Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Цепные дроби квадратных корней из рациональных чисел и их статистика, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 07:13:57

УДК 511+517.938+519.22

Цепные дроби квадратных корней из рациональных чисел и их статистика

В. И. Арнольд

Описываются различия между статистиками периодических цепных дробей квадратичных иррациональных чисел, с одной стороны, и универсальными статистиками Гаусса–Кузьмина цепных дробей случайных вещественных чисел – с другой.

Кроме этого обзора, обсуждаются также результаты В. А. Быковского и его школы, доказавших гипотезы автора 1993 года о сходстве упомянутых статистик.

Библиография: 10 названий.

Цепные дроби квадратичных иррациональностей (и только их) периодичны по теореме Лагранжа. В частности, периодична цепная дробь числа $\sqrt{u/v}$, где u и v – целые числа. Например,

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

– цепная дробь периода 2.

Цепные дроби таких корней отличаются от других периодических цепных дробей. Настоящая статья доставляет статистическое исследование этих различий, и особенно их поведения при увеличении чисел u и v .

Я явно вычислил периоды, $T(u, v)$, цепных дробей всех 256 чисел $\sqrt{u/v}$, для u и v от 1 до 16 (в случае, когда квадратный корень – рациональное число, я считал “периодом” $T(u, v)$ нуль).

Полученные числа T обнаруживают в среднем некоторый рост при возрастании числителя u и знаменателя v . А именно, обозначим через $\hat{T}(R)$ среднее арифметическое значение чисел $T(u, v)$ по четверти круга $u^2 + v^2 \leq R^2$ (где $u > 0, v > 0$).

Наши таблицы доставляют такое увеличение средних значений периодов, с ростом радиуса R круга усреднения:

R	4	8	12	16
$\hat{T}(R)$	1.25	1.90	2.20	2.75

Этот рост неплохо описывается линейным приближением $\hat{T} \sim a + bR$ (хотя наблюдаемые значения не опровергают ни степенного роста $a + CR^\alpha$, ни даже логарифмической асимптотики при $R \rightarrow \infty$).

Приведшая к описанной статистике таблица периодов $T(u, v)$ цепных дробей чисел $\sqrt{u/v}$ такова:

$v \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	0	1	2	4	2	0	1	2	2	5	4	2	0
2	1	0	2	1	3	2	4	0	2	1	6	2	3	4	4	2
3	2	2	0	2	2	1	6	4	2	4	4	0	2	2	1	2
4	0	1	2	0	2	2	4	1	0	3	8	2	6	4	4	0
5	1	3	2	2	0	2	2	4	6	1	4	6	5	6	2	4
6	2	2	1	2	2	0	2	2	2	2	6	1	4	6	3	4
7	4	4	6	4	2	2	0	2	2	4	6	4	8	1	4	6
8	2	0	4	1	4	2	2	0	2	2	6	2	6	4	4	1
9	0	2	2	0	6	2	2	2	0	2	2	2	6	4	2	0
10	1	1	4	3	1	2	4	2	2	0	2	2	3	2	2	4
11	2	6	4	8	4	6	6	6	2	2	0	2	2	8	6	6
12	2	2	0	2	6	1	4	2	2	2	2	0	2	2	2	2
13	5	3	2	6	5	4	8	6	6	3	2	2	0	2	2	4
14	4	4	2	4	6	6	1	4	4	2	8	2	2	0	2	2
15	2	4	1	4	2	3	4	4	2	2	6	2	2	2	0	2
16	0	2	2	0	4	4	6	1	0	4	6	2	4	2	2	0

Пунктирные линии в этой таблице – границы кругов радиусов $R = 4, 8, 12, 16$.

Доказательство теоремы, формулировкой которой является эта симметрическая матрица, помещено ниже, сначала мы используем эту таблицу и несколько других, доказываемых вместе с ней. Четных значений T удивительно много.

Значение t появляется в качестве периода $T(u, v)$ в нашей таблице в $\#(t)$ случаях, где $\#$ – следующая (удивительная) функция:

Четные длины периодов встречаются почему-то гораздо чаще нечетных, убывание числа появлений $\#(t)$ при росте t носит, в среднем, возможно, линейный характер:

$$\#(t) \sim \alpha - \beta t \quad (\text{при } t < \alpha/\beta).$$

Сходные явления я обнаружил в статистике периодов цепных дробей для корней уравнений $x^2 + px + q = 0$ с ограниченными коэффициентами, $p^2 + q^2 \leq R^2$.

Гипотеза о линейном (в среднем) убывании с ростом t числа $\#(t)$ появлений значения t при росте величины этого значения не доказана ни для этого семейства уравнений, ни для рассматриваемого в настоящей статье семейства уравнений $vx^2 = u$.

Приведенный выше график функции $\#$ распределения значений периода можно было бы истолковать и как степенную зависимость $Ct^{-\mu}$, и как экспоненциальное убывание $Ce^{-\lambda t}$.

Для выбора между этими гипотезами было бы полезным вычисление распределения $\#(t) dt$ величины T для таблиц бóльшего размера, чем наши 256 примеров (скажем, для $u, v \leq 100$).

Наши вычисления позволяют исследовать не только периоды $T(u, v)$ цепных дробей для чисел $\sqrt{u/v}$, но и другие характеристики этих цепных дробей.

Для цепной дроби числа $\sqrt{u/v}$ составим сумму $T(u, v)$ неполных частных, составляющих период,

$$\Sigma(u, v) = a_2 + a_3 + \dots + a_{T+1}$$

(периоды, в пределах таблицы, состоят из одного лишь члена $a_1 = [\sqrt{u/v}]$: следующие T неполных частных уже составляют, почему-то, период).

Вычисленные таким образом числа $\Sigma(u, v)$ составили следующую (симметрическую матрицу):

Суммы Σ неполных частных, составляющих периоды
цепных дробей чисел $\sqrt{u/v}$ (для u, v от 1 до 16)

$v \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	2	3	0	4	6	7	5	0	6	9	8	10	10	7	0
2	2	0	6	2	4	3	10	0	12	4	18	6	6	7	8	5
3	3	6	0	8	5	2	14	5	3	8	14	0	16	10	4	7
4	0	2	8	0	10	6	18	2	0	4	20	3	26	10	18	0
5	4	4	5	10	0	12	7	9	20	2	20	10	6	24	3	7
6	6	3	2	6	12	0	14	8	6	5	12	2	14	14	4	5
7	7	10	14	18	7	14	0	16	9	20	26	12	23	2	12	26
8	5	0	5	2	9	8	16	0	18	10	17	6	11	18	7	2
9	0	12	3	0	20	6	9	18	0	20	11	8	32	32	5	0
10	6	4	8	4	2	5	20	10	18	0	22	12	16	7	6	9
11	9	18	14	20	20	12	26	17	11	22	0	24	13	38	38	17
12	8	6	0	3	10	2	12	6	8	12	24	0	26	14	10	8
13	10	6	16	26	6	14	23	11	32	16	13	26	0	28	15	27
14	10	7	10	10	24	14	2	18	32	7	38	14	28	0	30	16
15	7	8	4	18	3	4	12	7	5	6	38	10	15	30	0	32
16	0	5	7	0	7	5	26	2	0	9	17	8	27	16	32	0

В этой таблице почему-то тоже преобладают четные числа $\Sigma(u, v)$.

С ростом чисел u и v суммы составляющих период неполных частных, Σ , тоже растут. Обозначим через $\widehat{\Sigma}(R)$ среднее арифметическое значение чисел $\Sigma(u, v)$ в четверти круга радиуса R , $u^2 + v^2 \leq R^2$, $u > 0$, $v > 0$. Наша

таблица доставляет такие значения средних сумм элементов периодов $\widehat{\Sigma}(R)$:

R	4	8	12	16
$\widehat{\Sigma}(R)$	2.75	5.07	6.69	9.09

Эти значения неплохо укладываются на прямую линию

$$\widehat{\Sigma}(R) \approx q + pR,$$

но наклон p получается примерно $(9.09 - 2.75)/(16 - 4) \approx 0.528$, в то время как наклон b для $\widehat{T}(R) \approx a + bR$ гораздо меньше: $(2.75 - 1.25)/(16 - 4) \approx 0.125$.

Это различие отражает средний рост самых неполных частных (сумма T из которых составляет Σ). Такой рост заранее не предполагался, так как согласно Быковскому и его ученикам (ср. [1], [2]) среднее распределение неполных частных цепных дробей для квадратичных иррациональностей подчиняется статистике Гаусса–Кузьмина (неполных частных цепных дробей случайных вещественных чисел), которая универсальна и ни от какого радиуса усреднения R не зависит.

Для изучения среднего поведения неполных частных я вычислял еще средние по периоду неполные частные разных квадратичных иррациональностей. Например, рассмотрим отношение $\gamma(R) = \sigma(R)/\tau(R)$ суммы $\sigma(R)$ всех сумм $\Sigma(u, v)$ неполных частных периодов цепных дробей квадратичных иррациональностей $\sqrt{u/v}$, где $u^2 + v^2 \leq R^2$, к их числу $\tau(R)$ (сумме всех длин $T(u, v)$ периодов этих дробей). Наши две таблицы дают следующие значения:

R	4	8	12	16
$\tau(R)$	10	78	216	504
$\sigma(R)$	22	208	656	1664
$\gamma(R)$	2.20	2.67	3.04	3.30

Рост с радиусом усреднения R среднего неполного частного γ виден и тут, но можно предполагать его замедление при увеличении параметра R (и даже стремление γ к среднему по статистике Гаусса–Кузьмина, подобное предположенному мною в 1993 г. и доказанному Быковским и его учениками около 2001 г. для цепных дробей других квадратичных иррациональностей, см. [1], [2], [3; задача 1993-11, с. 94 и 381–382 рус. изд., задача 1993-33, с. 94 и 381–382], [4]).

Для средних неполных частных цепных дробей корней уравнений $x^2 + x = Q$ с целым Q получились такие средние (по Q из интервала $r(r+1) < Q < (r+1)(r+2)$) значения $\gamma'(r)$:

r	1	2	3	4	5	6
γ'	2	2.6	2.93	3.27	3.81	3.74

Сходство этой таблицы с предыдущей указывает на какую-то универсальность наблюдаемого роста средних по периоду неполных частных цепных дробей квадратичных иррациональностей с ростом коэффициентов задающих их уравнений, но таких теорем я не доказал.

Причиной отличия статистики неполных частных для цепных дробей квадратных корней из рациональных чисел от универсальной статистики Гаусса–Кузьмина (для случайных вещественных чисел) может явиться то, что, хотя общие квадратичные иррациональности имеют периодами любые конечные последовательности неполных частных, для квадратичных корней из рациональных чисел это не так.

Например, я отметил уже в работе [5], что последовательности неполных частных цепных дробей квадратных корней рациональных чисел палиндромны (могут читаться задом наперед). Например, если период составляют T неполных частных $[a_2, a_3, \dots, a_{T+1}]$ (как оно почему-то и есть в наших случаях), то

$$a_k = a_l \quad \text{при } k + l = T + 2 \quad (k > 1, l > 1).$$

Свойство палиндромности периода цепной дроби доказано в статье [5] для чисел $\sqrt{u/v}$, где целое число u не делится на квадрат большего 1 целого числа, но я не знаю контрпримеров к палиндромности периода цепной дроби чисел $\sqrt{u/v}$ ни при каких целых u и v . Возможно, геометрическое доказательство из статьи [5] переносится и на более широкий класс случаев.

Например, палиндромными оказались также периоды цепных дробей корней уравнений $x^2 + px + q = 0$ с целыми p и q . Я доказал это в сотнях бесконечных серий случаев и не нашел ни одного контрпримера с не палиндромным периодом дроби. [После того, как настоящая статья была закончена, обе мои указанные гипотезы о палиндромности были доказаны Ф. Аикарди и М. Павловской (разными и независимыми друг от друга способами).]

Таким образом, последовательность неполных частных, составляющая период нашей специальной квадратичной иррациональности, не произвольна, а удовлетворяет каким-то (возможно, еще не полностью известным) ограничениям: кроме палиндромности периода цепной дроби могут обнаружиться и другие ограничения (а если их нет, было бы интересно это доказать).

На первый взгляд все такие ограничения противоречат статистике Гаусса–Кузьмина, выполненной асимптотически и в случае квадратичных иррациональностей (с большими коэффициентами задающего квадратного уравнения) по теореме Быковского и его сотрудников, доказавших “гипотезы Арнольда” об этом.

Но противоречия здесь нет, так как даже и такая конечная последовательность, которая не может составлять период нашей специальной иррациональности (вида $vx^2 = u$ или $x^2 + px + q = 0$), может встречаться в качестве части периодов большей длины, и притом даже с такой частотой, которую предписывает универсальная статистика Гаусса–Кузьмина.

Кажущееся противоречие возникает здесь из-за неравномерности сходимости при $R \rightarrow \infty$ частот различных неполных частных (или их последовательностей) в конечных семействах, где $p^2 + q^2 \leq R^2$ или $u^2 + v^2 \leq R^2$: явление, типичное при достаточно больших R , может быть нереализуемым при малых R , и при фиксированном, даже большом, значении R приближенно реализуется не вся статистика Гаусса–Кузьмина (частот встречаемости любых комбинаций неполных частных), а только малая ее часть (относящаяся к коротким комбинациям небольших неполных частных).

Как именно выглядит статистика составляющих периоды наших иррациональностей последовательностей неполных частных – интересный, но малоисследованный вопрос. Ниже приведены экспериментальные данные, подсказывающие некоторые черты этой малопонятной картины.

Вот таблица неполных частных, составляющих периоды $[a_2, a_3, \dots, a_{T+1}]$ цепных дробей квадратичных иррациональностей чисел $\sqrt{u/v}$, где $1 \leq u, v \leq 16$ (нули в таблице поставлены там, где число $\sqrt{u/v}$ рационально).¹ Начнем с части, где $u, v \leq 8$:

$v \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	[2]	[12]	0	[4]	[24]	[1114]	[14]
2	[2]	0	[42]	[2]	[112]	[12]	[1612]	0
3	[12]	[42]	0	[62]	[32]	[2]	[118112]	[1112]
4	0	[2]	[62]	0	[82]	[42]	[3(10)32]	[2]
5	[4]	[112]	[32]	[82]	0	[(10)2]	[52]	[3132]
6	[24]	[12]	[2]	[42]	[(10)2]	0	[(12)2]	[62]
7	[1112]	[1612]	[118112]	[3(10)32]	[52]	[(12)2]	0	[(14)2]
8	[14]	0	[1112]	[2]	[3132]	[62]	[(14)2]	0

Здесь уже заметна палиндромность. При длине периода $T = 1$ или 2 она не утверждает ничего нового, по сравнению с периодичностью. Но уже при периоде длины $T = 3$ она вызывает повторение: неполные частные образуют последовательность $[a, a, b]$ ради палиндромности. При длине периода $T = 4$ составляющие его неполные частные должны повторяться как $[a, b, a, c]$, а при длине $T = 6$ – как $[a, b, c, b, a, d]$.

Далее выписана таблица составляющих периоды неполных частных цепных дробей для $\sqrt{u/v}$, где $8 < u \leq 16, 0 < v \leq 8$ (поскольку для $\sqrt{v/u}$ период такой же, эта таблица доставляет ответы и при $0 < u \leq 8, 0 < v \leq 16$):

$v \backslash u$	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	[6]	[36]	[26]	[11116]	[1216]	[16]	0
2	[84]	[4]	[218124]	[24]	[114]	[1114]	[1214]	[14]
3	[12]	[1412]	[1(10)12]	0	[(12)4]	[64]	[4]	[34]
4	0	[112]	[111(12)1112]	[12]	[14(14)412]	[1612]	[1(14)12]	0
5	[21(12)122]	[2]	[2(14)22]	[114112]	[11112]	[12(16)212]	[12]	[1312]
6	[42]	[32]	[214122]	[2]	[2822]	[118112]	[112]	[1112]
7	[72]	[5852]	[31(16)132]	[3432]	[21393122]	[2]	[2622]	[11(20)112]
8	[(16)2]	[82]	[513152]	[42]	[311132]	[3(10)32]	[3122]	[2]

Здесь обращает на себя внимание обилие степеней двойки среди неполных частных, особенно в концах периодов: нечетные неполные частные вообще встречаются почему-то реже четных (как и нечетные длины периодов). Некоторые другие странные закономерности, заметные в этой таблице, сформулированы ниже (и даже доказаны).

¹В этой таблице периоды вроде $[1, 2, 12, 3, 3]$ обозначаются для краткости через $[12(12)33]$.

Таблица неполных частных, составляющих периоды цепных дробей чисел $\sqrt{u/v}$ при $8 < u, v \leq 16$, вычисляется легче предыдущей, поскольку $\sqrt{u/v}$ не меняется при умножении на одну и ту же постоянную и числителя, и знаменателя.

$v \backslash u$	9	10	11	12	13	14	15	16
9	0	[(18)2]	[92]	[62]	[41(20)142]	[4(22)42]	[32]	0
10	[(18)2]	0	[(20)2]	[(10)2]	[772]	[52]	[42]	[3132]
11	[92]	[(20)2]	0	[(22)2]	[(11)2]	[714(12)4172]	[51(24)152]	[415142]
12	[62]	[(10)2]	[(22)2]	0	[(24)2]	[(12)2]	[82]	[62]
13	[41(20)142]	[772]	[(11)2]	[(24)2]	0	[(26)2]	[(13)2]	[9792]
14	[4(22)42]	[52]	[714(12)4172]	[(12)2]	[(26)2]	0	[(28)2]	[(14)2]
15	[32]	[42]	[51(24)152]	[82]	[(13)2]	[(28)2]	0	[(30)2]
16	0	[3132]	[415142]	[62]	[9792]	[(14)2]	[(30)2]	0

Здесь обращает на себя внимание повсеместное окончание периода двойкой. Хотя эти двойки отражают специальную симметрию приведенных ниже вычислений неполных частных, соответствующая теорема не только не доказана, но и не сформулирована явно в виде гипотезы.

Доказательством теорем, формулировки которых составляют приведенные выше таблицы, является явное вычисление неполных частных цепных дробей перечисленных иррациональностей.

Компьютерное прямое вычисление цепных дробей с трудом определяет период, если он сколько-нибудь длинен, так как при вычислении разложения числа в цепную дробь вычислительная ошибка быстро становится слишком большой и точность вычисления неполных частных делается недостаточной.

Поэтому я изобрел другие способы, специально приспособленные именно к квадратичным иррациональностям. Я изложу такой способ ниже, но начну с нескольких серий специальных случаев, когда цепная дробь вычисляется особенно быстро.

ПРИМЕР. *Случай периода длины $T = 2$ из неполных частных $[a, 2]$.*

Бесконечная 2-периодическая цепная дробь

$$t = \frac{1}{a + \frac{1}{2 + \frac{1}{a + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

удовлетворяет уравнению

$$t = \frac{1}{a + \frac{1}{2 + t}}.$$

Из этого уравнения следует, что

$$t = \frac{2 + t}{(2a + 1) + at},$$

так что t – корень квадратного уравнения

$$at^2 + (2a + 1)t = 2 + t.$$

Следовательно, $at^2 + 2at = 2$, а потому

$$a(t + 1)^2 = a + 2, \quad t = \sqrt{\frac{a + 2}{a}} - 1.$$

Мы доказали, что *цепная дробь числа*

$$x = \sqrt{\frac{a + 2}{a}} = 1 + t$$

имеет вид $x = [1 + [a, 2]]$ (предпериод 1, период из неполных частных a и 2), так что $T(a + 2, a) = 2$.

Если $a = 2r$ чётно, то мы вычислили цепную дробь для числа

$$x = \sqrt{\frac{a + 2}{a}} = \sqrt{\frac{r + 1}{r}},$$

доказав тем самым, что

$$T(r + 1, r) = 2, \quad x = [1 + [2r, 2]].$$

Такую же цепную дробь мы получаем и в случае $u = s(r + 1)$, $v = sr$ (ибо тогда $u/v = (r + 1)/r$).

Если же $a = 2r - 1$ нечётно, то мы доказали, что

$$T(2r + 1, 2r - 1) = 2, \quad \Sigma(2r + 1, 2r - 1) = 2r + 1,$$

$$x = \sqrt{\frac{2r + 1}{2r - 1}} = [1 + [(2r - 1), 2]].$$

Здесь тоже можно было бы умножить на s числитель и знаменатель:

$$T(s(2r + 1), s(2r - 1)) = 2, \quad \Sigma(s(2r + 1), s(2r - 1)) = 2r + 1.$$

Все эти факты использовались при составлении предыдущих таблиц. Я нашёл десятки серий, подобных описанной здесь, и приведу только пять ответов:

$$\begin{aligned} T(A^2 - 1, 1) &= 2, & x &= [A - 1 + [1, (2A - 2)]]; \\ T(A^2 + 2, 1) &= 2, & x &= [A + [A, 2A]]; \\ T(A^2 - 2, 1) &= 4, & x &= [[x] + [1, (A - 2), 1, (2A - 2)]]; \\ T(4A^2 + A, 1) &= 2, & x &= [[x] + [4, 4A]]; \\ T(4A^2 + 4, 1) &= 2, & x &= [[x] + [A, 4A]]. \end{aligned}$$

Когда неполные частные выписаны, проверка того, что они составляют период нужной цепной дроби, – дело простое. Но находить их гораздо труднее, и вот как я это сделал.

Чтобы исследовать цепную дробь квадратичной иррациональности

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots},$$

рассмотрим число

$$x_k = \frac{h_k \sqrt{Q} + f_k}{g_k} \quad (*)$$

(где f_k, g_k, h_k — целые числа, $g_k \geq 1, h_k \geq 1, f_k \geq 0$). Например, для исследования числа $x_1 = \sqrt{u/v}$ мы запишем его в виде (*), выбрав $Q = uv, f_1 = 0, h_1 = 1, g_1 = v$.

Если число x_k уже известно и $a_k = [x_k]$ — его целая часть, то мы обозначим его дробную часть через

$$t_k = x_k - a_k = \frac{h_k \sqrt{Q} - F_k}{g_k},$$

здесь $F_k = a_k g_k - f_k$ — целое неотрицательное число.

Чтобы искать для x_k разложение в цепную дробь, перейдем к числу

$$x_{k+1} = \frac{1}{t_k} = \frac{g_k(h_k \sqrt{Q} + F_k)}{h_k^2 Q - F_k^2} \quad (**)$$

и будем искать цепную дробь для него.

Удивительно часто обнаруживается (сильно упрощающее вычисления) сокращение дроби (**). Часто даже знаменатель формулы (**) делится на g_k (скажем, $h_k^2 Q - F_k^2 = g_k g_{k+1}$ с натуральным g_{k+1}).

Переписывая формулу (**) в виде (*) (в приведенном случае делимости обозначая

$$h_{k+1} = h_k, \quad f_{k+1} = F_k, \quad g_{k+1} = \frac{h_k^2 Q - F_k^2}{g_k},$$

где $F_k = a_k g_k - f_k$), мы можем двигаться дальше таким же способом (от x_{k+1} к x_{k+2} и т.д.).

Следующий пример показывает, как работает этот алгоритм. Разложим в цепную дробь число $x_1 = \sqrt{11/8} \approx 1.17$.

В этом случае $a_1 = 1, t_1 = (\sqrt{11} - 2\sqrt{2})/(2\sqrt{2}) = (\sqrt{22} - 4)/4$, где $\sqrt{22} \approx 4.7$. По указанному алгоритму находим последовательно

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{4(\sqrt{22} + 4)}{22 - 16} = \frac{2\sqrt{22} + 8}{3} \approx 5.8, & a_2 &= 5, & t_2 &= \frac{2\sqrt{22} - 7}{3}; \\ x_3 &= \frac{3(2\sqrt{22} + 7)}{88 - 49} = \frac{2\sqrt{22} + 7}{13} \approx 1.26, & a_3 &= 1, & t_3 &= \frac{2\sqrt{22} - 6}{13}; \\ x_4 &= \frac{13(2\sqrt{22} + 6)}{88 - 36} = \frac{\sqrt{22} + 3}{2} \approx 3.8, & a_4 &= 3, & t_4 &= \frac{\sqrt{22} - 3}{2}; \\ x_5 &= \frac{2(\sqrt{22} + 3)}{22 - 9} \approx 1.2, & a_5 &= 1, & t_5 &= \frac{2\sqrt{22} - 7}{13}; \\ x_6 &= \frac{13(2\sqrt{22} + 7)}{88 - 49} = \frac{2\sqrt{22} + 7}{3} \approx 5.5, & a_6 &= 5, & t_6 &= \frac{2\sqrt{22} - 8}{3}; \\ x_7 &= \frac{3(2\sqrt{22} + 8)}{88 - 64} = \frac{\sqrt{22} + 4}{4} \approx 2.2, & a_7 &= 2, & t_7 &= \frac{\sqrt{22} - 4}{4}. \end{aligned}$$

Заметим, что $t_7 = t_1$. Из этого повторения дробных долей следует повторение и всего последующего, а потому периодичность (и алгоритма, и цепной дроби) с периодом $T(11, 8) = 7 - 1 = 6$ (так как $t_1 = t_7 = t_{13} = t_{19} = \dots$).

Тем самым мы полностью вычислили периодическую цепную дробь

$$\sqrt{\frac{11}{8}} = [1 + [5, 1, 3, 1, 5, 2]], \quad T = 6, \quad \Sigma = 17.$$

Таковыми же вычислениями находятся все цепные дроби наших таблиц. Все они оказываются палиндромными. Эта палиндромность проявляется в указанном алгоритме в виде странной симметрии коэффициентов f_k, g_k, h_k и F_k .

А именно, для $k > 1, l > 1$

$$\begin{aligned} a_k &= a_l && \text{при } k + l = T + 2, \\ F_k &= f_l && \text{при } k + l = T + 2, \\ h_k &= h_l && \text{при } k + l = T + 2, \\ g_k &= g_l && \text{при } k + l = T + 2, \\ f_k &= f_l && \text{при } k + l = T + 3. \end{aligned}$$

Я не доказывал соответствующих общих фактов (хотя они наблюдаются также, например, для палиндромных цепных дробей корней x уравнений $x^2 + px + q = 0$).

Замечу лишь, что указанные симметрии подсказывают интересные геометрические свойства набора векторов (f_k, g_k) в случае $h = 1$ (нужном для исследования цепных дробей корней уравнений $x^2 + px + q = 0$).

Статистические свойства цепных дробей чисел $\sqrt{u/v}$ кажутся в наших экспериментах похожими на статистические свойства цепных дробей корней уравнений $x^2 + px + q = 0$ (даже своими отличиями от статистических свойств цепных дробей других квадратичных иррациональностей).

На обязательность таких отличий (вероятно, еще не открытых) указывают следующие энтропийные соображения. Число слов длины T из неполных частных, удовлетворяющих статистике Гаусса–Кузьмина, растет, вероятно, как $e^{\lambda T}$, где $\lambda > 0$ – энтропия соответствующей динамической системы на единицу времени.

Число объектов сложности R (скажем, квадратных уравнений $x^2 + px + q = 0$ с $p^2 + q^2 \leq R^2$, или же $vx^2 = u$ с $u^2 + v^2 \leq R^2$) растет с параметром R всего лишь степенным образом (как R^2). Поэтому огромное большинство слов, удовлетворяющих статистике Гаусса–Кузьмина и имеющих длину $\hat{T}(R)$ (среднего периода цепной дроби для квадратичной иррациональности данной сложности R), не встречается среди периодов этих иррациональностей. Значит, слова из неполных частных, составляющие такие периоды, должны быть очень специальными – они удовлетворяют каким-то условиям, резко сокращающим число возможностей (от $e^{\lambda \hat{T}}$ до R^2).

К сожалению, явно эти ограничительные условия, кроме разве палиндромности, не указаны². Я не знаю, на какие другие семейства квадратичных иррациональностей переносятся палиндромность и иные ограничивающие свойства, общие для цепных дробей корней уравнений $x^2 + px + q = 0$ и $vx^2 = u$.

Я не знаю, во что превращается обсуждавшаяся выше теория поведения средних $\hat{T}(R)$ и $\hat{\Sigma}(R)$ при переходе от квадратичных иррациональностей к кубическим и от обычных цепных дробей к многомерным.

Алгебраические числа степени n связаны с “парусом” – $(n - 1)$ -мерной целочисленной выпуклой полиэдральной гиперповерхностью в n -мерном пространстве. Эта гиперповерхность инвариантна относительно входящей в $SL(n, \mathbb{Z})$ группы симметрий $\mathbb{Z}^{n-1}$. Факторпространство паруса по этой группе симметрий задает “триангуляцию” $(n - 1)$ -мерного тора, разбивающую его на выпуклые “целочисленные многогранники” (см. [6]–[10]).

Простейшим примером является здесь триангуляция двумерного тора из двух треугольников, $\square$, соответствующая “трехмерному аналогу золотого сечения”, являющемуся собственным числом матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обычное золотое сечение соответствует матрице Фибоначчи $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, и аналогичным образом выписывается матрица, дающая простейшую “триангуляцию” в размерности n .

Вопрос о том, какие “триангуляции” тором реализуются многомерными цепными дробями целочисленных матриц с определителем 1, кажется алгоритмически неразрешимым.

Период T и сумма неполных частных Σ , составляющих этот период, заменяются в n -мерном случае целым набором интересных геометрических и арифметических характеристик указанной “триангуляции”.

Например, можно рассмотреть

- число вершин “триангуляции”;
- число граней “триангуляции”;
- сумму целочисленных площадей граней;
- число целых точек на всех гранях

и т. д. Все подобные характеристики должны зависеть от сложности определяющего парус объекта (например, от матрицы A из $SL(n, \mathbb{Z})$, для которой парус представляет собой выпуклую оболочку множества целых точек одного из 2^n ортантов, на которые делят n -мерное пространство n собственных гиперплоскостей матрицы).

Исследованным выше для случая квадратичных иррациональностей ($n = 2$) вопросам соответствуют в n -мерном случае вопросы о средних значениях указанных выше (и подобных им) характеристик паруса, когда матрица A пробегает растущее с R множество (скажем, $\|A\| \leq R$).

Можно ставить аналогичные вопросы и для многомерных цепных дробей целочисленного характеристического уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ степени n (усреднения по шарам в пространстве матриц и в пространстве уравнений могут приводить к разным асимптотикам при $R \rightarrow \infty$, даже если изучать те же паруса и характеристики тех же цепных дробей и даже если $n = 2$).

²Интересно было бы исследовать, например, статистику диаграмм Юнга, описывающих кратности повторений неполных частных в периодах – отличается ли она от стандартной, для случайных наборов, удовлетворяющих статистике Гаусса–Кузьмина?

Именно эти n -мерные вопросы были исходным пунктом моих исследований цепных дробей, но я решил, что даже при $n = 3$ (для кубических иррациональностей) трудно двигаться вперед, пока не понят как следует двумерный случай квадратичных иррациональностей.

Ради этого я и написал настоящую работу, в которой хотя бы наблюдаются, если не доказаны во всей общности, закономерности статистической зависимости сложности паруса от сложности задающего его уравнения.

Список литературы

- [1] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, *Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина*, Препринт ДВО РАН № 08, Дальнаука, Владивосток, 2002.
- [2] М. О. Авдеева, “О статистиках нескольких частных конечных цепных дробей”, *Функц. анализ и его прилож.*, **38**:2 (2004), 1–11; англ. пер.: М. О. Avdeeva, “On the statistics of partial quotients of finite continued fractions”, *Funct. Anal. Appl.*, **38**:2 (2004), 79–87.
- [3] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000; англ. пер.: V. I. Arnold, *Arnold’s problems*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [4] В. И. Арнольд, *Задачи семинара 2003–2004*, МЦНМО, М., 2005.
- [5] V. I. Arnold, “Arithmetics of binary quadratic forms, symmetry of their continued fractions and geometry of their de Sitter world”, *Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.)*, **34**:1 (2003), 1–42.
- [6] В. И. Арнольд, *Цепные дроби*, МЦНМО, М., 2001.
- [7] H. Tsuchihashi, “Higher-dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities”, *Tohoku Math. J. (2)*, **35**:4 (1983), 607–639.
- [8] O. N. Karpenkov, *On examples of two-dimensional periodic continued fractions*, Preprint № 2004-30, Université Paris-Dauphine, 2004; <http://www.ceremade.dauphine.fr/preprints/CMD/2004-30.pdf>; [arXiv: math/0411054](https://arxiv.org/abs/math/0411054).
- [9] Е. И. Коркина, “Двумерные простые дроби. Самые простейшие примеры”, *Особенности гладких отображений с дополнительными структурами*, Тр. МИАН, **209**, 1995, 143–166; англ. пер.: E. I. Korkina, “Two-dimensional continued fractions. The simplest examples”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **209**, 1995, 124–144.
- [10] E. I. Korkina, “La périodicité des fractions continues multidimensionnelles”, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **319**:8 (1994), 777–780.

В. И. Арнольд (V. I. Arnol’d)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: arnold@ceremade.dauphine.fr

Поступила в редакцию

14.03.2007