Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, М. М. Гехтман, К вопросу о максимально возможной скорости роста системы собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с непрерывной весовой функцией на конечном отрезке, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm851>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:49:35

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ
СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

К ВОПРОСУ О МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНОЙ СКОРОСТИ
РОСТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С НЕПРЕРЫВНОЙ
ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Г. А. Айгунов, М. М. Гехтман

1. Пусть число $p > 0$, m и M ($0 < m < M$) фиксированы. Обозначим через $C_{[0,1]}^+$ совокупность всех непрерывных на сегменте $[0, 1]$ функций $\rho(x)$, удовлетворяющих условию $0 < m \leq \rho(x) \leq M < \infty$.

В множестве $C_{[0,1]}^+$ введем обычную C -метрику и будем в дальнейшем называть функции, принадлежащие классу $C_{[0,1]}^+$, весовыми функциями.

Через $C_{[0,1]}^\infty$ обозначим класс непрерывных на $[0, 1]$ функций, имеющих производные любого порядка в точках полусегмента $[0, 1)$.

Пусть $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$. Рассмотрим спектральную задачу

$$(1) \quad -y''(x) = \lambda \rho(x) y(x) \quad (0 < x < 1),$$

$$(2) \quad y(0) = y(1) = 0,$$

$$(3) \quad \int_0^1 \rho(x) |y(x)|^p dx = 1.$$

Известно, что спектр задачи (1)–(3) дискретен и состоит из простых положительных чисел λ_n ($n = 1, 2, \dots$). Обозначим через $u_n(x)$ собственную функцию, соответствующую собственному числу λ_n . Чтобы подчеркнуть зависимость от весовой функции $\rho(x)$, будем писать иногда $\lambda_n(\rho)$ и $u_n(x, \rho)$.

В классических работах Штурма, Лиувилля и В. А. Стеклова в предположении некоторой гладкости весовой функции $\rho(x)$ и для $p = 2$ было доказано, что

$$(4) \quad \sup_n \max_{0 \leq x \leq 1} |u_n(x)| \leq C_0 < \infty, \quad C_0 > 0.$$

В работе [1] было выяснено, однако, что в классе всех весовых функций $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$ неравенство (4), вообще говоря, неверно.

В работе [2] был предложен метод построения специальных решений уравнения (1), позволяющий изучить максимально возможную скорость роста системы собственных функций оператора Штурма–Лиувилля (1)–(3).

Этот результат был усилен затем в [3], что позволило получить окончательную (в классе весовых функций $C_{[0,1]}^+$) оценку скорости роста системы ортонормированных ($p = 2$) собственных функций оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке.

Цель настоящей работы – изучить асимптотическое поведение собственных функций оператора Штурма–Лиувилля в случае весовой функции $\rho(x) \in C_{[0,1]}^\infty \cap C_{[0,1]}^+$.

2. Пусть $\{\alpha_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) – произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию $\lim \alpha_n = 0, n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА.

- 1) Пусть $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$. Тогда для собственных чисел $\lambda_n(\rho)$ и собственных функций $u_n(x, \rho)$ спектральной задачи (1)–(3) справедливо равенство

$$\lim \frac{\|u_n(x, \rho)\|_{C_{[0,1]}}}{[\lambda_n(\rho)]^{\frac{1}{2p}}} = 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

- 2) Пусть $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$. Тогда в любой C -окрестности весовой функции $\rho(x)$ существует весовая функция $\rho_0(x) \in C_{[0,1]}^\infty \cap C_{[0,1]}^+$ такая, что

$$\overline{\lim} \frac{\|u_n(x, \rho_0)\|_{C_{[0,1]}}}{\alpha_n [\lambda_n(\rho_0)]^{\frac{1}{2p}}} = \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Доказательство теоремы основывается на двух леммах. Сформулируем эти леммы.

ЛЕММА 1. Для каждого фиксированного номера n функционал

$$\Phi_n(\rho) \equiv \frac{\|u_n(x, \rho)\|_{C_{[0,1]}}}{\alpha_n [\lambda_n(\rho)]^{\frac{1}{2p}}} \quad (\rho(x) \in C_{[0,1]}^+)$$

в метрике C непрерывно зависит от весовой функции $\rho(x)$.

Обозначим через $S(\rho_0, \varepsilon)$ – шар в пространстве $C_{[0,1]}^+$ с центром в $\rho_0(x)$ и радиусом $\varepsilon > 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $\varepsilon > 0, a \in (0, 1), \rho_0(x) \in C_{[0,1]}^+ \cap C_{[0,1]}^\infty$ и $\rho_0(x) \equiv \rho_0(a)$ ($x \geq a$). Тогда последовательность функционалов $\Phi_n(\rho)$ ($n = 1, 2, \dots$) не является равномерно ограниченной на множестве весовых функций $\rho(x) \in S(\rho_0, \varepsilon)$, удовлетворяющих условию $\rho(x) \equiv \rho_0(x)$ ($0 \leq x \leq a$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гехтман М. М., Загиров Ю. М., Якубов В. Я. // Функци. анализ и его прил. 1983. Т. 17. № 3. С. 71–72. [2] Гехтман М. М. // Матем. сб. 1987. Т. 133 (175). № 2. С. 184–199. [3] Айгунов Г. А., Гехтман М. М. // Изв. ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1996. № 4. С. 3–8.