(x_n(t))$ порождает колебания конечной дискретной струны на отрезке $\tau_- \leq \tau \leq \tau_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для указанных в формулировке следствия 2.1 чисел τ_- и τ_+ равенство (2.7) вытекает из равенства (2.4) и определения дискретной струны. Следствие 2.1 доказано.

В заключение этого параграфа сформулируем некоторые нерешенные задачи.

ПРОБЛЕМА 2.1. *Существуют ли какие-нибудь периодические решения уравнения (2.2), отличные от решений, найденных в теореме 2.1?*

ПРОБЛЕМА 2.2. *Существуют ли какие-нибудь решения уравнения (2.2), отличные от решений, найденных в следствии 2.1, для которых существуют два или более различных отрезков $t_- \leq t \leq t_+$, на которых они порождают колебания конечной дискретной струны?*

§2. Введение фазовых пространств и однозначная разрешимость уравнения в окрестности нулевого решения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Решение $x^0 = (x_n^0(t))$ уравнения (2.1), в котором $x_n^0(t) \equiv 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, будем называть нулевым.

Имея ввиду в качестве главной задачи этой главы исследование устойчивости нулевого решения (§§ 3, 4), мы в этом параграфе определим три фазовые пространства, состоящие из таких начальных данных, при которых решение уравнения (2.1), расположенное в некоторой окрестности нулевого решения, существует и единственно в классах бесконечно-дифференцируемых и аналитических функций. Отметим, что для стандартного фазового пространства это утверждение не имеет места (теорема 2.7, §6, гл. 2).

Прежде всего, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.1. *Предположим, что $(x_n(t))$ – такое решение уравнения (2.1), что при всех $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$(2.8) \quad |x_n(t)| < \alpha,$$

где

$$(2.9) \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r\beta} \right)^{1/(r-1)}.$$

Тогда функции $x_{n+1}(t)$, $x_{n-2}(t)$ однозначно определяются через функции $x_n(t)$ и $x_{n-1}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $n \in \mathbb{Z}$ введем функции

$$(2.10) \quad z_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t), \quad \xi_n(t) = z_n(t) + \beta z_n^r(t).$$

Согласно (2.1) и (2.10),

$$(2.11) \quad \xi_{n+1}(t) = \xi_n(t) + m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}(t) - c x_n(t), \quad \xi_{n-1}(t) = \xi_n(t) - m_n \frac{d^2 x_{n-1}}{dt^2}(t) + c x_{n-1}(t),$$

и поэтому в силу (2.10) функции $\xi_{n+1}(t)$ и $\xi_{n-1}(t)$ однозначно определяются через функции $x_n(t)$ и $x_{n-1}(t)$.

Далее, при фиксированном t второе равенство в (2.10) определяет $\xi_n(t) = \xi_n(z_n(t))$ как функцию от $z_n(t)$, а из неравенств (2.8), (2.9) и первого равенства в (2.10) следует, что при фиксированном t справедливо неравенство $\left| \frac{d\xi}{dz} \right| \neq 0$. Следовательно, при выполнении неравенства (2.8) можно обратить второе равенство в (2.10) и однозначно выразить функцию $z_n(t)$ через $\xi_n(t)$. Таким образом, функции $z_{n+1}(t)$ и $z_{n-1}(t)$ однозначно определяются через функции $x_n(t)$ и $x_{n-1}(t)$, и поэтому такое же утверждение справедливо для функций $x_{n+1}(t) = x_n(t) + z_{n+1}(t)$ и $x_{n-2}(t) = x_{n-1}(t) - z_{n-1}(t)$. Лемма 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из теоремы 2.4 (следствие 2.2, §3) вытекает, что для широкого класса уравнений (2.1) существует достаточно много решений $(x_n(t))$, удовлетворяющих условию (2.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Введем пространство Π , состоящее из всевозможных пар $(x_0^*(t), (x_1^*(t)))$, бесконечно-дифференцируемых функций $x_0^*(t)$, $x_1^*(t)$, определенных на прямой $t \in \mathbb{R}$, для которых существует решение $(x_n(t))$ уравнения (2.1), удовлетворяющее равенствам

$$(2.12) \quad x_0(t) = x_0^*(t), \quad x_1(t) = x_1^*(t),$$

и при этом выполнено условие (2.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Введем пространство Π_∞ , состоящее из всевозможных пар $(x_0^*(t), (x_1^*(t)))$ целых аналитических функций $x_0^*(t)$, $x_1^*(t)$, определенных на прямой $t \in \mathbb{R}$, для которых существует такое решение $(x_n(t))$ уравнения (2.1), что выполнены условия (2.12) и (2.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Введем пространство Π_∞^* , состоящее из всевозможных пар $\{(x_n^*), (v_n^*)\}$ двух двусторонних последовательностей чисел $(x_n^*), (v_n^*)$ ($n \in \mathbb{Z}$), для которых существует решение $(x_n(t))$ уравнения (2.1), удовлетворяющее (2.8) и условиям

$$(2.13) \quad x_n(t^*) = x_n^*, \quad \frac{dx_n}{dt}(t^*) = v_n^*, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где t^* – начальный момент времени, а при всех $n \in \mathbb{Z}$ $x_n(t)$ – целая аналитическая функция на прямой $t \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 2.2. В пространствах Π и Π_∞ уравнение (2.1) однозначно разрешимо, т.е. для любой пары функций $x_0^*(t)$, $x_1^*(t)$, удовлетворяющей условию $(x_0^*(t), x_1^*(t)) \in \Pi$, существует единственное решение уравнения (2.1), для которого выполнены равенства (2.12).

Доказательство теоремы 2.2 следует из определений 2.3, 2.4 и леммы 2.1.

ТЕОРЕМА 2.3. Существует взаимно-однозначное соответствие $S: \Pi_\infty^* \rightarrow \Pi_\infty$ между пространствами Π_∞^* и Π_∞ , и для любого элемента $\{(x_n^*), (v_n^*)\} \in \Pi_\infty^*$, существует единственное решение $(x_n(t))$ уравнения (2.1) такое, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ $x_n(t)$ – целая аналитическая функция и в начальный момент времени t^* выполнены равенства (2.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{(x_n^*), (v_n^*)\} \in \Pi_\infty^*$. Существование решения $(x_n(t))$, указанного в формулировке теоремы 2.3, следует из определения 2.5, а его единственность доказывается точно так же, как доказывалась единственность решения уравнения (1.1) в теореме 1.1 (§ 1, гл. 1). Построим теперь отображение S и обратное к нему отображение S^{-1} . Полагаем

$$(2.14) \quad S\{(x_n^*), (v_n^*)\} = (x_0(t), x_1(t)) \in \Pi_\infty,$$

где $x_\nu(t)$ ($\nu = 0, 1$) – составляющие решения $(x_n(t))$. Обратно, если $(x_0^*(t), x_1^*(t)) \in \Pi_\infty$, то в силу определения 2.4 и теоремы 2.2 существует единственное решение $(x_n(t))$ уравнения (2.1), для которого при всех $n \in \mathbb{Z}$ $x_n(t)$ – целая аналитическая функция и справедливы равенства (2.12). Поэтому полагаем

$$S^{-1}(x_0^*(t), x_1^*(t)) = \{(x_n^*), (v_n^*)\} \in \Pi_\infty^*,$$

где при $n \in \mathbb{Z}$ числа x_n^*, v_n^* определены с помощью равенств (2.13). Теорема 2.3 доказана.

Следуя определению 1.5 (§ 2, гл. 1), при любом целом $k \geq 0$ для произвольного элемента $x^* = (x_0^*(t), x_1^*(t))$, являющегося парой, состоящей из двух бесконечно-дифференцируемых функций, введем норму

$$(2.15) \quad \|x^*\|^{(k)} = \sum_{\nu=0}^1 \sum_{s=0}^k \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^s x_\nu^*}{dt^s}(t) \right|,$$

где по определению $\frac{d^0 x_\nu^*}{dt^0}(t) = x_\nu^*(t)$, и, следуя определению 1.6 (§ 2, гл. 1), для любых двух элементов $x'^* = \{(x'_n), (v'_n)\} \in \Pi_\infty^*$, $x''^* = \{(x''_n), (v''_n)\} \in \Pi_\infty^*$ введем расстояние

$$(2.16) \quad \rho^{(k)}(x'^*, x''^*) = \|Sx'^* - Sx''^*\|^{(k)},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, а S – отображение, определенное в (2.14). Повторяя определение 1.7 (§ 2, гл. 1), введем множества $\Pi^{(\kappa)}(x^0)$ и $\Pi_\infty^{*(\kappa)}(x^0) \subset \Pi_\infty^*$, где $x^0 = (x_n^0(t))$ – нулевое решение, введенное в определении 2.2 этого параграфа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Пусть $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \dots)$ – односторонняя последовательность, состоящая из положительных чисел. Полагаем

$$\begin{aligned} \Pi^{(\kappa)}(x^0) &= \{x^* = (x_0^*(t), x_1^*(t)) : \|x^* - \tilde{x}^0\|^{(k)} \leq \kappa_k; k = 0, 1, 2, \dots\}, \\ \Pi_\infty^{*(\kappa)}(x^0) &= \{\hat{x} = \{(\hat{x}_n), (\hat{v}_n)\} \in \Pi_\infty^* : \rho^{(k)}(\hat{x}, \hat{x}^0) \leq \kappa_k; k = 0, 1, 2, \dots\}, \end{aligned}$$

где $\tilde{x}^0 = (x_0^0(t), x_1^0(t))$ – такой элемент, что $x_0^0(t) \equiv x_1^0(t) \equiv 0$, а $\hat{x}^0 = \{(\hat{x}_n^0), (\hat{v}_n^0)\} \in \Pi_\infty^*$ – такой элемент, что $\hat{x}_n^0 = \hat{v}_n^0 = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

§ 3. Устойчивость нулевого решения и бесконечно-мерный аналог теории КАМ

В силу определений 2.2–2.5 (§ 2) нулевое решение $x^0 = (x_n^0(t))$ в пространствах Π и Π_∞ определяется начальными данными

$$(2.17) \quad (x_0^0(t), x_1^0(t)) = (0, 0) \in \Pi, \quad (0, 0) \in \Pi_\infty, \quad x_0^0(t) \equiv 0, \quad x_1^0(t) \equiv 0,$$

а в пространстве Π_∞^* определяется начальными данными

$$(2.18) \quad \{(\hat{x}_n^0), (\hat{v}_n^0)\} = \{(0), (0)\} \in \Pi_\infty^*, \quad \hat{x}_n^0 = 0, \quad \hat{v}_n^0 = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \dots)$ – односторонняя последовательность, состоящая из заранее заданных положительных чисел κ_s ($s = 0, 1, \dots$). Рассмотрим возмущения начальных данных (2.17), (2.18) следующего вида:

$$(2.19) \quad (x_0^*(t), x_1^*(t)) = (\Delta_0(t), \Delta_1(t)) \in \Pi^{(\kappa)}(x^0),$$

$$(2.20) \quad \{(x_n^*), (v_n^*)\} \in \Pi_\infty^{*(\kappa)}(x_0),$$

где $\Pi^{(\kappa)}(x^0)$, $\Pi_\infty^{*(\kappa)}(x^0)$ – множества, введенные в определении 2.6 (§ 2); $\Delta_0(t)$ и $\Delta_1(t)$ – бесконечно-дифференцируемые функции на прямой $t \in \mathbb{R}$, а x_n^* , v_n^* – числа. В силу определения 2.6 соотношение (2.19) эквивалентно неравенствам

$$(2.21) \quad \|(\Delta_0(t), \Delta_1(t))\|^{(k)} \leq \kappa_k; \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а соотношение (2.20) эквивалентно неравенствам

$$(2.22) \quad \rho^{(k)}(\{(x_n^*), (v_n^*)\}, \{(0), (0)\}) \leq \kappa_k; \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\|\cdot\|^{(k)}$ – норма, введенная в (2.15), а $\rho^{(k)}(\cdot, \cdot)$ – расстояние в пространстве Π_∞^* , введенное в (2.16).

ТЕОРЕМА 2.4. *Предположим, что $t_n \leq M$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, а параметр c в уравнении (2.1) удовлетворяет следующим неравенствам*

$$(2.23) \quad 0 < c < 4, \quad c \neq 2 - 2 \cos \frac{2\pi s}{d}, \quad (s = 0, \pm 1, \dots, d; \quad d = 1, \dots, r+1).$$

Тогда существуют такие константы $m_n^0 > 0$ ($n \in \mathbb{Z}$), зависящие только от последовательности κ и числа M , что если при каком-либо n_0 и $|n| \geq n_0$ числа t_n удовлетворяют условиям $t_n \leq m_n^0$, то нулевое решение x^0 устойчиво в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и натуральное число k_0 , что если выполнено какое-либо из двух условий

- а) соотношение (2.19) и $\|(\Delta_0(t), \Delta_1(t))\|^{(k_0)} \leq \delta$,
- б) соотношение (2.20) и $\rho^{(k_0)}(\{(x_n^*), (v_n^*)\}, \{(0), (0)\}) \leq \delta$, то решение $(x_n(t))$ уравнения (2.1) при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $|x_n(t)| \leq \varepsilon$.

Теорема 2.4 будет доказана в следующем параграфе, а здесь мы выведем из нее следствия 2.2, 2.3, теорему 2.5 и ее следствие 2.4.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если $m_n \leq M$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, а параметр s удовлетворяет неравенствам (2.23) теоремы 2.4, то существуют такие константы $m_n^0 > 0$ ($n \in \mathbb{Z}$), что если при каком-либо n_0 и $|n| \geq n_0$ числа m_n удовлетворяют условиям $m_n \leq m_n^0$, то пространства Π , Π_∞ и Π_∞^* , введенные в определениях 2.3–2.5, – не пусты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу определения множества $\Pi^{(\kappa)}$ в определении 2.6 (§2) возмущение $(\Delta_0(t), \Delta_1(t))$ может быть задано с помощью произвольных бесконечно-дифференцируемых или целых аналитических функций, удовлетворяющих условию (2.19), и согласно утверждению теоремы 2.4, если $0 < \varepsilon < \alpha$, то решение $(x_n(t))$ уравнения (2.1) при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ будет удовлетворять неравенству (2.8), где α – константа, введенная в (2.9). Теперь следствие 2.2 непосредственно вытекает из определений 2.3–2.5 и теоремы 2.3 (§2). Следствие 2.2 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Предположим, что $0 < \varepsilon < 1$ и при всех $n \in \mathbb{Z}$ величины m_n в уравнении (2.1) удовлетворяют неравенствам $m_n \leq M$. Тогда существует такая константа K , зависящая только от числа M и параметров s, β, r , входящих в уравнение (2.1), что решения $(x_n(t))$ уравнения (2.1), найденные в теореме 2.4 и удовлетворяющие неравенствам $|x_n(t)| \leq \varepsilon$ ($n \in \mathbb{Z}$), при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ также удовлетворяют неравенствам $|p_n(t)| \leq K\varepsilon$, где $p_n(t) = m_n \frac{dx_n}{dt}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида уравнения (2.1) следует, что

$$\left| \frac{dp_n}{dt}(t) \right| < \varepsilon(4 + c + \beta \cdot 2^{r+1}).$$

Поэтому утверждение следствия 2.3 вытекает из формулы Тейлора для функции $m_n x_n(t)$: $m_n x_n(t+1) = m_n x_n(t) + p_n(t) + \frac{1}{2} \frac{dp_n}{dt}(\theta)$, где $t \leq \theta \leq t+1$. Следствие 2.3 доказано.

Теорема 2.4 и следствие 2.3 показывают, что, при малом отклонении начальных данных уравнения (2.1) по норме в соответствующем фазовом пространстве от начальных данных нулевого решения, отклонения координат $x_n(t)$ и импульсов $p_n(t)$ соответствующей гамильтоновой системы от нуля при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ также будут малы.

ТЕОРЕМА 2.5 (бесконечно-мерный аналог теории КАМ). Предположим, что величины m_n и параметр s удовлетворяют условию теоремы 2.4. Тогда существуют такие константы $m_n^0 > 0$ ($n \in \mathbb{Z}$), что если при каком-либо n_0 и $|n| \geq n_0$ числа m_n удовлетворяют неравенствам $m_n \leq m_n^0$, то при любом $\varepsilon > 0$ существуют такие бесконечные множества квази-периодических решений $(x_n(t))$ уравнения (2.1) с континуальным, счетным и любым конечным количеством рационально независимых частот, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|x_n(t)| \leq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функции $x_0^*(t)$, $x_1^*(t)$ в (2.19), используя функции $\Delta_0(t)$, $\Delta_1(t)$, которые введены в следствии 1.3 (§5, гл. 1) с помощью равенств (1.39) и возьмем в качестве чисел m_n^0 ($n \in \mathbb{Z}$) константы, найденные в теореме 2.4. В этом

случае, если константа γ , указанная в следствии 1.3, достаточно мала, то выполняется условие а) теоремы 2.4, и поэтому если при каком-либо n_0 и $|n| \geq n_0$ числа m_n удовлетворяют неравенствам $m_n \leq m_n^0$, то при любом $\varepsilon > 0$ решение $(x_n(t))$ уравнения (2.1) с начальными данными $(x_0^*(t), x_1^*(t))$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет соотношениям

$$(2.24) \quad x_0(t) = x_0^*(t), \quad x_1(t) = x_1^*(t), \quad |x_n(t)| \leq \varepsilon.$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2.5 осталось показать, что функции $x_n(t)$ являются квази-периодическими с указанными в теореме 2.5 количествами рационально-независимых частот. В силу (2.24), (2.19) и равенств (1.39) (§5, гл. 1) это утверждение справедливо для функций $x_0(t)$, $x_1(t)$; предполагая, что оно справедливо для функций $x_{n-1}(t)$ и $x_n(t)$, докажем его для функций $x_{n+1}(t)$ и $x_{n-2}(t)$. Предполагая, что число ε меньше, чем константа α , введенная в равенстве (2.9), получим, что в силу (2.24) и (2.8) будет выполнено утверждение леммы 2.1 (§2), и поэтому равенства (2.10) и (2.11) при фиксированном значении t определяют величину $z_n(t) = z_n(\xi_n(t))$ как аналитическую функцию от $\xi_n(t)$ и величины $x_{n+1}(t)$, $x_{n-2}(t)$ как аналитические функции от $x_n(t)$ и $x_{n-1}(t)$. Из этого утверждения в силу определений 7)–11) (см. общие обозначения и определения) и следует, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ функции $x_n(t)$ будут квази-периодическими с тем же набором частот, что и функции $\Delta_0(t)$ и $\Delta_1(t)$. Теорема 2.5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Если величины m_n и параметр ε удовлетворяют условию теоремы 2.4 и при $|n| \geq n_0$ справедливы неравенства $m_n \leq m_n^0$ (m_n^0 – константы, найденные в теореме 2.4), то для любого $\varepsilon > 0$ в области $\Gamma'_\varepsilon = \{\vec{x} = (x_n) : |x_n| \leq \varepsilon, n \in \mathbb{Z}\}$ существуют инвариантные множества, составленные из решений уравнения (2.1), которые представляют собой торы любой конечной размерности, счетно-мерные торы и существенное подмножество тора континуальной размерности, а решения уравнения (2.1), расположенные на этих торах, порождают на них квази-периодические движения.

Следствие 2.4 выводится из теоремы 2.5 точно так же, как следствие 1.5 выводилось из теоремы 1.11 (§5, гл. 1).

§4. Доказательство теоремы 2.4

Доказательство проводится по тому же пути, что и доказательство теоремы 1.10 (§6, гл. 1), однако есть существенные отличия, связанные с формой нелинейных членов в уравнении (2.1).

ЛЕММА 2.2. Существуют константы $m_n^0 > 0$ ($n \in \mathbb{Z}$) и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что если $m_n \leq M$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, а при $|n| \geq n_0$ $m_n \leq m_n^0$, то в случае выполнения соотношения (2.19) для любого решения $(x_n(t))$ уравнения (2.1), удовлетворяющего при некоторых целых числах $N_1 \leq 0$, $N_2 \geq 1$ соотношениям

$$(2.25) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |x_n(t)| \leq \varepsilon_0, \quad N_1 \leq n \leq N_2,$$

будет справедливо неравенство

$$(2.26) \quad \sum_{n=N_1-1}^{N_2+1} m_n \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^2 x_n}{dt^2}(t) \right| < c^*,$$

где c^* – константа, не зависящая от чисел N_1 и N_2 и от начальных данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенств (2.10) и (2.11) и определения 2.6 (§2) из неравенств (2.25) при всех $t \in \mathbb{R}$ следуют неравенства

$$(2.27) \quad \left| \frac{d^2 x_{N_2+1}}{dt^2}(t) \right| < c_N, \quad \left| \frac{d^2 x_{N_1-1}}{dt^2}(t) \right| < c_N,$$

где $N = \max(|N_1| + 3, N_2 + 2)$, c_N – константа, зависящая только от числа M и от первых $N + 1$ чисел $\kappa_0, \dots, \kappa_N$, входящих в последовательность κ , для которой справедливо соотношение (2.19). Так как число M и последовательность κ заранее зафиксированы, то из неравенства (2.27) очевидно следует утверждение леммы 2.2. Лемма 2.2 доказана.

Предположим, что $(x_n(t))$ есть решение уравнения (2.1). Введем преобразование A и две последовательности семейств преобразований $B'_k(t)$, $B''_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) плоскости ξ, θ , зависящих от параметра t . Обозначая через $z = h(\xi)$ функцию, обратную к функции

$$(2.28) \quad \xi = z + \beta z^r$$

в достаточно малой окрестности точки $z = 0$, полагаем

$$(2.29) \quad A: (\xi, \theta) \rightarrow (\xi', \theta') = (\xi - c\theta, \theta + h(\xi')),$$

$$(2.30) \quad B'_k(t): (\xi, \theta) \rightarrow (\xi'_k(t), \theta'_k(t)) = \left(\xi + m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}(t), \theta + h(\xi'_k(t)) - h(\xi) \right),$$

$$(2.31) \quad B''_k(t): (\xi, \theta) \rightarrow (\xi''_k(t), \theta''_k(t)) = \left(\xi - m_{-k+1} \frac{d^2 x_k}{dt^2}(t), \theta + h(\xi''_k(t)) - h(\xi) \right).$$

Вводя функции

$$\begin{aligned} \xi'_{n+1}(t) &= q_{n+1}(t) - q_n(t) + \beta(q_{n+1}(t) - q_n(t))^r \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \xi''_{n-1}(t) &= q_{n-1}(t) - q_n(t) + \beta(q_{n-1}(t) - q_n(t))^r \quad (n = 1, 0, -1, -2, \dots), \end{aligned}$$

мы, используя уравнение (2.1) и нечетность числа r , получим следующие равенства

$$\begin{aligned} (\xi'_{n+1}(t), x_{n+1}(t)) &= B'_n(t) \circ A(\xi'_n(t), x_n(t)) \quad (n = 1, 2, \dots), \\ (\xi''_{n-1}(t), x_{n-1}(t)) &= B''_{1-n}(t) \circ A(\xi''_n(t), x_n(t)) \quad (n = 0, -1, -2, \dots), \end{aligned}$$

которые приводят к равенствам

$$(2.32) \quad (\xi'_k(t), x_k(t)) = B'_{k-1}(t) \circ A \circ B'_{k-2}(t) \circ A \circ \dots \circ B'_1(t) \circ A(\xi'_1(t), x_1(t))$$

$$(k = 2, 3, \dots),$$

$$(2.33) \quad (\xi''_s(t), x_s(t)) = B''_{-s}(t) \circ A \circ B''_{-s-1}(t) \circ A \circ \dots \circ B''_1(t) \circ A(\xi''_0(t), x_0(t))$$

$$(s = -1, -2, \dots).$$

ЛЕММА 2.3. *Предположим, что нечетное число $r \geq 3$ в уравнении (2.1) имеет вид $r = 2l + 1$. Тогда при выполнении условий (2.23) теоремы 2.4 (§ 3) преобразование A , введенное в равенстве (2.29), сохраняет площадь, а точка $(0, 0)$ является его неподвижной точкой, в которой A имеет общий эллиптический тип, так что в полярных координатах ψ, τ в нормальной форме Биркгофа [52, § 21]*

$$(2.34) \quad \psi' = \psi + \omega_0 + \omega_1 \tau + \dots + \omega_l \tau^l + \dots, \quad \tau' = \tau$$

(ψ – угол, τ – радиус) коэффициенты

$$(2.35) \quad \omega_k = 0 \quad (k = 1, \dots, l - 1),$$

а коэффициент

$$(2.36) \quad \omega_l \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $z = h(\xi)$ является обратной к функции (2.28), то $h(0) = 0$, и поэтому в силу (2.29) точка $(0, 0)$ является неподвижной для преобразования A . Далее, согласно (2.28) и (2.29), линейная часть $dA(0, 0)$ отображения A в точке $(0, 0)$ имеет вид

$$(2.37) \quad dA(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 1 & 1-c \end{pmatrix},$$

и, следовательно, A сохраняет площадь, а из первого неравенства в (2.23) следует, что $|\text{Sp } A| < 2$ ($\text{Sp } A$ – след A), собственные числа λ и $\bar{\lambda}$ – различные, комплексно-сопряженные числа и $|\lambda| = 1$. Таким образом, неподвижная относительно A точка $(0, 0)$ имеет эллиптический тип. Докажем теперь, что точка $(0, 0)$ является точкой общего эллиптического типа, и справедливость (2.34)–(2.36). Приводя с помощью матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\lambda-1}{c} & -\frac{\bar{\lambda}-1}{c} \end{pmatrix} \text{ и замены } \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

матрицу $dA(0, 0)$ в (2.37) к диагональному виду, получим, что преобразование

$$(2.38) \quad D = B^{-1} \circ A \circ B: (q, p) \rightarrow (q', p')$$

имеет следующий вид

$$(2.39) \quad \begin{cases} q' = \lambda q + \frac{c}{\bar{\lambda} - \lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda q + \bar{\lambda} p)^k}{k!} \frac{d^k h}{d\xi^k}(0) \\ p' = \bar{\lambda} q - \frac{c}{\bar{\lambda} - \lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda q + \bar{\lambda} p)^k}{k!} \frac{d^k h}{d\xi^k}(0). \end{cases}$$

Известно (см. [51, § 21]), что если

$$(2.40) \quad \lambda \neq e^{2\pi i \frac{s}{d}} \quad (s = 0, \pm 1, \dots, \pm d; d = 1, \dots, 2l + 2),$$

где i – мнимая единица, то существует замена переменных

$$(2.41) \quad Q: (\xi, \eta) \rightarrow (q, p),$$

имеющая вид

$$(2.42) \quad \begin{cases} q = f(\xi, \eta) = \xi + \sum_{k=2}^{\infty} f_k, \\ p = g(\xi, \eta) = \eta + \sum_{k=2}^{\infty} g_k \end{cases}$$

(f_k и g_k однородные многочлены степени k по совокупности переменных ξ, η), которая приводит преобразование D , определенное равенствами (2.38), (2.39), к виду

$$(2.43) \quad L = Q^{-1} \circ D \circ Q: (\xi, \eta) \rightarrow (\xi', \eta'),$$

где Q^{-1} – отображение, обратное к Q ,

$$(2.44) \quad \xi' = u\xi + \tilde{u}(\xi, \eta), \quad \eta' = v\eta + \tilde{v}(\xi, \eta),$$

$$(2.45) \quad u = \lambda + \sum_{k=1}^l \alpha_k (\xi\eta)^k, \quad v = \bar{\lambda} + \sum_{k=1}^l \beta_k (\xi\eta)^k,$$

$uv = 1$; α_k, β_k ($k = 1, \dots, l$) – коэффициенты, не зависящие от ξ, η ; $\tilde{u}(\xi, \eta), \tilde{v}(\xi, \eta)$ – сходящиеся ряды, начинающиеся с членов порядка $2l + 2$ по совокупности переменных ξ, η . В нашем случае из второго неравенства в (2.23), из вида матрицы $dA(0, 0)$ в (2.37) и равенства $r = 2l + 1$ следует, что собственное число λ матрицы $dA(0, 0)$ удовлетворяет неравенствам (2.40), и поэтому замена переменных (2.41), для которой выполнены соотношения (2.42)–(2.45), – существует. Производя сравнение коэффициентов в равенствах (2.43), (2.44) при использовании (2.38), (2.39), (2.41), (2.42) и (2.45) с помощью метода из [51, § 21] и учитывая, что в силу (2.28) в равенствах (2.39) величина $\frac{d^k h}{d\xi^k}(0) = 0$, если $2 \leq k \leq r - 1$, а $\frac{d^r h}{d\xi^r}(0) \neq 0$, получим, что в равенствах (2.45)

$$(2.46) \quad \alpha_k = \beta_k = 0 \quad (1 \leq k \leq l - 1),$$

$$(2.47) \quad \alpha_l = \frac{c\lambda}{(\bar{\lambda} - \lambda)l!} \binom{r}{l} \frac{d^r h}{d\xi^r}(0) \neq 0,$$

где $\binom{r}{l}$ – биномиальный коэффициент. Вводя теперь полярные координаты ψ, τ посредством равенств $\xi = \sqrt{2\tau} e^{i\psi}, \eta = \sqrt{2\tau} e^{-i\psi}$ и выражая через них преобразование L , введенное в (2.43), в силу (2.44)–(2.47) получим соотношения (2.34)–(2.36). Лемма 2.3 доказана.

Представим преобразования $B'_k(t)$ и $B''_k(t)$, определенные равенствами (2.30) и (2.31), в виде

$$(2.48) \quad \begin{cases} B'_k(t): (\xi, \theta) \rightarrow (\xi'_k(t), \theta'_k(t)) = (\xi + b'_{1k}(\xi, \theta, t), \theta + b'_{2k}(\xi, \theta, t)), \\ B''_k(t): (\xi, \theta) \rightarrow (\xi''_k(t), \theta''_k(t)) = (\xi + b''_{1k}(\xi, \theta, t), \theta + b''_{2k}(\xi, \theta, t)), \end{cases}$$

возьмем в качестве величин ε_0 и m_n^0 ($n \in \mathbb{Z}$) константы, указанные в лемме 2.2, и будем применять к двум множествам преобразований A , $B'_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) и A , $B''_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) теорему 2.6, сформулированную в следующем §5. Если бы в области $V_{\varepsilon_0} = \{\xi, \theta : \max(|\xi|, |\theta|) \leq \varepsilon_0\}$ было справедливо неравенство

$$(2.49) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{(\xi, \theta) \in V_{\varepsilon_0} \\ t \in \mathbb{R}}} (|b'_{1k}(\xi, \theta, t)| + |b'_{2k}(\xi, \theta, t)| + |b''_{1k}(\xi, \theta, t)| + |b''_{2k}(\xi, \theta, t)|) < \infty,$$

то в силу леммы 2.3 каждое из двух множеств преобразований A , $B'_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) и A , $B''_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) удовлетворяло бы условию теоремы 2.6 (§5) и, применяя эту теорему, мы бы получили следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\widehat{\delta} > 0$, удовлетворяющее условию $\widehat{\delta} < \varepsilon$, и натуральные числа n' , n'' такие, что если $|\xi| \leq \widehat{\delta}$, $|\theta| \leq \widehat{\delta}$, то для любых натуральных чисел k' , k'' с условиями $k' \geq n'$ и $k'' \geq n''$ и для любого $t \in \mathbb{R}$

$$(2.50) \quad \begin{cases} |B'_{k'}(t) \circ A \circ \dots \circ B'_{n'}(t) \circ A(\xi, \theta)| \leq \varepsilon, \\ |B''_{k''}(t) \circ A \circ \dots \circ B''_{n''}(t) \circ A(\xi, \theta)| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Из этого же последнего утверждения и равенств (2.32), (2.33) следует заключение теоремы 2.4, так как в силу (2.1), леммы 2.1 (§2) и равенств (2.10), (2.11), (2.15), (2.16) для любого $\widehat{\delta} > 0$ найдутся такое $\delta > 0$ и натуральное число k_0 , что если выполнено какое-либо из двух неравенств

$$\|(\Delta_0(t), \Delta_1(t))\|^{(k_0)} \leq \delta, \quad \rho^{(k_0)}(\{(x_n^*), (v_n^*)\}, \{(0), (0)\}) \leq \delta,$$

то для всех $t \in \mathbb{R}$

$$(2.51) \quad \begin{cases} |B'_s(t) \circ A \circ \dots \circ B'_1(t) \circ A(\xi'_1(t), x_1(t))| \leq \widehat{\delta} & (1 \leq s \leq n' - 1), \\ |B''_s(t) \circ A \circ \dots \circ B''_1(t) \circ A(\xi'_0(t), x_0(t))| \leq \widehat{\delta} & (1 \leq s \leq n'' - 1). \end{cases}$$

Таким образом, доказательство теоремы 2.4 сводится к доказательству неравенства (2.49), что в силу (2.48) и определений преобразований $B'_k(t)$ и $B''_k(t)$ в (2.30) и (2.31) сводится к доказательству при любых целых числах N_1 , N_2 с условиями $N_1 \leq 0$, $N_2 \geq 1$ неравенства

$$(2.52) \quad \sum_{n=N_1}^{N_2} m_n \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^2 x_n}{dt^2}(t) \right| < c^*$$

для решений с начальными данными, указанными в формулировке теоремы 2.4, где константа c^* не зависит от этих начальных данных и от чисел N_1 и N_2 . Выведем неравенство (2.52) из леммы 2.2 и теоремы 2.6 (§ 5). Задавая число ε так, чтобы $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ (ε_0 введено в условии леммы 2.2), и исходя из предположения о справедливости неравенства (2.52) с константой c^* , найденной в лемме 2.2, выберем по этому ε натуральные числа n', n'', k_0 и числа $\hat{\delta} > 0, \delta > 0$ так, чтобы $\hat{\delta} < \varepsilon$ и чтобы выполнялись неравенства (2.50) и (2.51). При этом отметим, что при заданных числах n', n'' и $\hat{\delta}$ определение чисел k_0 и δ , для которых справедливы неравенства а), б) в условии теоремы 2.4 и неравенства (2.51), не связано с неравенством (2.52) и всегда может быть осуществлено. Поэтому в силу (2.51), (2.32), (2.33) для всех целых чисел n , удовлетворяющих условию $1 - n'' \leq n \leq n'$, имеем неравенство

$$(2.53) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |x_n(t)| \leq \varepsilon_0,$$

и, согласно лемме 2.2, неравенство (2.52) выполняется для чисел $N_1 = -n'', N_2 = n' + 1$. Далее, предполагая, что неравенство (2.52) справедливо для некоторых чисел $N_1 \leq -n'', N_2 \geq n' + 1$, в силу леммы 2.2 и теоремы 2.6 (§ 5) получим, что неравенства (2.50) выполняются для всех целых чисел k', k'' , удовлетворяющих условиям $n' \leq k' \leq N_2 - 1, n'' \leq k'' \leq -N_1$, и, следовательно, в силу (2.32) и (2.33) неравенство (2.53) справедливо для чисел n , удовлетворяющих условию $N_1 \leq n \leq N_2$. Применяя теперь еще раз лемму 2.2, получим, что неравенство (2.52) справедливо для чисел $N_1 - 1, N_2 + 1$ вместо чисел N_1, N_2 соответственно, а значит, и для любых целых чисел N_1, N_2 , удовлетворяющих неравенствам $N_1 \leq 0, N_2 \geq 1$. Теорема 2.4 доказана.

§ 5. Об устойчивости относительно неавтономной динамической системы с дискретным временем

Здесь будет сформулирована теорема 2.6, касающаяся поведения неавтономных динамических систем с дискретным временем, которая использовалась при доказательствах теорем 1.10 (§ 6, гл. 1), 2.4 (§ 4, гл. 2) и применяется также в доказательствах теорем 3.4 и 3.5 (§ 2, гл. 3).

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть A – взаимно-однозначное, аналитическое и сохраняющее площадь преобразование окрестности $V_{\varepsilon_0} = \{q, p : \max(|q|, |p|) \leq \varepsilon_0\}$ ($\varepsilon_0 > 0$) плоскости q, p , оставляющее на месте точку $O = (0, 0)$, а $B_n = B_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) – последовательность гомеоморфизмов области V_{ε_0} , зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$ и имеющих вид

$$(2.54) \quad B_n : (q, p) \rightarrow (q + b_1^{(n)}(q, p, t), p + b_2^{(n)}(q, p, t)).$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) A – отображение общего эллиптического типа, т.е. в его нормальной форме Биркгофа [51, § 21]

$$(2.55) \quad \psi' = \psi + \omega_0 + \omega_1\tau + \dots + \omega_l\tau^l + \dots, \quad \tau' = \tau$$

- (ψ, τ – полярные координаты; ψ – угол, τ – радиус) при некотором натуральном числе l коэффициент $\omega_l \neq 0$;
 2) коэффициент ω_0 в (2.55) удовлетворяет неравенствам

$$\omega_0 \neq 2\pi \frac{s}{d}, \quad \text{где } s = 0, \pm 1, \dots, \pm d; \quad d = 1, \dots, 2l + 2;$$

- 3) функции $b_1^{(n)}(q, p, t)$, $b_2^{(n)}(q, p, t)$, в (2.54) удовлетворяют неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\substack{(q,p) \in V_{\varepsilon_0} \\ t \in \mathbb{R}}} (|b_1^{(n)}(q, p, t)| + |b_2^{(n)}(q, p, t)|) < \infty.$$

Тогда для любого ε существуют такие $\delta > 0$ и натуральное число $\hat{n} = \hat{n}(\varepsilon)$, что если $(q, p) \in V_\delta$, то при любом $n \geq \hat{n}$ и $t \in \mathbb{R}$ точка

$$B_n \circ A \circ B_{n-1} \circ A \circ \dots \circ B_{\hat{n}} \circ A(q, p) \in V_\varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В случае, когда в условии 1) теоремы 2.6 число $l = 1$, при фиксированном значении t теорема 2.6 является частным случаем теоремы 2 из работы [44, § 1, гл. V, ч. 2]. Доказательство теоремы 2.6 повторяет доказательство более общей теоремы 1 из работы [45, § 2], соответствующей случаю $l = 1$.

§ 6. Локальная неоднозначная разрешимость и неразрешимость уравнения для стандартного фазового пространства

В этом параграфе основной результат данной главы об устойчивости нулевого решения, сформулированный в теореме 2.4 (§ 3) и доказанный в § 4, применяется для исследования проблемы однозначной разрешимости уравнения (2.1) в стандартной постановке. При этом главный вывод, который проистекает из доказанной ниже теоремы 2.7, состоит в том, что эта проблема имеет отрицательное решение даже в локальной ситуации, т.е. для решений уравнения (2.1), сосредоточенных в сколь угодно малой окрестности нулевого решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Введем пространство Π^* начальных данных уравнения (2.1), точкой которого $\{(x_n^*), (v_n^*)\}$ является пара двусторонних последовательностей (x_n^*) , (v_n^*) ($n \in \mathbb{Z}$) чисел таких, что $x_n^* = x_n(t^*)$, $v_n^* = \frac{dx_n}{dt}(t^*)$, где t^* – начальный момент времени.

ТЕОРЕМА 2.7. *Предположим, что $m_n \leq M$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, а параметр c в уравнении (2.1) удовлетворяет условиям (2.23) теоремы 2.4. Тогда существуют такие константы $m_n^0 > 0$ ($n \in \mathbb{Z}$), что, если при каком-либо n_0 и $|n| \geq n_0$ справедливы неравенства $m_n \leq m_n^0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют начальные данные $\{(x_n^*), (v_n^*)\} \in \Pi^*$, которые определяют бесконечное множество различных решений $(x_n(t))$ уравнения (2.1) в классе бесконечно-дифференцируемых функций $x_n(t)$ на прямой $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих при всех $n \in \mathbb{Z}$ условиям*

$$(2.56) \quad x_n(t^*) = x_n^*, \quad \frac{dx_n}{dt}(t^*) = v_n^*,$$

$$(2.57) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |x_n(t)| \leq \varepsilon,$$

а в классе аналитических функций $x_n(t)$ для тех же начальных данных решение уравнения (2.1) не существует в сколь угодно малой окрестности значения t^ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве m_n^0 константы, для которых справедливо утверждение теоремы 2.4, и рассмотрим одностороннюю последовательность $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \dots)$, состоящую из положительных чисел, которая обладает следующим свойством: если $f(t)$ – такая бесконечно-дифференцируемая функция в окрестности значения $t = t^*$, что при некотором $k_0 > 0$

$$\frac{d^k f}{dt^k}(t^*) = \kappa_k, \quad k > k_0,$$

то $f(t)$ не является аналитической функцией t ни в какой окрестности числа t^* . Далее, для заданного $\varepsilon > 0$ найдем константу $\delta > 0$ и целое k_0 такие, что для них выполняется заключение теоремы 2.4. В силу леммы 1.1 (§1, гл. 1) и (2.15) существует бесконечное множество различных пар бесконечно-дифференцируемых на прямой $t \in \mathbb{R}$ функций $\Delta_0(t), \Delta_1(t)$, у которых при любом целом $k > k_0$ все значения k -й производной в точке t^* совпадают и равны κ_k , а для целых k , удовлетворяющих неравенству $0 \leq k \leq k_0$, значения k -й производной в точке t^* всех функций, входящих в указанное множество пар, также совпадают, и при этом справедливо условие а) теоремы 2.4 (здесь нулевая производная – это значение функции в точке t^*). Согласно утверждению теоремы 2.4 и (2.19), для каждой такой пары начальных данных $(\Delta_0(t), \Delta_1(t))$ существует решение $(x_n(t))$ уравнения (2.1), удовлетворяющее неравенству (2.57), а из леммы 2.1 (§2) следует, что при любом целом $k \geq 0$ и фиксированном n значения k -й производной в точке t^* функций $x_n(t)$ во всех парах совпадают. Поэтому справедливы равенства (2.56), в которых при всех $n \in \mathbb{Z}$ числа x_n^*, v_n^* не зависят от пары функций, и, таким образом, бесконечное множество различных бесконечно-дифференцируемых решений уравнения (2.1), удовлетворяющих (2.56) и (2.57), построено. Согласно же определению последовательности κ , не существует решения $(x_n(t))$ уравнения (2.1), удовлетворяющего (2.56), которое является аналитическим в какой-либо окрестности числа t^* . Теорема 2.7 доказана.

Глава 3. Бесконечно-мерные обыкновенные дифференциальные уравнения общего вида

В этой главе изучаются дифференциальные уравнения, являющиеся возмущениями уравнений (0.1) и (0.2) с помощью функций общего вида, которые зависят от произвольного числа переменных q_n или x_n . С этой целью введем бесконечно-мерные векторы $\vec{q} = (q_n)$, $\vec{x} = (x_n)$, у которых при $n \in \mathbb{Z}$ n -я координата есть, соответственно, q_n и x_n , и рассмотрим следующие уравнения

$$(3.1) \quad m_n \frac{d^2 q_n}{dt^2} = \varphi(q_n) + q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} + \psi_n(\vec{q}),$$

$$(3.2) \quad m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = x_{n+1} - (2 - c)x_n + x_{n-1} + \beta[(x_{n+1} - x_n)^r - (x_n - x_{n-1})^r] + \psi_n(\vec{x}),$$

где числа m_n , c , β , r и целая аналитическая функция $\varphi(q)$ удовлетворяют условиям, указанным во введении, $\psi_n(\vec{q})$ — функция от всех переменных q_n , а $\psi_n(\vec{x})$ — результат подстановки в нее в качестве аргумента вместо вектора $\vec{q}$ — вектора $\vec{x}$.

§ 1. Формальная однозначная разрешимость и единственность аналитических решений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Введем пространство W функций $\psi(\vec{q})$ таких, что аргументом функции $\psi(\vec{q})$ является бесконечно-мерный вектор $\vec{q}$, но все ее значения зависят только от конечного числа координат вектора $\vec{q}$, и при этом $\psi(\vec{q})$ есть целая аналитическая функция по совокупности этих координат, т.е. разлагается по ним в абсолютно сходящийся ряд.

В дальнейшем на протяжении всей этой главы будем предполагать, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ функции $\psi_n(\vec{q})$ и $\psi_n(\vec{x})$ в уравнениях (3.1) и (3.2) принадлежат пространству W .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Количество координат векторов $\vec{q}$ и $\vec{x}$, от которых зависят функции $\psi_n(\vec{q})$ и $\psi_n(\vec{x})$ в уравнениях (3.1) и (3.2), и сами эти координаты могут быть разными при разных значениях переменной n .

Далее будут установлены теоремы 3.1 и 3.2 о формальной однозначной разрешимости уравнений (3.1) и (3.2), т.е. об однозначной разрешимости этих уравнений в классе формальных степенных рядов по переменной t в пространствах начальных данных Ω^* и Π^* , введенных в определении 1.1 (§1, гл. 1) и в определении 2.7 (§6, гл. 2).

ТЕОРЕМА 3.1. Для любой точки $\{(q_n^*), (v_n^*)\} \in \Omega^*$ и любого числа t^* существуют единственные формальные степенные ряды

$$(3.3) \quad q_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_n^{(k)}(t - t^*)^k, \quad n \in \mathbb{Z},$$

в которых при всех $n \in \mathbb{Z}$ и целых $k \geq 0$ числа $q_n^{(k)}$ не зависят от t , $q_n^{(0)} = q_n^*$, $q_n^{(1)} = v_n^*$, и такие, что при подстановке выражений (3.3) в уравнение (3.1) коэффициенты при одинаковых степенях $(t-t^*)^k$ в обеих частях равенства (3.1) совпадают.

ТЕОРЕМА 3.2. Для любой точки $\{(x_n^*), (v_n^*)\} \in \Pi^*$ и любого числа t^* существуют и единственны формальные степенные ряды

$$(3.4) \quad x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_n^{(k)}(t-t^*)^k, \quad n \in \mathbb{Z},$$

в которых при всех $n \in \mathbb{Z}$ и целых $k \geq 0$ числа $x_n^{(k)}$ не зависят от t , $x_n^{(0)} = x_n^*$, $x_n^{(1)} = v_n^*$ и такие, что при подстановке выражений (3.4) в уравнение (3.2) коэффициенты при одинаковых степенях $(t-t^*)^k$ в обеих частях равенства (3.2) совпадают.

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 основаны на том обстоятельстве, что из вида уравнений (3.1) и (3.2) и определения 3.1 следует, что, зная значения всех функций $q_n(t^*)$, $x_n(t^*)$ и их первых производных в точке t^* , можно однозначно определить значения всех производных от всех функций $q_n(t)$, $x_n(t)$ в точке t^* и, таким образом, однозначно построить ряды (3.3) и (3.4). То, что ряды (3.3) и (3.4) удовлетворяют уравнениям (3.1) и (3.2), непосредственно следует из их построения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если в уравнениях (3.1) и (3.2) при всех $n \in \mathbb{Z}$ функция $\psi_n(\vec{q}) \equiv 0$, а начальные данные принадлежат пространствам Ω_∞^* (определение 1.4, § 2, гл. 1) и Π_∞^* (определение 2.5, § 2, гл. 2), то ряды (3.3) и (3.4) абсолютно сходятся.

В связи с замечанием 3.2 представляется естественным сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Если при $|n| \rightarrow \infty$ модули функций $\psi_n(\vec{q})$ и их производных достаточно быстро стремятся к нулю, то для начальных данных из пространств Ω_∞^* и Π_∞^* ряды (3.3) и (3.4) абсолютно сходятся.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Введем пространство $Y \subset \Omega^*$, состоящее из начальных данных, для которых при любых $t \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}$ ряд (3.3) определяет целую аналитическую функцию по t , и пространство $X \subset \Pi^*$, состоящее из начальных данных, для которых при любых $t^* \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}$ ряд (3.4) определяет целую аналитическую функцию по t .

ТЕОРЕМА 3.3. Существуют единственное аналитическое решение $(q_n(t))$ уравнения (3.1), определяемое начальными данными из пространства Y , и единственное аналитическое решение уравнения (3.2), определяемое начальными данными из пространства X .

Доказательство теоремы 3.3 проведем только для уравнения (3.1) и пространства Y , так как для уравнения (3.2) и пространства X это осуществляется аналогичным образом. В силу определения 3.2 и теоремы 3.1 для начальных данных $\{(q_n^*), (v_n^*)\} \in$

Y ряды (3.3) абсолютно сходятся и определяют формальное решение уравнения (3.1). Поэтому если при $n \in \mathbb{Z}$ мы рассмотрим аналитическую функцию

$$f_n(t) = \varphi(q_n(t)) + q_{n+1}(t) - 2q_n(t) + q_{n-1}(t) + \psi_n(\vec{q}(t)) - m_n \frac{d^2 q_n}{dt^2}(t),$$

то ее значение и значения всех ее производных в точке t^* равны нулю, и, таким образом $f_n(t) \equiv 0$. Следовательно, аналитические функции (3.3) определяют решение $q_n(t)$ уравнения (3.1), которое в силу теоремы 3.1 будет единственным.

Теорема 3.3 позволяет нам для целей следующего §2 ввести отображение S пространств Y и X и расстояние $\rho(\cdot, \cdot)$ в них также, как это сделано в §2 в гл. 1 и в §2 в гл. 2.

А именно, если $\{(q_n^*), (v_n^*)\} \in Y$ и $\{(x_n^*), (v_n^*)\} \in X$, то полагаем

$$S\{(q_n^*), (v_n^*)\} = (q_0(t), q_1(t)), \quad S\{(x_n^*), (v_n^*)\} = (x_0(t), x_1(t)),$$

где $q_0(t), q_1(t)$ – аналитические функции, определенные равенствами (3.3), а $x_0(t), x_1(t)$ – аналитические функции, определенные равенствами (3.4).

Если же рассмотреть две произвольные пары элементов $q' = \{(q'_n), (v'_n)\} \in Y$, $q'' = \{(q''_n), (v''_n)\} \in Y$, $x' = \{(x'_n), (v'_n)\} \in X$, $x'' = \{(x''_n), (v''_n)\} \in X$ в пространствах Y и X , то можно определить расстояния

$$\rho(q', q'') = \|Sq' - Sq''\|^{(0)}, \quad \rho(x', x'') = \|Sx' - Sx''\|^{(0)},$$

где $\|\cdot\|^{(0)}$ – нормы, введенные в определении 1.5 (§2, гл. 1) и в равенстве (2.15) (§2, гл. 2) при $k = 0$.

Для исследования проблемы устойчивости стационарных решений в §2 нам также потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть $\sigma = (\sigma_n)$ – двусторонняя последовательность чисел $\sigma_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Введем множества $Y^{(\sigma)}$ и $X^{(\sigma)}$ следующим образом: множество $Y^{(\sigma)}$ состоит из всех аналитических решений $(q_n(t))$ уравнения (3.1), которые удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^2 q_n}{dt^2}(t) \right| \leq \sigma_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

а множество $X^{(\sigma)}$ состоит из всех аналитических решений $(x_n(t))$ уравнения (3.2), которые удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^2 x_n}{dt^2}(t) \right| \leq \sigma_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

§ 2. Устойчивость стационарных решений

В §§ 5, 6 гл. 1 была доказана устойчивость стационарного решения $\vec{q}^0 = (q_n^0(t))$, $q_n^0 \equiv \eta + na$ (см. (1.25)) для уравнения (1.1), а в §§ 3, 4 гл. 2 была доказана устойчивость нулевого решения $\vec{x}^0 = (x_n^0(t))$, $x_n^0 \equiv 0$ для уравнения (2.1). В настоящем параграфе мы при некоторых общих предположениях устанавливаем более слабую устойчивость этих же решений для уравнений (3.1) и (3.2).

Применительно к уравнению (3.1) предположения заключаются в следующем:

- 1) $\psi_n(\vec{q}^0) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$;
- 2) существуют такие числа $\theta > 0$, τ , что

$$(3.5) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{\vec{q} \in \Gamma_\theta} |\psi_n(\vec{q})| < \tau,$$

где $\Gamma_\theta = \{\vec{q} = (q_n) : |q_n - q_n^0| \leq \theta, n \in \mathbb{Z}\}$;

а применительно к уравнению (3.2) предположения имеют следующий вид:

- 1') $\psi_n(\vec{x}^0) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$;
- 2') существуют такие числа $\theta > 0$, τ , что

$$(3.6) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{\vec{x} \in \Gamma'_\theta} |\psi_n(\vec{x})| < \tau,$$

где $\Gamma'_\theta = \{\vec{x} = (x_n) : |x_n| \leq \theta, n \in \mathbb{Z}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Условие 1) необходимо для того, чтобы вектор $\vec{q}^0$ был решением уравнения (3.1), условие 1') необходимо для того, чтобы вектор $\vec{x}^0$ был решением уравнения (3.2).

Прежде, чем формулировать теоремы 3.4 и 3.5, отметим, что стационарное решение $\vec{q}^0$ в пространстве Y задается начальными данными $\{(\eta + na), (0)\}$, а нулевое решение $\vec{x}^0$ в пространстве X задается начальными данными $\{(0), (0)\}$.

ТЕОРЕМА 3.4. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 1.10 (§5, гл. 1) и $\sigma = (\sigma_n)$ — заранее заданная двусторонняя последовательность неотрицательных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\delta > 0$, $\tau_0 > 0$ и константы $m_n^0 > 0$ ($n \in \mathbb{Z}$) такие, что если при всех $n \in \mathbb{Z}$ $m_n \leq m_n^0$, неравенство (3.5) выполнено для $\tau \leq \tau_0$, а начальные данные $\{(q_n^*, (v_n^*))\} \in Y$ уравнения (3.1) удовлетворяют неравенству $\rho(\{(q_n^*), (v_n^*)\}, \{(\eta + na), (0)\}) \leq \delta$, то решение $(q_n(t))$ уравнения (3.1) с этими начальными данными, принадлежащее множеству $Y^{(\sigma)}$, при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет неравенству*

$$|q_n(t) - q_n^0| \leq \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 3.5. *Предположим, что параметр c в уравнении (3.2) удовлетворяет неравенствам (2.23) в условии теоремы 2.4 (§3, гл. 2) и $\sigma = (\sigma_n)$ – заранее заданная двусторонняя последовательность неотрицательных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\delta > 0$, $\tau_0 > 0$ и константы $m_n^0 > 0$ ($n \in \mathbb{Z}$) такие, что если при всех $n \in \mathbb{Z}$ $m_n \leq m_n^0$, неравенство (3.6) выполнено для $\tau \leq \tau_0$, а начальные данные $\{(x_n^*), (v_n^*)\} \in X$ уравнения (3.2) удовлетворяют неравенству $\rho(\{(x_n^*), (v_n^*)\}, \{(0), (0)\}) \leq \delta$, то решение $(x_n(t))$ уравнения (3.2) с этими начальными данными, принадлежащее множеству $X^{(\sigma)}$, при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет неравенству*

$$|x_n(t)| \leq \varepsilon.$$

Доказательства теорем 3.4 и 3.5 проводятся аналогично доказательствам теорем 1.10 и 2.4, сведением к теореме 2.6 (§5, гл. 2). При этом в этих доказательствах роль преобразования A из теоремы 2.6 играют те же преобразования, что и в доказательствах теорем 1.10 и 2.4 соответственно, а роль преобразований B_n из теоремы 2.6 играют другие преобразования, которые отличаются от соответствующих преобразований в доказательствах теорем 1.10 и 2.4 за счет членов, связанных с функциями ψ_n .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Устойчивость, доказанная в теоремах 3.4 и 3.5, более слабая, чем в теоремах 1.10 и 1.24, так как она имеет место при изменении не только начальных данных, но и параметров.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Препятствием для получения результатов теорем 1.10 и 2.4 применительно к уравнениям (3.1) и (3.2) является необходимость иметь такую же явную реализацию фазовых пространств уравнений (3.1) и (3.2), какую мы имеем для уравнений (1.1) и (2.1) (теорема 1.5, §2, гл. 1; теорема 2.3, §2, гл. 2). Весьма вероятно, что такая реализация существует, и в этом случае стационарные решения $\bar{q}^0$ и $\bar{x}^0$ уравнений (3.1) и (3.2) будут устойчивы при изменении только начальных данных и фиксированных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Френкель Я. И., Ковторова Т. А. О теории пластической деформации и двойникования // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. С. 89–97.
- [2] Fermi E., Pasta J., Ulam S. M. Studies of Nonlinear Problems. Washington, D.C.: LA-1940, Office of Technical Services, U.S. Dept. of Commerce..
- [3] Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
- [4] Fermi E., Pasta J. R., Ulam S. M. Studies of Nonlinear Problems // Collected Works of E. Fermi. V. 2. Chicago: Univ. Chicago Press, 1965.
- [5] Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. № 4. С. 527–530.
- [6] Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // УМН. 1963. Т. 18. № 5. С. 13–40.
- [7] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
- [8] Арнольд В. И. О неустойчивости динамической системы со многими степенями свободы // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 1. С. 9–12.
- [9] Arnold V. I. Stability problem and ergodic properties of classical dynamic systems // Proceedings of International Congress of Mathematicians. Moscow: Nauka, 1966. P. 387–392.

- [10] Arnold V. I. Mathematical Problem in Classical Physics // Trends and Perspectives in Applied Mathematics (Applied Mathematical Sciences 100) / ed. F. John, J. E. Marsden. Sirovich: Springer-Verlag, 1995.
- [11] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Динамические системы 3 // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985.
- [12] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Мир, 1974.
- [13] Брюно А. Д. Множества аналитичности нормализующего преобразования // Препринт. № 97, 98. М.: АН СССР, Ин-т прикл. математики, 1974.
- [14] Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990.
- [15] Мельников В. К. О некоторых случаях сохранения условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165. № 6. С. 1245–1248.
- [16] Мельников В. К. О семействе условно-периодических решений гамильтоновой системы // Докл. АН СССР. 1968. Т. 81. № 3. С. 546–549.
- [17] Мозер Ю. Об инвариантных кривых сохраняющего площадь отображения кольца в себя // Математика. 1963. Т. 6. № 5. С. 51–67.
- [18] Moser J. Convergent series expansions for quasi-periodic motions // Math. Ann. 1967. V. 169. P. 136–176.
- [19] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
- [20] Siegel C. L., Moser J. Lectures on Celestial Mechanics: Springer-Verlag, 1971.
- [21] Zehnder E. Generalized implicit function theorem with applications to some small divisor problems, I, II // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. P. 91–140;; 1976. V. 29. P. 49–111.
- [22] Salamon D. Zehnder E. KAM theory in configuration space // Comment. Math. Helv. 1986. V. 64. P. 84–132.
- [23] Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // УМН. 1977. Т. 32. № 6. С. 5–66.
- [24] Frölich J., Spencer T., Wayne C. E. Localization in disordered nonlinear dynamical systems // J. Statist. Phys. 1986. V. 42. P. 247–274.
- [25] Wayne C. E. Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory // Comm. Math. Phys. 1990. V. 127. P. 479–528.
- [26] Wayne C. E. The KAM theory of systems with short range interactions. 1, 2 // Comm. Math. Phys. 1984. V. 96. P. 311–329; 331–344.
- [27] Vittot M., Bellissard J. Invariant tori for an infinite lattice of coupled classical rotators // Preprint CPT. Marseille, 1985.
- [28] Pöschel J. Small divisors with spatial structure in infinite dimensional Hamiltonian systems // Comm. Math. Phys. 1990. V. 127. P. 351–393.
- [29] Kuksin S. B. Nearly integrable infinite-dimensional Hamiltonian systems // Lecture Notes in Math. V. 1556, 1993.
- [30] Aubry S. The twist map, the extended Frenkel–Kontorova model and the Devil’s Staircase // Physica D. 1983. V. 7. № 1–3. P. 240–258.
- [31] Aubry S., Le Daeron P. Y. The discret Frenkel–Kontorova model and its extensions // Physica D. 1983. V. 8. P. 381–422.
- [32] Mather J. N. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the Annulus // Topology. 1982. V. 21. № 4. P. 457–467.
- [33] Percival I. C. A variational principle for invariant tori of fixed frequency // J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. 1979. V. 12. № 3. P. 57–60.
- [34] MacKay R. S., Percival I. C. Converse KAM: Theory and practice // Comm. Math. Phys. 1985. V. 98. P. 469–512.
- [35] Sinai Ya. G. Topics in ergodic theory. Princeton NJ: Princeton Univ. Press, 1994.
- [36] Sinai Ya. G. Commensurate-incommensurate phase transitions in one-dimensional chains // J. Statist. Phys. 1982. V. 29. P. 401–425.
- [37] Синай Я. Г. Переходы “соизмеримость-несоизмеримость” в одномерных цепочках // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1223–1231.

- [38] Lazutkin V. F., Terman D. Percival variational principle for invariant measures and commensurate-incommensurate phase transitions in one-dimensional chains // *Comm. Math. Phys.* 1984. V. 94. №4. P. 511–522.
- [39] Заславский А. Я. Замечание о фазовой диаграмме в модели Френкеля–Конторовой // *ТМФ*. 1983. Т. 57. С. 459–464.
- [40] Pustyl'nikov L. D. On a ground state in Frenkel–Kontorova model and metric properties of mappings of standard type // *Adv. Soviet Math.* 1994. V. 20. P. 277–289.
- [41] Пустыльников Л. Д. Об одной динамической системе с бесконечным числом степеней свободы и о решении задачи Френкеля–Конторовой // *ТМФ*. 1986. Т. 68. №1. С. 58–68.
- [42] Пустыльников Л. Д. О построении периодических решений в бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений Ферми–Паста–Улама, об устойчивости и теории КАМ // *УМН*. 1995. Т. 50. №2. С. 221–222.
- [43] Пустыльников Л. Д. О неоднозначной разрешимости и о неразрешимости аналитического бесконечно-мерного обыкновенного дифференциального уравнения цепочечного типа // *УМН*. 1995. Т. 50. №6. С. 207–208.
- [44] Пустыльников Л. Д. Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики и механизм ускорения Ферми // *УМН*. 1995. Т. 50. №1. С. 143–186.
- [45] Пустыльников Л. Д. Неограниченный рост переменной действия в некоторых физических моделях // *Труды ММО*. 1983. Т. 46. С. 187–200.
- [46] Pustyl'nikov L. D. On the stability of solutions and absence of Arnol'd diffusion in a non-integrable Hamiltonian system of a general form with three degrees of freedom // *Preprint*. №155. Berlin: Weierstraß-Institute für Angewandte Analysis und Stochastic, 1995.
- [47] Пустыльников Л. Д. Об осциллирующих движениях в одной динамической системе // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1987. Т. 51. №5. С. 1010–1032.
- [48] Пустыльников Л. Д. Бесконечно-мерные странные аттракторы и бифуркации в одной динамической системе с бесконечным числом степеней свободы // *ТМФ*. 1992. V. 92. №1. P. 85–91.
- [49] Pustyl'nikov L. D. Many and infinite-dimensional Hamiltonian systems // *Abstracts Inst. Math., Polish Acad. Sci.; Banach Center* / ed. K. Baranski, F. Przytycki, 1995.
- [50] Lokot' T. V., Pustyl'nikov L. D. On some solutions of infinite-dimensional systems of ordinary differential equations originating in statistical mechanics // *Sinai's Moscow Seminar on Dynamical Systems. Adv. Math. Sci. AMS Transl. Ser. 2. V. 171*, 1996. P. 173–183.
- [51] Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959.
- [52] Картан Е. Интегральные инварианты. М.–Л.: Гостехиздат, 1940.
- [53] Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.: ГИТТЛ, 1948.
- [54] Kuksin S. B. КАМ – Theory for Partial Differential Equations // *First European Congress of Mathematics. Vol. II, Invited Lectures (Part 2)*. Basel: Birkhäuser. P. 123–157.
- [55] Пустыльников Л. Д. Теория уравнения с потенциалом Френкеля–Конторовой // *Препринт. №50*. М.: РАН, Ин-т прикл. математики, 1996.
- [56] Пустыльников Л. Д. Теория уравнения с нелинейностью Ферми–Паста–Улама // *Препринт. №55*. М.: РАН, Ин-т прикл. математики, 1996.
- [57] Пустыльников Л. Д. Бесконечномерные обыкновенные дифференциальные уравнения общего вида // *Препринт. №84*. М.: РАН, Ин-т прикл. математики, 1996.