Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Гугнин, Полиномиально зависимые гомоморфизмы. Теорема единственности n -гомоморфизмов Фробениуса, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:55:05

Полиномиально зависимые гомоморфизмы. Теорема единственности n -гомоморфизмов Фробениуса

Д. В. Гугнин

Понятие n -гомоморфизма Фробениуса было введено в 1996–1997 гг. В. М. Бухштабером и Э. Рисом, давшими два различных определения и доказавшими их эквивалентность. Теория развита в [1], [2]. Здесь мы приводим третье определение n -гомоморфизма, которое позволяет рассмотреть n -гомоморфизмы как частный случай общего понятия полиномиально зависимых гомоморфизмов.

Для симметрического многочлена $p_{n+1}(t) = t_1^{n+1} + \dots + t_n^{n+1}$ существует однозначно определенный многочлен $F_{n+1}(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n]$ такой, что $p_{n+1}(t) = F_{n+1}(p_1(t), \dots, p_n(t))$, где $p_k(t) = t_1^k + \dots + t_n^k$, $1 \leq k \leq n$, – многочлены Ньютона. Многочлен $F_{n+1}(z_1, \dots, z_n)$ мы назовем n -м многочленом Фробениуса.

Всюду далее под кольцом R понимается коммутативное кольцо с единицей, содержащее поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а под алгебрами $A, B, C, \dots$ – коммутативные ассоциативные R -алгебры с единицей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейное отображение R -алгебр $f: A \rightarrow B$ называется n -гомоморфизмом Фробениуса, если выполнены следующие условия:

- 1) $f(1_A) = n \cdot 1_B$;
- 2) $f(a^{n+1}) = F_{n+1}(fa, fa^2, \dots, fa^n)$ для каждого $a \in A$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – кольцо, A – R -алгебра, K – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и $\sigma: R \rightarrow K$ – гомоморфизм колец, превращающий K в R -алгебру. Тогда для любого n -гомоморфизма $f: A \rightarrow K$ существуют и единственны (с точностью до перестановок) гомоморфизмы R -алгебр $f_1, \dots, f_n: A \rightarrow K$ такие, что $f = f_1 + \dots + f_n$.

Этот результат при различных дополнительных ограничениях на R, K и A был разными методами получен ранее, сначала В. М. Бухштабером и Э. Рисом в [1], а потом автором в [3]. Доказательство утверждения в общем случае получено автором и использует новый подход, основанный на нетривиальной теореме В. М. Бухштабера и Э. Риса об универсальном n -гомоморфизме.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем называть полиномиальным законом над кольцом R пару $(\mu, \mathcal{P})$, где $\mu \in R$ и $\mathcal{P}$ – некоторое множество многочленов из $\varinjlim R[z_1, z_2, \dots, z_k] = R[z_1, z_2, \dots]$, содержащее хотя бы один ненулевой многочлен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Линейное отображение R -алгебр $f: A \rightarrow B$ называется гомоморфизмом, полиномиально зависимым по закону $(\mu, \mathcal{P})$ (кратко $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизмом), если

- 1) $f(1_A) = \mu \cdot 1_B$;
- 2) $P(fa, fa^2, \dots, fa^m) = 0$ для каждого $a \in A$ и каждого $P(z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathcal{P}$.

Ясно, что закон n -гомоморфизма Фробениуса является $(\mu, \mathcal{P})$ -законом, где $\mu = n$ и $\mathcal{P} = \{z_{n+1} - F_{n+1}(z_1, \dots, z_n)\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Два полиномиальных закона $(\mu, \mathcal{P})$ и $(\nu, \mathcal{Q})$ над одним кольцом R называются эквивалентными, если

- 1) $\mu = \nu$;
- 2) для любых алгебр A, B множество $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизмов из A в B совпадает с множеством $(\nu, \mathcal{Q})$ -гомоморфизмов из A в B .

Имеет место следующая важная лемма.

ЛЕММА 1. 1) Композиция $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизма и гомоморфизма алгебр в любом порядке дает снова $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизм.

2) Для любых алгебр A, B и любого линейного отображения $f: A \rightarrow B$ следующие условия эквивалентны:

- а) f является $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизмом;
- б) Композиция $f \circ g_a: R[x] \rightarrow B$, где g_a – гомоморфизм алгебр $R[x] \rightarrow A$, $g_a(x) = a$, является $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизмом для каждого $a \in A$.

Эта лемма указывает на особую роль алгебры $R[x]$ при изучении $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизмов. Более того, можно показать, что существуют так называемая универсальная алгебра B_{univ} , строящаяся по алгебре $R[x]$ и закону $(\mu, \mathcal{P})$, и выделенный $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизм $f_{\text{univ}}: R[x] \rightarrow B_{\text{univ}}$, называемый универсальным, которые несут полную информацию о законе $(\mu, \mathcal{P})$. С помощью этого $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизма можно ввести естественное понятие степени закона $(\mu, \mathcal{P})$. Степень – это целое число, большее либо равное -1 . Законы степени -1 и 0 интереса не представляют. Здесь мы дадим другое, более наглядное, определение закона $(\mu, \mathcal{P})$ степени $n \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Скажем, что $\deg(\mu, \mathcal{P}) = n \geq 1$, если существуют алгебра B и $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизм $f: R[x] \rightarrow B$ такие, что элементы $f(x), \dots, f(x^n)$ алгебраически независимы над R и для любой алгебры C и любого $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизма $g: R[x] \rightarrow C$ элементы $g(x), \dots, g(x^n), g(x^{n+1})$ алгебраически зависимы над R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Закон $(\mu, \mathcal{P})$ степени $n \geq 1$ называется *полным*, если для любой алгебры B и для любых $b_1, \dots, b_n \in B$ существует единственный $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизм $f: R[x] \rightarrow B$ такой, что $f(x) = b_1, f(x^2) = b_2, \dots, f(x^n) = b_n$.

Сформулируем главный результат этой статьи – общую теорему единственности.

ТЕОРЕМА 2. 1) Пусть $\mu = n \geq 1$. Тогда закон $(\mu, \mathcal{P})$ степени n полон тогда и только тогда, когда он эквивалентен закону n -гомоморфизма Фробениуса.

2) Пусть $(\mu, \mathcal{P})$ – закон степени $n \geq 1$. Тогда этот закон является полным тогда и только тогда, когда μ – обратимый элемент в R и для любых алгебр A, B и любого линейного отображения $f: A \rightarrow B$ следующие условия эквивалентны:

- а) f является $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизмом;
- б) $(n/\mu)f$ является n -гомоморфизмом.

Другими словами, закон $(\mu, \mathcal{P})$ получен из закона n -гомоморфизма умножением на обратимую константу (μ/n) .

Ключевым и самым сложным этапом доказательства этой теоремы является доказательство так называемой частной теоремы единственности, совпадающей с п. 1) теоремы при условии, что $\mathcal{P}$ состоит только из одного многочлена вида $z_{n+1} - P_{n+1}(z_1, \dots, z_n)$. Доказывается, что многочлен $P_{n+1}(z_1, \dots, z_n)$ должен совпадать с многочленом Фробениуса $F_{n+1}(z_1, \dots, z_n)$. Далее из частной теоремы единственности с помощью универсального $(\mu, \mathcal{P})$ -гомоморфизма выводится п. 1), а из него уже п. 2).

Автор благодарен своему научному руководителю чл.-корр. РАН В. М. Бухштаберу за плодотворные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] V. M. Buchstaber, E. G. Rees, *Selecta Math. (N.S.)*, **8:4** (2002), 523–535. [2] В. М. Бухштабер, Е. Г. Рис, *УМН*, **59:1** (2004), 125–144. [3] Д. В. Гугнин, *УМН*, **60:5** (2005), 163–164.

Д. В. Гугнин (D. V. Guginin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: dmitry-guginin@yandex.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
04.08.2007