Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. З. Ровинский, Группы автоморфизмов полей и их представления, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 87–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:45:10

УДК 512.546.4+512.623.23+512.73

Группы автоморфизмов полей и их представления

М. З. Ровинский

Изучается группа автоморфизмов G расширения $F|k$ алгебраически замкнутых полей, а также ее гладкие линейные и полулинейные представления. Объясняется связь теории представлений группы G с бирациональной геометрией, алгебраическими циклами, мотивами и другими геометрическими вопросами.

Библиография: 44 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	88
1.1. Как переводить геометрические вопросы на язык теории представлений?.....	89
1.2. От линейных представлений к полулинейным.....	99
1.3. Обозначения, соглашения и терминология.....	106
2. Структура G и теории Галуа.....	107
2.1. Теория Галуа для компактных подгрупп.....	108
2.2. Топологическая простота G° и G	111
2.3. Открытые и максимальные собственные подгруппы; теории Галуа.....	112
2.4. Нормирования и связанные с ними подгруппы.....	114
2.5. “Плотная” локально компактная “подгруппа” $\mathfrak{G}$ в G	117
2.6. Автоморфизмы группы G	118
3. Общие свойства гладких представлений группы G и их реализации....	118
3.1. Алгебры Гекке и соответствия.....	123
3.2. Инварианты подгрупп и тензорные произведения.....	126
3.3. G - и G° -модули вида $A(F)/A(k)$, где A – коммутативная k -группа, морфизмы между ними и сепарабельное замыкание одномерного расширения k	126

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 06-01-72550-НЦНИЛ_a, 07-01-92211-НЦНИЛ_a) и INTAS (грант № 05-1000008-8118). На протяжении работы над представленным здесь материалом автор получал финансовую поддержку от следующих организаций: Европейский Постдокторальный Институт, CNRS, Институт им. Макса Планка, фонд им. Александра фон Гумбольдта, фонд Бальзана (приз по математике 2004 г. Пьера Делиня).

3.4. Доминантная топология, ацикличность некоторых из гладких представлений G и бесконечность когомологической размерности	127
3.5. Представления, коиндуцированные с открытых подгрупп	130
4. Гомотопически инвариантные представления группы G	132
4.1. Категория $\mathcal{I}_G$, фильтрация $N_\bullet$ и дифференциальные формы ...	135
4.2. “Формула Кюннета” и тензорная структура	139
4.3. Геометрическая конструкция допустимых представлений	141
4.4. Нормирования и связанные с ними функторы	146
4.5. Ограничения объектов $\mathcal{I}_G$ на специальные подгруппы Галуа и $\mathcal{I}$ -индукция	151
4.6. Альтернативные описания $\mathcal{I}_G$	152
Список литературы	153

1. Введение

Изучение групп автоморфизмов полей – старый предмет. Не пытаясь описать его разветвленную историю, заметим только, что многие топологические группы являются группами автоморфизмов расширений полей. Так, автоморфизмы алгебраических расширений образуют обычные группы Галуа, а автоморфизмы полей функций алгебраических многообразий над топологическими полями содержат группы точек алгебраических групп над этими полями. Кроме того, группы точек p -адических групп при $p < \infty$ (а также над конечными аделями) возникают еще как группы автоморфизмов полей автоморфных функций. Изучались также группы непрерывных автоморфизмов топологических полей, например рядов Лорана.

Пусть $F|k$ – расширение полей счетной (что будет основным случаем) или конечной степени трансцендентности n , где $0 \leq n \leq \infty$, и $G = G_{F|k}$ – группа его автоморфизмов.

Следуя очень общей идее о том, что “достаточно симметричная” (математическая, физическая или иная) система определяется представлением своей группы симметрий, можно попытаться сравнить различные “геометрические категории над k ”, в которых F интерпретируется как “предельный объект”, с различными категориями представлений G .

Чтобы теория представлений группы G была достаточно богатой, поле F должно быть “достаточно большим”. По этой причине F будет обычно алгебраически замкнутым. Таким образом, F – “поле функций универсальной башни k -многообразий размерности не выше n ”.

Некоторые общие обозначения, соглашения и цели. Пусть $F|k$ – расширение счетной или конечной степени трансцендентности n , $1 \leq n \leq \infty$. Чтобы избежать рассмотрения уже достаточно сложной теории Галуа, поля F и k будут по умолчанию считаться алгебраически замкнутыми и нулевой характеристики (исключения оговариваются явно). Следуя [1]–[4] (и обобщая

случай алгебраического расширения из [5]), мы снабжаем группу его автоморфизмов $G = G_{F|k}$ топологией, базу открытых подгрупп которой составляют стабилизаторы конечных подмножеств F . Пусть E – поле характеристики 0.

Мы исследуем структуру группы G , ее E -линейные и F -полулинейные представления с открытыми стабилизаторами и их связи с бирациональной геометрией, мотивами, дифференциальными формами и пучками. В частности, мы изучаем аналоги известных результатов теории представлений локально компактных (в особенности, p -адических) групп в случае группы G .

1.1. Как переводить геометрические вопросы на язык теории представлений? В зависимости от вида геометрических вопросов, мы будем рассматривать одну из следующих четырех категорий представлений группы G : $\Phi_G \subset \mathcal{S}m_G \supset \mathcal{I}_G \supset \mathcal{A}dm$, приблизительно соответствующих бирациональной геометрии над k , ее более ограничительному (“менее функториальному”) варианту, бирациональным мотивным вопросам, таким как структура групп Чжоу 0-циклов, и “конечномерным” бирациональным мотивным вопросам, таким как описание “классических” мотивных категорий.

$\mathcal{S}m_G$. Как правило, “алгебро-геометрические данные” D над F состоят из конечного числа полиномиальных уравнений, в которых участвует конечное число коэффициентов $a_1, \dots, a_N \in F$, и группа G действует на множестве “аналогичных” данных. Тогда стабилизатор D в G открыт, поскольку содержит $G_{F|k(a_1, \dots, a_N)}$.

Пример таких данных доставляют F -подмногообразия какого-нибудь k -многообразия X .

В частности, $\mathbb{Q}$ -векторное пространство $\mathbb{Q}[X(F)]$ 0-циклов на $X_F := X \times_k F$ является G -модулем. Это представление огромно, но с него мы только начинаем.

Заметим, что оно – гладкое, т.е. его стабилизаторы открыты, так что все представления, которые мы будем рассматривать, будут гладкими.

Обратно, любое гладкое представление G с циклическим вектором является фактором G -модуля “общих” 0-циклов на X_F , т.е. 0-циклов вне объединения дивизоров на X , определенных над k , для подходящего неприводимого многообразия X размерности $\leq n$ над k . Это следует из леммы 3.1.4. Этот модуль есть не что иное, как представление $\mathbb{Q}[G/G_{F|L}] \cong \mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{L^k} F\}]$ ($\mathbb{Q}$ -векторное пространство с базисом, заданным множеством всех вложений поля L в F над k), индуцированное тривиальным представлением $G_{F|L}$ для некоторого расширения конечного типа $L|k$ в F .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.1. (i) Поскольку $\mathbb{Q}[X(F)] = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Q}[\{k(x) \xrightarrow{L^k} F\}]$, представление $\mathbb{Q}[X(F)]$ отражает, скорее, класс многообразия X в группе Гротендика $K_0(\text{Var}_k)$ разбиений многообразий над k , чем само X .

(ii) Автору неизвестно, определяется ли бирациональный тип многообразия X представлением $\mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{L^k} F\}]$ общих 0-циклов на X_F группы G . Существуют не бирациональные многообразия X и Y , G -модули общих 0-циклов которых имеют одни и те же неприводимые подфакторы (см. п. 3.5). Например,

если отображение $X \rightarrow Y$ конечно в общей точке, то обратный образ индуцирует вложение $\mathbb{Q}[\{k(Y) \xrightarrow{/k} F\}] \hookrightarrow \mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{/k} F\}]$. С другой стороны, если $X = Z \times \mathbb{P}^1$, $Y = Z' \times \mathbb{P}^1$ и Z' – двулистное накрытие Z , то имеется вложение и в обратном направлении: $\mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{/k} F\}] \hookrightarrow \mathbb{Q}[\{k(Y) \xrightarrow{/k} F\}]$. Объединяет X и Y в этом примере то, что их примитивные мотивы (см. ниже) совпадают (и зануляются). Но и это, по-видимому, не очень существенно.

(iii) Из представления $W = \mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{/k} F\}]$ можно извлечь размерность X ($\dim X = \min\{q \geq 0 \mid W^{G_{F|\mathbb{L}}} \neq 0, \text{ где } \deg \text{tr}(L|k) = q\}$) и такие “бirationальные мотивные” инварианты “с точностью до изогений”, как $\text{Alb}(X)$, $\Gamma(X, \Omega_{X|k}^\bullet)$ (см. теорему 1.1.10, 3)–5) и предложение 4.1.17.

(iv) Если $W = \mathbb{Q}[X(F)]$, то $\mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{/k} F\}]$ – ненулевой фактор W по подмодулю, порожденному всеми $W^{G_{F|L}}$ с $\deg \text{tr}(L|k) < q$, при максимально возможном q ($= \dim X$).

Обозначим через $\mathcal{S}m_G(E)$ категорию гладких представлений группы G над полем E . Это – полная абелева подкатегория категории всех представлений группы G над полем E .

Из топологической простоты группы G (теорема 2.2.1) следует, что в случае $n = \infty$ любое конечномерное гладкое представление G тривиально.

Adm. Рассмотрим теперь более конкретную геометрическую категорию: категорию мотивов.

(Эффективным) чистым ковариантным мотивом называется пара (X, π) , состоящая из гладкого проективного многообразия X над k с неприводимыми компонентами X_j и проектора $\pi = \pi^2 \in \bigoplus_j B^{\dim X_j}(X_j \times_k X_j)$ в алгебре соответствий на X по модулю численной эквивалентности. Морфизмы определены формулой $\text{Hom}((X', \pi'), (X, \pi)) = \bigoplus_{i,j} \pi_j B^{\dim X_j}(X_j \times_k X'_i) \pi'_i$. Категория чистых ковариантных мотивов имеет аддитивную и тензорную структуры:

$$(X', \pi') \oplus (X, \pi) := \left(X' \amalg X, \pi' \oplus \pi \right), \quad (X', \pi') \otimes (X, \pi) := (X' \times_k X, \pi' \times_k \pi).$$

Примитивным q -мотивом называется такая пара (X, π) как выше, где $\dim X = q$ и $\text{Hom}(Y \times \mathbb{P}^1, (X, \pi)) := \pi \cdot B^q(X \times_k Y \times \mathbb{P}^1) = 0$ для любого гладкого проективного многообразия Y над k размерности $< q$. Например, из теоремы Лефшеца о $(1,1)$ -классах следует, что категория чистых примитивных 1-мотивов эквивалентна категории абелевых многообразий над k , морфизмы которой тензорно умножены на $\mathbb{Q}$. Как показал У. Яннсен в [6], категория чистых мотивов абелева и полупроста. Из этого результата вытекает, что любой чистый мотив допускает “примитивное” разложение $\bigoplus_{i,j} M_{ij} \otimes \mathbb{L}^{\otimes i}$, где M_{ij} – примитивный j -мотив и $\mathbb{L} = (\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1 \times \{0\})$ – мотив Лефшеца (см. замечание 4.3.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.2. Заменив численную эквивалентность произвольным адекватным отношением эквивалентности, мы получим псевдоабелеву тензорную категорию ковариантных мотивов Гротендика.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.3. Представление вполне несвязной группы H называется *допустимым*, если оно – гладкое и неподвижные подпространства всех открытых подгрупп H конечномерны.

Обозначим через $\mathcal{A}dm = \mathcal{A}dm_G(\mathbb{Q})$ категорию допустимых представлений группы G над $\mathbb{Q}$.

Заметим, что допустимые представления могут быть бесконечными прямыми суммами. Например, пусть $\{A_\alpha\}$ – набор попарно неизогенных простых абелевых многообразий над k . Тогда представление $\bigoplus_\alpha (A_\alpha(F)/A_\alpha(k))$ группы G допустимо.

ТЕОРЕМА 1.1.4 [7]. $\mathcal{A}dm$ – подкатегория Серра категории $\mathcal{S}m_G$ гладких представлений G над $\mathbb{Q}$.

Другими словами, категория $\mathcal{A}dm$ абелева, замкнута относительно взятия подфакторов (в случае $n = \infty$ именно в этом заключается нетривиальность утверждения) в категории представлений G и относительно расширений в категории гладких представлений G . Это показано в [7; следствие 6.5] с помощью вложения $\mathcal{A}dm$ в большую категорию $\mathcal{I}_G$, описанную ниже.

ТЕОРЕМА 1.1.5 [7]. Существует вполне строгий функтор $\mathbb{B}^\bullet$ при $n = \infty$:

$$\mathcal{M}_k := \left\{ \begin{array}{c} \text{чистые ковариантные} \\ k\text{-мотивы} \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathbb{B}^\bullet} \left\{ \begin{array}{c} \text{градуированные полупростые} \\ \text{допустимые представления } G \\ \text{над } \mathbb{Q} \text{ конечной длины} \end{array} \right\}.$$

Градуировка соответствует степеням мотива $\mathbb{L}$ в “примитивном” разложении выше.

Грубо говоря, функтор $\mathbb{B}^\bullet = \bigoplus_j^{\text{graded}} \mathbb{B}^{[j]}$ определяется как пространство 0-циклов над F по модулю “численной эквивалентности над k ”. Точнее, $\mathbb{B}^\bullet = \bigoplus_j^{\text{graded}} \lim_{L \rightarrow} \text{Hom}([L]^{\text{prim}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes j}, -)$ – градуированная прямая сумма пропредставимых функторов. Здесь L пробегает все подполя в F конечного типа над k и $[L]^{\text{prim}}$ – фактор мотива любой гладкой проективной модели L над k по сумме всех подмотивов вида $M \otimes \mathbb{L}$ для всех эффективных мотивов M .

Таким образом, категория $\mathcal{M}_k$ становится полной подкатегорией категории градуированных полупростых допустимых представлений G над $\mathbb{Q}$ конечной длины.

ПРИМЕРЫ 1.1.6. Мотив точки $\mathbf{Spec}(k)$ переходит в тривиальное представление $\mathbb{Q}$ в степени 0. Мотив гладкой собственной кривой C над k переходит в $\mathbb{Q} \oplus J_C(F)/J_C(F) \oplus \mathbb{Q}[1]$, где J_C – якобиан C и $\mathbb{Q}[1]$ обозначает тривиальное представление в степени 1.

ГИПОТЕЗА 1.1.7. Функтор $\mathbb{B}^\bullet$ задает эквивалентность категорий.

Разумеется, было бы интереснее описать аналогичным образом абелеву категорию $\mathcal{M}\mathcal{M}$ смешанных мотивов над k , полупростые объекты которой – чистые. Это – еще одно основание для изучения категории $\mathcal{A}dm$ допустимых представлений G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.8 [7]. Если $n = \infty$, то для любого $W \in \mathcal{A}dm$ и любого абелева многообразия A над k

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}dm}^{>0}(\mathbb{Q}, W) &= 0, \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}dm}^1(A(F)/A(k), W) &= \frac{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A(k), W^G)}{\mathrm{Hom}_G(A(F)/A(k), W/W^G)}, \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}dm}^{\geq 2}(A(F)/A(k), W) &= 0. \end{aligned}$$

Эти три формулы следует сравнить со следующими гипотетическими тождествами: для любого эффективного мотива M

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathcal{M}\mathcal{M}}^{>0}(\mathbb{Q}, M) &= 0, \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{M}\mathcal{M}}^1(H^1(A), M) &= \frac{A(k) \otimes W_0 M}{\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}\mathcal{M}}(H^1(A), M/W_0 M)}, \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{M}\mathcal{M}}^{\geq 2}(H^1(A), M) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку $A(F)/A(k)$ – каноническое прямое “ H_1 ”-слагаемое представления $\mathbb{B}^\bullet(A)$, мы видим, что допустимые представления конечной длины должны быть связаны с эффективными мотивами. По крайней мере, Ext-группы между некоторыми неприводимыми объектами двойственны.

$\mathcal{I}_G$. Формальные свойства категории $\mathcal{A}dm$ оставляют желать лучшего. Например, чтобы доказать теорему 1.1.4 и предложение 1.1.8, а также предъявить аргумент в пользу гипотезы 1.1.7, используется включение $\mathcal{A}dm$ в большую полную подкатегорию в категории гладких представлений G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.9. Объект $W \in \mathcal{S}m_G(E)$ называется “гомотопически инвариантным” (в бирациональном смысле; происхождение термина объясняется в п. 3.4), если $W^{G_F|L} = W^{G_F|L'}$ для любого чисто трансцендентного подрасширения $L'|L$ в $F|k$. Полная подкатегория в $\mathcal{S}m_G(E)$ с “гомотопически инвариантными” объектами обозначается $\mathcal{I}_G(E)$. (Если ограничиться лишь теми L' , для которых $L'|k$ – расширение конечного типа, то результат будет тем же, см. [7; следствие 6.2].)

Типичным объектом категории $\mathcal{I}_G$ является $\mathbb{Q}$ -векторное пространство $CH^q(X_F)_{\mathbb{Q}}$ циклов коразмерности $q \geq 0$ на схеме $X \times_k F$ по модулю рациональной эквивалентности для любого гладкого многообразия X над k . (Это следует из свойства спуска: $CH^*(X_F)_{\mathbb{Q}}^{G_F|L} = CH^*(X_L)_{\mathbb{Q}}$.)

С другой стороны, если $\tilde{F}$ – алгебраическое замыкание $F(t)$ в некотором алгебраическом расширении поля $F((t))$, то, вообще говоря, $CH^*(X_{\tilde{F}})_{\mathbb{Q}} \notin \mathcal{I}_G$, так как $\tilde{F}^{G_F|L}(x) \subsetneq \tilde{F}^{G_F|L(x)}$ при $x \notin \tilde{L}$. Например, если X – эллиптическая кривая $u^2 = P(v)$, то $k(x)((t)) \ni P(xt)^{1/2} \notin k((t))(x)$ и $[u \mapsto P(xt)^{1/2}, v \mapsto xt] \in CH_0(X_{k((xt))}) \subseteq CH_0(X_{k(x)((t))})$, но $\notin CH_0(X_{\overline{k(t)}})_{\mathbb{Q}}$.

ТЕОРЕМА 1.1.10 ([7], $n = \infty$). Справедливы следующие утверждения.

- 1) $\mathcal{I}_G(E)$ – подкатегория Серра в $\mathcal{S}m_G(E)$ (теорема 6.15 в [7]).
- 2) $\mathcal{A}dm(E) \subset \mathcal{I}_G(E)$, т. е. допустимые представления G “гомотопически инвариантны”.

3) Функтор включения $\mathcal{I}_G(E) \hookrightarrow \mathcal{S}m_G(E)$ допускает левый и правый сопряженные функторы $\mathcal{I}, -^{(0)}: \mathcal{S}m_G(E) \rightarrow \mathcal{I}_G(E)$ – универсальные фактор-объект и подобъект в $\mathcal{I}_G(E)$.

4) Объекты $C_{k(X)} := \mathcal{I}\mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{f} F\}]$ для всех бирациональных классов X неприводимых многообразий над k задают систему проективных образующих категории $\mathcal{I}_G$.

5) Для любого гладкого собственного многообразия X над k имеется каноническая фильтрация $C_{k(X)} \supset \mathcal{F}^1 \supset \mathcal{F}^2 \supset \dots$, канонические изоморфизмы $C_{k(X)}/\mathcal{F}^1 = \mathbb{Q}$ и $\mathcal{F}^1/\mathcal{F}^2 = \text{Alb}(X_F)_{\mathbb{Q}}$ и неканоническое расщепление $C_{k(X)} \cong \mathbb{Q} \oplus \text{Alb}(X_F)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathcal{F}^2$. Член $\mathcal{F}^2$ этой фильтрации определен однозначно этими изоморфизмами и условием, что $\text{Hom}_G(\mathcal{F}^2, \mathbb{Q}) = 0$ и $\text{Hom}_G(\mathcal{F}^2, A(F)/A(k)) = 0$ для любого абелева многообразия A над k . Здесь Alb – многообразие Альбанезе. (Следствие 6.24 в [7].)

6) Для любого гладкого собственного многообразия X над k имеется каноническая сюръекция $C_{k(X)} \rightarrow CH_0(X_F)_{\mathbb{Q}}$, инъективная, если X унирационально над кривой (и в некоторых других случаях, когда “известна” $CH_0(X)$), например, если X – фактор четномерной гиперповерхности Ферма степени $\dim X + 2$ или $\dim X + 3$, для которого $CH_0(X)$ – циклическая).

7) В $\mathcal{I}_G(E)$ существуют (ко-) пределы.

Две фильтрации. Для представления M группы G определим $N_j M$ как подпространство, натянутое на инварианты $M^{G_{F|F_j}}$ для всех подполей $F_j \subseteq F$ степени трансцендентности j над k . С точки зрения п. 3.4, N_j на гладких G -модулях – это “то, что приходит из размерности $\leq j$ ”. Ясно, что фильтрация “уровня” $N_{\bullet}$ – возрастающая и функториальная.

Тогда член $\mathcal{F}^j W$ функториальной убывающей фильтрации $\mathcal{F}^{\bullet}$ на объекте W категории $\mathcal{I}_G$ определяется как пересечение ядер всех G -гомоморфизмов φ из W в объекты $W' \in \mathcal{I}_G$ уровня j , т.е. такие, что $W' = N_j W'$. Если $W = N_q W$, то $\mathcal{F}^{q+1} W = 0$, поскольку $\ker(W \xrightarrow{\text{id}} W) = 0$.

По-видимому, в случае G -модулей вида $CH_0(X_F)_{\mathbb{Q}}$ для гладких собственных многообразий X над k это – мотивная фильтрация (см. [8] и [9; лекция 7]), что согласуется с теоремой 1.1.10, 5).

Следующие две гипотезы связывают мотивы Чжоу и кэлеровы дифференциалы (точнее, голоморфную часть когомологий де Рама, см. предложение 4.1.17 ниже) через категорию $\mathcal{I}_G$.

ГИПОТЕЗА 1.1.11 [7]. Для любого гладкого собственного неприводимого многообразия X над k естественная сюръекция $C_{k(X)} \rightarrow CH_0(X \times_k F)_{\mathbb{Q}}$ – изоморфизм при $n = \infty$.

Фильтрация $\mathcal{F}^{\bullet}$ на $C_{k(X)}$ совпадает с мотивной фильтрацией на группах Чжоу 0-циклов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.12. (i) Из теоремы 1.1.10, 6) можно вывести описание категории абелевых многообразий над k с группами морфизмов, тензорно домноженными на $\mathbb{Q}$, как полной подкатегории категории $\mathcal{A}dm_G \subset \mathcal{I}_G$ в терминах фильтрации “уровня” $N_{\bullet}$ на гладких G -модулях.

(ii) Из гипотезы Блоха и Бейлинсона [8], [9; лекция 7] о мотивной фильтрации на группах Чжоу и из “стандартной” гипотезы Гротендика о полупростоте (утверждающей, что численная и гомологическая эквивалентности совпадают на гладких собственных многообразиях) вытекает, что “численная” эквивалентность совпадает с рациональной на циклах на спектре тензорного произведения двух полей над общим подполем. Точнее, что для любых гладких собственных k -многообразий X и Y сюръективный гомоморфизм локализации $CH^*(X \times_k Y) \rightarrow CH^*(k(X) \otimes_k k(Y))_{\mathbb{Q}}$ “убивает” численно тривиальные циклы (см. [10; п. 1.4] или [11; предложение 1.1.1]), или, эквивалентно, что $CH^j(k(X) \otimes_k F)_{\mathbb{Q}}$ совпадает с $\mathfrak{B}^j(M) := \mathbb{B}^{[0]}(M)$, где M – максимальный примитивный j -подмотив мотива (X, Δ_X) .

В сочетании с первой частью гипотезы 1.1.11, из этого следовало бы при $n = \infty$, что

- (а) $\mathbb{B}^{\bullet}$ – эквивалентность категорий (гипотеза 1.1.7), см. также следствие 1.1.14 ниже;
- (б) любой неприводимый объект $\mathcal{S}_G$ допустим;
- (в) G -модули $\mathrm{gr}_j^N W$ полупросты для любого $W \in \mathcal{S}_G$ (гипотеза 4.1.7), где $N_{\bullet}$ определена выше.

Действительно, для некоторого набора гладких проективных j -мерных многообразий Y над k имеется сюръективный морфизм $\bigoplus_Y \mathbb{Q}[\{k(Y) \xrightarrow{!} F\}] \xrightarrow{\xi} \mathrm{gr}_j^N W$, который пропускается через $\bigoplus_Y \mathrm{gr}_j^N C_{k(Y)}$, см. предложение 4.1.3. Если $C_{k(Y)} = CH_0(Y \times_k F)_{\mathbb{Q}}$, то $\mathrm{gr}_j^N C_{k(Y)} = CH^j(k(Y) \otimes_k F)_{\mathbb{Q}}$, так что ξ пропускается через $\bigoplus_Y CH^j(k(Y) \otimes_k F)_{\mathbb{Q}}$.

Наконец, из полупростоты следует, что существуют проекторы π_Y и изоморфизм $\bigoplus_Y \mathfrak{B}^j((Y, \pi_Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_j^N W$. Это доказывает (в), а взяв неприводимое W (которое совпадает с $\mathrm{gr}_j^N W$ при некотором j), получим также (а) и (б).

(iii) Для любых $W_1, W_2 \in \mathcal{S}m_G(\mathbb{Q})$ положим $W_1 \otimes_{\mathcal{S}} W_2 := \mathcal{S}(W_1 \otimes W_2)$. Как показывает пример $W_1 = W_2 = \mathbb{Q}[F \setminus k]$, $W_3 = \mathbb{Q}$, эта бинарная операция не ассоциативна на $\mathcal{S}m_G$.

Из первой части гипотезы 1.1.11 следует “формула Кюннета” – канонический изоморфизм $C_{k(X \times_k Y)} \xrightarrow{\sim} C_{k(X)} \otimes_{\mathcal{S}} C_{k(Y)}$ для любых гладких неприводимых k -многообразий X, Y . В п. 4.2 содержатся некоторые доводы в пользу этого “следствия”, которые доказывают “формулу Кюннета” в случае, когда X – кривая.

Из “формулы Кюннета” следовало бы, что ограничение $\otimes_{\mathcal{S}}$ на $\mathcal{S}_G$ – коммутативная и ассоциативная тензорная структура на $\mathcal{S}_G$ (согласованная с внутренним функтором $\mathcal{H}om$, см. замечание 3.0.2, в) и предложение 4.1.14) и что класс проективных объектов стабилен относительно $\otimes_{\mathcal{S}}$.

Было бы интересно найти “полупростой градуированный” вариант $\otimes_{\mathcal{S}}$, с тем чтобы сделать $\mathbb{B}^{\bullet}$ тензорным функтором.

ГИПОТЕЗА 1.1.13 [12]. *Любой неприводимый объект $\mathcal{S}_G$ содержится в алгебре $\Omega_{F|k}^{\bullet}$, если $n = \infty$ и k алгебраически замкнуто.*

СЛЕДСТВИЕ 1.1.14 ([12], $n = \infty$). *Предположим, что гипотеза 1.1.13 верна. Тогда:*

- 1) *любой неприводимый объект категории $\mathcal{I}_G$ допустим; другими словами, " $\mathcal{I}_G \approx \mathcal{A}dm$ ";*
- 2) *если численная эквивалентность совпадает с гомологической, то $\mathbb{B}^\bullet$ – эквивалентность категорий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W – неприводимый объект $\mathcal{I}_G$. Найдутся гладкое проективное многообразие Y над k и сюръекция $C_{k(Y)} \twoheadrightarrow W$. Если предположить справедливость гипотезы 1.1.13, то представление W вкладывается в $\Omega_{F|k}^q$ для некоторого целого $q \geq 0$. Поскольку из предложения 4.1.17 следует, что $\text{Hom}_G(C_{k(Y)}, \Omega_{F|k}^q) = \Gamma(Y, \Omega_{Y|k}^q)$, то любой гомоморфизм $C_{k(Y)} \rightarrow \Omega_{F|k}^q$ пропускается через $A^{\dim Y}(Y_F)$, где A^* – пространство циклов “по модулю гомологической эквивалентности (де Рама) над k ”. Точнее, $A^{\dim Y}(Y_F)$ – образ пространства $CH_0(Y_F)_{\mathbb{Q}}$ в $H_{\text{dR}/k}^{2\dim Y}(Y_F)$. Из конечномерности сингулярных когомологий гладких комплексных многообразий следует допустимость $A^{\dim Y}(Y_F)$, а значит, и допустимость его фактора W .

Чтобы установить, что $\mathbb{B}^\bullet$ – эквивалентность категорий, достаточно показать, что любое неприводимое допустимое представление W группы G – компонента степени нуль в $\mathbb{B}^\bullet(M)$ для некоторого мотива M . Поскольку W – фактор $A^{\dim Y}(Y_F)$, это следует из того факта, что $A^{\dim Y}(Y_F)$ совпадает с компонентой степени нуль в $\mathbb{B}^\bullet(Y)$, если численная эквивалентность совпадает с гомологической.

Гипотеза 1.1.13 – одна из основных мотивировок для изучения полулинейных представлений G (см. п. 1.2 ниже). Она имеет также следующее геометрическое следствие, высказанное в качестве гипотезы С. Блохом [9; лекция 7].

СЛЕДСТВИЕ 1.1.15 [12]. *Пусть гипотеза 1.1.13 верна. Если $\Gamma(X, \Omega_{X|k}^{\geq 2}) = 0$ для гладкого собственного многообразия X над k , то отображение Альбанезе индуцирует изоморфизм $CH_0(X)^0 \xrightarrow{\sim} \text{Alb}(X)$. В этом случае $C_{k(X)} = CH_0(X_F)_{\mathbb{Q}}$. (Обратное утверждение общеизвестно, см. [13], [14; теорема 3].)*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1.1.10, 5), $\mathcal{F}^2 C_{k(X)}$ отщепляется от циклического G -модуля $C_{k(X)}$: $C_{k(X)} \cong \mathbb{Q} \oplus \text{Alb } X(F)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathcal{F}^2 C_{k(X)}$, где Alb – многообразие Альбанезе. Так что если G -модуль $\mathcal{F}^2 C_{k(X)}$ – ненулевой, то он циклический и, следовательно, имеет ненулевой неприводимый фактор $W \in \mathcal{I}_G$. Из гипотезы 1.1.13 следует, что существует вложение $W \hookrightarrow \Omega_{F|k}^q$ для некоторого целого $q \geq 0$.

Однако из предложения 4.1.17 следует, что $\text{Hom}_G(C_{k(X)}, \Omega_{F|k}^\bullet) = \Gamma(X, \Omega_{X|k}^\bullet)$, и, значит, $\text{Hom}_G(C_{k(X)}, \Omega_{F|k}^q) = \text{Hom}_G(\mathbb{Q} \oplus \text{Alb } X(F)_{\mathbb{Q}}, \Omega_{F|k}^q)$, если $q \leq 1$, так что $q \geq 2$. Это означает, что $\text{Hom}_G(C_{k(X)}, \Omega_{F|k}^q) = \Gamma(X, \Omega_{X|k}^q)$ – ненулевое для некоторого $q \geq 2$.

Φ_G и когомологии гладких представлений. Как объяснялось в п. 1.1, (по крайней мере некоторые) неприводимые допустимые представления соответствуют неприводимым чистым мотивам и Ext -группы между определенными неприводимыми допустимыми представлениями двойственны к ожидаемым

значениям Ext-групп между соответствующими чистыми мотивами. В связи с этим возникают такие проблемы, как

- найти другие группы $\text{Ext}_{\mathcal{A}dm}^*$ и $\text{Ext}_{\mathcal{S}m_G}^*$ и сравнить их с гипотетическими значениями соответствующих групп $\text{Ext}_{\mathcal{M}\mathcal{M}}^*$;
- расширить $\mathcal{A}dm$ (или $\mathcal{S}_G$) и связать полученную большую категорию Ψ с категорией *эффективных* смешанных мотивов таким образом, чтобы, в частности, Ψ содержала такие (не допустимые) объекты, как $F^\times/k^\times$ (поскольку $\text{Ext}_{\mathcal{S}m_G}^1(F^\times/k^\times, \mathbb{Q}) = \text{Hom}(k^\times, \mathbb{Q})$, см. предложение 1.1.16, объект $F^\times/k^\times$ играет роль мотива Тэйта), и чтобы объект $\mathbb{Q}$ был по-прежнему проективным.

Если возможно описать абелеву категорию $\mathcal{M}\mathcal{M}_k$ способом, аналогичным гипотезе 1.1.7 (или хотя бы теореме 1.1.5), то для этого, видимо, нужно рассматривать категорию гладких G -модулей конечной длины без подфакторов определенного вида (например, изоморфных F/k).

Мы увидим, однако (после предложения 1.1.18), что

$$\text{Ext}_{\mathcal{S}m_G}^1(A(F)/A(k), F^\times/k^\times) \neq 0$$

для любого абелева многообразия A над k . Поэтому рассмотрение весов показывает, что в любом случае связь между $\mathcal{M}\mathcal{M}_k$ и $\mathcal{S}m_G$ не может быть слишком прямой.

В качестве “верхней оценки” для Ψ можно взять следующую полную аддитивную подкатегорию Φ_G в $\mathcal{S}m_G$. Пусть $\mathcal{G}l$ – категория гладких k -многообразий, морфизмы которой – композиции гладких морфизмов и замкнутых вложений вида $X \hookrightarrow X \times Y$, задаваемых k -точками Y . Объекты Φ_G – пределы вида $\mathcal{F}(F) := \lim_{A \rightarrow} \mathcal{F}(\text{Spec}(A))$, где $\mathcal{F}$ – функтор на $\mathcal{G}l$ и A пробегает конечно порожденные гладкие k -подалгебры F . Примеры объектов Φ_G включают $\bigotimes_F^\bullet \Omega_{F|k}^1$, $A(F)_\mathbb{Q}$ для любой коммутативной k -группы A и $\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}]$ для любого $L|k$ конечного типа, но не включают $\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}]^\circ := \ker[\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}] \xrightarrow{\deg} \mathbb{Q}]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.16 [7; предложения 5.1, 5.2]. Пусть $n = \infty$ и A – неприводимая коммутативная алгебраическая группа над k .

Тогда $\text{Ext}_{\mathcal{S}m_G}^1(A(F)_\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = 0$ и $\text{Ext}_{\mathcal{S}m_G}^1(A(F)/A(k), \mathbb{Q}) = \text{Hom}(A(k), \mathbb{Q})$.

Можно предположить, что $\text{Ext}_{\mathcal{S}m_G}^*(W_1, W_2) = \text{Ext}_{\mathcal{S}_G}^*(W_1, W_2)$ для любых $W_1, W_2 \in \mathcal{S}_G$, если $n = \infty$. При $* \leq 1$ это следует из теоремы 1.1.10, 1). Если $W_1, W_2 \in \mathcal{S}_G^q$ и W_1 проективен в $\mathcal{S}_G^q$, то из леммы 4.1.1 можно получить $\text{Ext}_{\mathcal{S}m_G}^1(W_1, W_2) = \text{Ext}_{\mathcal{S}_G}^1(W_1, W_2) = \text{Ext}_{\mathcal{S}_G^q}^1(W_1, W_2) = 0$.

В [15] установлена ацикличность в $\mathcal{S}m_G$ объектов подкатегорий Φ_G и $\mathcal{S}_G$. В доказательстве используется интерпретация гладких представлений как пучков в доминантной топологии на k , а их когомологий – как когомологий Чеха. Подробности см. в п. 3.4. Условия ацикличности имеют также приложения к критериям неприводимости представлений G .

Чтобы взглянуть на гладкое представление группы G “более геометрически”, хотелось бы, чтобы оно соответствовало “более геометрическому” пучку, например пучку в гладкой топологии на k . Это возможно, если свойства

функторов $(-)_v$ из предложения 1.2.4 достаточно хороши. (Но, разумеется, получившийся пучок может быть нулевым.) Эти и близкие к ним вопросы обсуждаются в п. 4.4.

Дифференциальные формы. Чтобы сравнить различные теории когомологий H^* , можно связать с ними некоторые представления G , такие как $H^*(F) := \varinjlim H^*(U)$, где U пробегает спектры гладких подалгебр F , конечно порожденных над k , или образ $H_c^*(F)$ в $H^*(F)$ предела $\varinjlim H^*(X)$, где X пробегает гладкие собственные модели подполей F конечного типа над k .

Ясно, что $H_c^*(F)$ – допустимое представление G над $H^*(k)$. Из стандартной гипотезы о полупростоте следовало бы, что это представление полупросто. Если $H_c^*(F)$ полупросто, то в замечании 1.1.12, (ii) можно опустить ссылку на стандартную гипотезу о полупростоте.

В случае когомологий де Рама $H^* = H_{\text{dR}/k}^*$ (убывающая) фильтрация Ходжа на $\Omega_{X|k}^\bullet$ индуцирует убывающую фильтрацию на $H_{\text{dR}/k,c}^q(F) \subset H_{\text{dR}/k}^q(F)$ с присоединенными факторами

$$H_{F|k}^{p,q-p} = \varinjlim \text{coker} [H^{p-1}(D, \Omega_{D|k}^{q-p-1}) \rightarrow H^p(X, \Omega_{X|k}^{q-p})],$$

где (X, D) пробегает множество пар, состоящих из гладкого собственного многообразия X с $k(X) \subset F$ и дивизора с нормальными пересечениями D на X с гладкими неприводимыми компонентами. В частности, $H_{F|k}^{q,0} = \Omega_{F|k,\text{per}}^q \subset H_{\text{dR}/k,c}^q(F)$ есть G -подмодуль, порожденный пространствами $\Gamma(X, \Omega_{X|k}^\bullet)$ регулярных дифференциальных форм на всех гладких проективных k -многообразиях X с полем функций, вложенным в F .

Другой мотивировкой для изучения дифференциальных форм $\Omega_{F|k}^\bullet$ является вычисление интегралов. Интеграл мероморфной дифференциальной формы ω на некотором алгебраическом комплексном многообразии X можно вычислять, переводя ω на другие многообразия при помощи соответствий. В координатах это выглядит как алгебраическая замена переменных. Можно считать, что все поля функций содержатся в некотором общем поле F . При этом задача описания свойств (итерированных) интегралов от ω (от $\omega_1, \dots, \omega_N$) становится связанной с определением структуры G -подмодуля, порожденного ω (соответственно $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_N$), в алгебре кэлеровых дифференциалов $\Omega_{F|k}^\bullet$ (соответственно в $\Omega_{F|k}^\bullet \otimes_k \dots \otimes_k \Omega_{F|k}^\bullet$).

Предложение 1.1.17 [15]. *Предположим, что мощность k не превышает континуума. Зафиксируем вложение $\iota: k \hookrightarrow \mathbb{C}$ в поле комплексных чисел. Тогда:*

- существуют неканонический $\mathbb{Q}$ -линейный изоморфизм $H_{F|k}^{p,q} \cong H_{F|k}^{q,p}$ и канонический $\mathbb{C}$ -антилинейный изоморфизм (зависящий от ι) $H_{F|k}^{p,q} \otimes_{k,\iota} \mathbb{C} \cong H_{F|k}^{q,p} \otimes_{k,\iota} \mathbb{C}$;
- представление $H_{\text{dR}/k,c}^n(F)$ (а значит, и $\Omega_{F|k,\text{per}}^n$) полупросто для любого $1 \leq n < \infty$.

Из предложения 4.1.17 следует, что “гомотопически инвариантная” часть представления $\bigotimes_F^\bullet \Omega_{F|k}^1$, т.е. его максимальный подобъект в $\mathcal{I}_G$, совпадает

с $\Omega_{F|k, \text{per}}^\bullet$ при $n = \infty$. Это еще раз подтверждает когомологическую природу объектов $\mathcal{J}_G$, поскольку $\Omega_{F|k, \text{per}}^\bullet \subset H_{\text{dR}/k, c}^q(F)$.

Приведенные выше примеры G -модулей получаются из некоторых (про-) многообразий над k расширением основного поля до F . Более общим образом, с каждым бирационально инвариантным функтором $\mathcal{F}$ на некоторой категории многообразий над k , или на категории расширений поля k (как в следствии 4.3.7), можно связать G -модуль.

Еще два примера G -модулей этого вида получаются из бирационально инвариантного функтора Div_{alg} алгебраически тривиальных дивизоров на категории гладких собственных многообразий над k : $\text{Div}_{\mathbb{Q}}^\circ = \lim_{U \rightarrow} \text{Div}_{\text{alg}}(Y_U)_{\mathbb{Q}}$, и из функтора Пикара: $\text{Pic}_{\mathbb{Q}}^\circ = \lim_{U \rightarrow} \text{Pic}^\circ(Y_U)_{\mathbb{Q}} = \text{coker}[F^\times/k^\times \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}_{\mathbb{Q}}^\circ]$, где U пробегает множество открытых подгрупп вида $G_{F|L}$ и Y_U – гладкая проективная модель поля $F^U = L$ над k . Ясно, что

$$H_{\text{dR}/k, c}^1(F) = \ker[H_{\text{dR}/k}^1(F) \xrightarrow{\text{Res}} k \otimes \text{Div}_{\mathbb{Q}}^\circ].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.18 [7; предложение 3.11]. Пусть $1 \leq n \leq \infty$ и $A^\vee := \text{Pic}^\circ A$ – двойственное абелево многообразие абелева многообразия A . Тогда $\text{Pic}_{\mathbb{Q}}^\circ = \bigoplus_A A^\vee(k) \otimes_{\text{End } A} (A(F)/A(k))$, где A пробегает классы изогении простых абелевых многообразий над k .

Покажем, что $\text{Ext}_{\mathcal{J}_{m_G}}^1(A(F)/A(k), F^\times/k^\times) \neq 0$ для любого абелева многообразия A над k . G -модуль $\text{Div}_{\mathbb{Q}}^\circ$ входит в точную последовательность $0 \rightarrow F^\times/k^\times \rightarrow \text{Div}_{\mathbb{Q}}^\circ \rightarrow \text{Pic}_{\mathbb{Q}}^\circ \rightarrow 0$. Согласно предложению 1.1.18, любой ненулевой элемент $A^\vee(k)_{\mathbb{Q}}$ задает вложение $A(F)/A(k)$ в $\text{Pic}_{\mathbb{Q}}^\circ$, тем самым индуцируя расширение $A(F)/A(k)$ модулем $F^\times/k^\times$ внутри $\text{Div}_{\mathbb{Q}}^\circ$. Чтобы увидеть, что это расширение не расщепляется, заметим, что любая общая F -точка x группы A , рассматриваемая как элемент $A(F)_{\mathbb{Q}}$, отождествляет пространство $\text{Hom}_G(A(F)_{\mathbb{Q}}, \text{Div}_{\mathbb{Q}}^\circ)$ с подпространством в $(\text{Div}_{\mathbb{Q}}^\circ)^{\text{Stab}_x}$, элементы которого – это $\mathbb{Q}$ -дивизоры на A , инвариантные относительно сдвигов на элементы кручения в $A(k)$. Поскольку подгруппа кручения в $A(k)$ плотна по Зарискому, любой такой дивизор – нулевой, т. е. это подпространство – нулевое.

Из очевидным образом модифицированного предложения 1.1.18 нетрудно вывести следующее описание представления $\Omega_{F|k, \text{замкн}}^1$ для любого $1 \leq n \leq \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.19. Пусть $1 \leq n \leq \infty$.

1) Максимальное полупростое подпредставление группы G в $\Omega_{F|k, \text{замкн}}^1$ канонически изоморфно

$$\bigoplus_A \Gamma(A, \Omega_{A|k}^1)^{A(k)} \otimes_{\text{End } A} (A(F)/A(k)) = (F/k) \oplus k \otimes (F^\times/k^\times) \oplus \Omega_{F|k, \text{per}}^1,$$

где A пробегает классы изогении простых коммутативных алгебраических k -групп.

2) Максимальное полупростое подпредставление группы G в $H_{\text{dR}/k}^1(F)$ канонически изоморфно

$$\bigoplus_A H_{\text{dR}/k}^1(A) \otimes_{\text{End } A} (A(F)/A(k)) = k \otimes (F^\times/k^\times) \oplus H_{\text{dR}/k, c}^1(F),$$

где A пробегает классы изогении простых коммутативных алгебраических k -групп (с нулевым слагаемым, соответствующим $\mathbb{G}_a$).

3) Представление $H_{\mathrm{dR}/k}^1(F)/(k \otimes (F^\times/k^\times))$ группы G канонически изоморфно прямой сумме

$$\bigoplus_A [H_{\mathrm{dR}/k}^1(k(A))/(k \otimes (k(A)^\times/k^\times))] \otimes_{\mathrm{End} A} (A(F)/A(k)),$$

где A пробегает классы изогении простых абелевых многообразий над k .

Это наводит на мысль, что а) классы изоморфизма неприводимых подфакторов $H_c^*(F)$ – те же, что и у $\Omega_{F|k, \mathrm{per}}^\bullet$, б) они естественно отождествляются с неприводимыми эффективными примитивными мотивами и в) классы изоморфизма неприводимых подфакторов $H^*(F)$ связаны с более общими неприводимыми эффективными мотивами, такими как мотив Тэйта $\mathbb{Q}(-1)$ в случае $H_{\mathrm{dR}/k}^1(F)$.

1.2. От линейных представлений к полулинейным. Представление $\Omega_{F|k}^\bullet$ группы G имеет также естественную структуру F -векторного пространства, снабженного полулинейным действием G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Пусть K – поле, H – полугруппа эндоморфизмов K и $k = K^H$.

Полулинейное представление H над K – это K -векторное пространство V , снабженное полулинейным действием H , т.е. таким аддитивным действием $H \times V \rightarrow V$, что $\sigma(a \cdot v) = \sigma a \cdot \sigma v$ для любых $\sigma \in H$, $v \in V$ и $a \in K$. Это – то же, что модуль над ассоциативной центральной k -алгеброй $K\langle H \rangle := K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[H]$ с очевидным левым действием K и диагональным левым действием H . Будем говорить, что полулинейное представление полугруппы H невырождено, если действие каждого элемента H инъективно. (Если $\dim_K V < \infty$, это эквивалентно условию $K \otimes_{\sigma(K)} \sigma(V) = V$.)

Полулинейные представления H , конечномерные над K , образуют абелеву тензорную k -линейную категорию. Эта категория – жесткая, если элементы полугруппы H обратимы. Множество классов изоморфизма невырожденных полулинейных K -представлений полугруппы H степени r канонически отождествляется с множеством $H^1(H, \mathrm{GL}_r K)$.

Обозначим через $\mathcal{C}$ категорию гладких полулинейных представлений G над F .

Как известно после работ Гильберта, Тэйта, Сена, Фонтэна и др., мощным средством изучения представлений Галуа являются полулинейные представления. Мы попытаемся их применить в контексте представлений группы G .

Нас интересуют линейные представления G , особенно неприводимые, и, в еще большей степени, неприводимые “гомотопически инвариантные” представления, т.е. объекты $\mathcal{I}_G$.

Имеются строгие забывающие функторы $\mathcal{S}m_G \xleftarrow{\mathrm{for}} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{for}} \mathcal{S}m_G(k)$, допускающие левые сопряженные функторы расширения коэффициентов до F : $\mathcal{S}m_G \xrightarrow{\otimes^F} \mathcal{C} \xleftarrow{\otimes_k F} \mathcal{S}m_G(k)$, где $\mathcal{S}m_G(k)$ – категория гладких представлений G над k , так что $W \hookrightarrow \mathrm{for}(W \otimes F)$ или $W \hookrightarrow \mathrm{for}(W \otimes_k F)$.

Функтор $F \otimes_k$ строг, но не полон. Например, если $U \subset G$ – открытая подгруппа и $\bar{f} \in (F^\times/k^\times)^U \setminus \{1\}$, то отображение $[\sigma] \mapsto \sigma f \cdot [\sigma]$ определяет элемент $\text{End}_{\mathcal{C}}(F[G/U])$, который не лежит в подпространстве $\text{End}_{\mathcal{S}m_G(k)}(k[G/U])$. Другой пример: $k = \text{End}_{\mathcal{S}m_G(k)}(F) \subsetneq \text{End}_{\mathcal{C}}(F \otimes_k F) \supseteq k \oplus k$, так как $F \otimes_k F = \text{Sym}_k^2 F \oplus \bigwedge_k^2 F$. Однако функтор $\mathcal{S}m_G(k) \xrightarrow{F \otimes_k} \mathcal{C}$ вполне строгий [16; лемма 0.1], и любой объект $W \in \mathcal{S}m_G(k)$ восстанавливается по $W \otimes_k F \in \mathcal{C}$, см. лемму 1.2.6.

Хотя функтор $F \otimes_k$ и не сохраняет неприводимость, для любого неприводимого $W \in \mathcal{S}m_G$ объект $W \otimes F \in \mathcal{C}$ допускает неприводимый полулинейный фактор V с включением $W \subset V$.

Таким образом, любой неприводимый объект категории $\mathcal{S}m_G$ содержится в неприводимом объекте категории $\mathcal{C}$, и задача описания неприводимых объектов категории $\mathcal{S}m_G$ разбивается на описание а) неприводимых объектов $\mathcal{C}$ и б) их линейных подмодулей.

Приведем два довода в пользу того, что $\mathcal{C}$ в некоторых отношениях проще, чем $\mathcal{S}m_G$.

- Все представления $A(F)/A(k)$ группы G для всех абелевых многообразий A над k (т. е. соответствующие всем чистым 1-мотивам) содержатся в одном неприводимом объекте $\Omega_{F|k}^1$ категории $\mathcal{C}$. А именно, любая достаточно общая 1-форма $\eta \in \Gamma(A, \Omega_{A|k}^1)$ задает вложение $A(F)/A(k) \hookrightarrow \Omega_{F|k}^1$, посылая точку $k(A) \xrightarrow{\sigma} F$ в $\sigma\eta \in \Omega_{F|k}^1$.
- Из теоремы 90 Гильберта следует, что категория $\mathcal{C}$ обладает счетной системой циклических образующих: $P_m := F[G/G_{F|K_m}]$, где K_m – чисто трансцендентное расширение k в F степени m .

Вообще говоря, для произвольной группы полулинейных представлений может оказаться “гораздо больше”, чем линейных. Например, если группа корней из единицы $\mu_\infty \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ действует на $k(t)$ заменами $\zeta: t \mapsto \zeta t$, то пространство одномерных полулинейных представлений

$$H^1(\mu_\infty, k(t)^\times) = \left(\varprojlim_n k(t)^\times / k(t^n)^\times \right) / k(t)^\times$$

огромно (и неотделимо в естественной топологии), хотя пространство одномерных E -линейных представлений $\text{Hom}(\mu_\infty, E^\times) \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ относительно невелико.

Множество классов изоморфизма неприводимых объектов $\mathcal{C}$ имеет мощность континуума, если k счетно. Действительно, пусть F' – алгебраически замкнутое подполе в $F|k$ конечной степени трансцендентности. Для каждого одномерного представления $\varphi: G_{F'|k} \rightarrow k^\times$ зафиксируем неприводимый фактор $V_\varphi \in \mathcal{C}$ представления $F[G/G_{F'|F'}] \otimes_{k[G_{F'|k}]} \varphi$. Заметим, что в $V_\varphi^{G_{F'|F'}}$ имеется подпредставление $G_{F'|k}$, изоморфное φ . Скажем, что $\varphi \sim \psi$, если $V_\varphi \cong V_\psi$. Если $\varphi \sim \psi$, то в $V_\varphi^{G_{F'|F'}}$ имеется подпредставление $G_{F'|k}$, изоморфное ψ . Поскольку $|V_\varphi^{G_{F'|F'}}| = |k|$, классы эквивалентности имеют мощность $\leq |k|$. Заметим, что имеется $\geq 2^{|\mathbb{N}|}$ только тех из φ , которые пропускаются через модуль группы $G_{F'|k}$. Поэтому если k счетно, то множество классов эквивалентности φ имеет мощность $\geq 2^{|\mathbb{N}|}$, что и требовалось.

Верхняя оценка $\leq 2^{|k|}$ для множества циклических объектов $\mathcal{C}$ следует из того, что имеется счетное число образующих P_m категории $\mathcal{C}$, мощность каждой из которых равна $|k|$.

С другой стороны, мне не известно никакой процедуры, которая бы могла выдать настолько много неприводимых объектов $\mathcal{C}$, хотя бы гипотетически. Поэтому было бы естественно ограничиться какой-нибудь “относительно небольшой” полной подкатегорией в $\mathcal{C}$. (Например, объекты которой порождаются как F -векторное пространство подпредставлениями из $\mathcal{I}_G(k)$. Ниже приводится другое, хотя и более слабое, но и чуть более явное условие “глобальной порожденности” на полулинейные факторы $W \otimes F$ для $W \in \mathcal{I}_G$.)

Однако категория $\mathcal{C}$ “проста” в том смысле, что не имеет нетривиальных собственных подкатегорий, замкнутых относительно прямых произведений и подфакторов в $\mathcal{C}$. Точнее, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1.2.2. *Аннулятор в $\varprojlim_U F[G/U]$ любого объекта $0 \neq V \in \mathcal{C}$ – нулевой. Для любого целого $m \geq 0$ имеется вложение P_m в прямое произведение в $\mathcal{C}$ копий V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 \neq \alpha \in \varprojlim_U F[G/U]$ аннулирует V , то для любого L конечного типа над k проекция $0 \neq \alpha_L = \sum_{i=1}^N a_i \sigma_i \in F[G/G_F|_L]$ аннулирует $V^{G_F|_L}$. Зафиксируем L , $0 \neq v \in V^{G_F|_L}$ и функционал $\varphi \in \text{Hom}_F(V, F)$ такой, что $\varphi(\sigma_i v) \neq 0$ для всех $1 \leq i \leq N$. Тогда $\varphi(\alpha(fv)) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi(\sigma_i v) \cdot \sigma_i f$ обращается в нуль для любого $f \in L^\times$, что противоречит теореме Артина о независимости характеров $L^\times$.

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_m, V)$ – ненулевое K_m -векторное пространство (по определению, $t\alpha: [\text{id}] \mapsto t \cdot \alpha[\text{id}]$ для любого $t \in K_m$). Поэтому

$$\bigcap_{\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_m, V)} \ker \alpha \subseteq \bigcap_{t \in K_m^\times} \ker(P_m \xrightarrow{t\alpha} V) = 0$$

для любого $\alpha \neq 0$ в силу линейной независимости характеров $\text{Hom}(K_m^\times, F^\times)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.3. Утверждение леммы 1.2.2 означает, что центральная k -алгебра $\varprojlim_U F[G/U]$ топологически проста (ср. с [17], [18] в случае конечных расширений Галуа). Поэтому любая “относительно небольшая” подкатегория $\mathcal{C}$ не может быть “слишком хорошей”.

Отныне (до конца этого раздела) будем считать, что $n = \infty$.

Нормирования и ассоциированные функторы [19]. Чтобы сопоставить представлению G функтор на категории k -многообразий, можно попытаться “аппроксимировать” кольца их подполями. Очевидно, это не работает буквально, но зато работает в случае колец дискретного нормирования поля F .

Пусть $v: F^\times/k^\times \rightarrow \mathbb{Q}$ – дискретное нормирование ранга один и $\mathcal{O}_v$ – кольцо нормирования. Положим $G_v := \{\sigma \in G \mid \sigma(\mathcal{O}_v) = \mathcal{O}_v\}$. Это – максимальная замкнутая, но не открытая подгруппа в G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.4. *Для любого дискретного нормирования v ранга один, тривиального на k , аддитивный функтор $(-)_v: \mathcal{M}_G \rightarrow \mathcal{M}_{G_v}$, $W \mapsto W_v := \sum_{F' \subset \mathcal{O}_v} W^{G_{F'|F'}} \subseteq W$, вполне строг и сохраняет сюръекции и инъекции.*

Тогда аддитивный подфунктор $\Gamma: \mathcal{S}m_G \rightarrow \mathcal{S}m_G$ тождественного функтора, заданный формулой $W \mapsto \Gamma(W) := \bigcap_v W_v$, где v пробегает дискретные нормирования $F^\times/k^\times \rightarrow \mathbb{Q}$, сохраняет инъекции.

ПРИМЕР 1.2.5. $\Gamma(\Omega_{F|k}^1) = \Omega_{F|k, \text{per}}^1 \cong \bigoplus_A (A(F)/A(k)) \otimes_{\text{End } A} \Gamma(A, \Omega_{A|k}^1)$, где A пробегает множество классов изогений простых абелевых многообразий над k , – пространство регулярных 1-форм.

ЛЕММА 1.2.6. Если $k = \bar{k}$, то функтор $\mathcal{I}_G(k) \xrightarrow{F \otimes_k} \mathcal{C}$ вполне строг. Композиции $\mathcal{I}_G(k) \xrightarrow{\otimes_k F} \mathcal{C} \xrightarrow{\Gamma \circ \text{for}} \mathcal{S}m_G(k)$ и $\mathcal{I}_G \hookrightarrow \mathcal{S}m_G \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{S}m_G$ тождественны.

Первая часть – это лемма 0.1 из [16], а вторая часть вытекает из лемм 4.4.7 и 4.4.8.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.7. (i) Для понимания категории $\mathcal{I}_G(k)$ основной задачей является описание оболочки Серра абелевой подкатегории $\mathcal{I}_G \otimes F$ категории $\mathcal{C}$. Ориентиром для этого может служить гипотеза 1.1.13.

(ii) Из леммы 1.2.6 следует, что любой полулинейный фактор V объекта $W \otimes_k F$ для $W \in \mathcal{I}_G$ (в частности, любое неприводимое полулинейное представление V , содержащее “гомотопически инвариантное” представление), “глобально порожден”, т.е. $\Gamma(V) \otimes F \twoheadrightarrow V$ сюръективно.

Это условие можно наложить на класс “интересных” полулинейных представлений. Имеются причины считать, что $(-)_v$ точен (см. [19]). Отсюда следовали бы некоторые приятные свойства категории “глобально порожденных” полулинейных представлений.

Допустимые полулинейные представления. Так же, как и изучение линейных представлений группы, изучение полулинейных представлений естественно начинать с конечномерных представлений. Однако из следствия 3.4.8 будет вытекать их тривиальность.

ТЕОРЕМА 1.2.8 [7]. Любое конечномерное гладкое полулинейное представление G над F тривиально при $n = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.9. Гладкое полулинейное представление V группы G над F называется *допустимым*, если для любой открытой подгруппы $U \subseteq G$ неподвижное подпространство V^U конечномерно над неподвижным подполем F^U (или, эквивалентно, $\dim_L V^{G|L} < \infty$ для любого подполя $L \subseteq F$ конечного типа над k).

ТЕОРЕМА 1.2.10 [12], [16]. Обозначим через $\mathcal{A}$ категорию допустимых полулинейных представлений группы G над F . Тогда $\mathcal{A}$ – абелева тензорная (но не жесткая) категория.

Функтор $H^0(G_{F|L}, -)$ точен на $\mathcal{A}$ для любого подполя $L \subseteq F$, так что F – проективный объект $\mathcal{A}$.

Тензорность категории $\mathcal{A}$ следует из предложения 3.2.2.

Как вытекает из [16; лемма 3.1], в качестве циклических образующих категории $\mathcal{A}$ можно взять факторы $Q_n := F[G/U_n]$ циклических образующих P_n

категории $\mathcal{C}$ для всех $n \gg 0$, поскольку $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_n, V) = V_n^{U_n}$. Здесь U_n обозначает прообраз в $G_{\{F, K_n\}|k} \subset G$ подгруппы сдвигов в $G_{K_n|k}$ на элементы кругового поля, т.е. состоящий из преобразований вида $x_j \mapsto x_j + b_j$ для всех $1 \leq j \leq n$, где $b_j \in \mathbb{Q}^{\text{ab}}$.

ПРИМЕР 1.2.11. Обозначим через $\mathfrak{m}$ ядро гомоморфизма умножения $F \otimes_{k_0} F \xrightarrow{\times} F$, где $k_0 = k \cap \overline{\mathbb{Q}}$ – числовое подполе поля k . Это – идеал в алгебре $F \otimes_{k_0} F$, степени $\mathfrak{m}^s \subseteq F \otimes_{k_0} F$ которого для всех $s \geq 0$ мы будем рассматривать как объекты $\mathcal{C}$. Структура F -векторного пространства на $\mathfrak{m}^s$ задается левым F -умножением, т.е. посредством отождествления F с $F \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}$.

Заметим, что $\mathfrak{m}^s / \mathfrak{m}^{s+1} = \text{Sym}_F^s \Omega_F^1$. Поэтому полулинейные представления $\bigwedge_F^\bullet(\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^s)$ и $\bigotimes_F^q(\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^s)$ допустимы для любых $q \geq 0$ и $s \geq 2$, если степень трансцендентности k конечна, а объекты $\text{Sym}_F^s \Omega_{F|k}^\bullet$ допустимы всегда и для любых $s \geq 1$.

В случае, когда $k = \overline{\mathbb{Q}}$ – поле алгебраических комплексных чисел, категория $\mathcal{A}$ допускает следующее явное описание.

Для каждого $q \geq 0$ и $V \in \mathcal{A}$ пусть $W^q V$ – сумма образов всевозможных $\mathcal{C}$ -морфизмов в V из F -тензорных степеней $\bigotimes_F^{\geq q} \mathfrak{m}$. Ясно, что $W^\bullet$ – функториальная убывающая фильтрация на объектах $\mathcal{A}$ и что эта фильтрация мультипликативна: $(W^p V_1) \otimes_F (W^q V_2) \subseteq W^{p+q}(V_1 \otimes_F V_2)$ для любых $p, q \geq 0$ и любых $V_1, V_2 \in \mathcal{A}$.

1) Присоединенные факторы gr_W^q фильтрации $W^\bullet$ на объектах $\mathcal{A}$ – конечные прямые суммы прямых слагаемых объекта $\bigotimes_F^q \Omega_F^1$ (см. [16; теорема 4.10]). В частности, любой объект категории $\mathcal{A}$ допускает неприводимый фактор.

2) Категория $\mathcal{A}$ расщепляется в прямую сумму двух своих полных подкатегорий, одна из которых эквивалентна категории конечномерных k -векторных пространств, а вторая – $\mathcal{A}^\circ$ – состоит из таких объектов V , что $V^G = 0$ (см. [16; лемма 4.13]).

3) Любой объект V категории $\mathcal{A}^\circ$ является фактором прямой суммы объектов (конечной длины) вида $\bigotimes_F^q(\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^s)$ для некоторых $q, s \geq 1$ (см. [16; теорема 4.10]).

4) Если $V \in \mathcal{A}$ конечно порожден, то он конечной длины и пространство $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(V, V')$ конечномерно для любого $j \geq 0$ и любого $V' \in \mathcal{A}$; если $V \in \mathcal{A}$ неприводим и $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^q, V) \neq 0$ для некоторого $q \geq 2$, то $V \cong \text{Sym}_F^q \Omega_F^1$ и $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^q, V) \cong k$ (см. [16; следствие 4.17]).

5) В категории $\mathcal{A}^\circ$ нет проективных объектов [16; следствие 4.14], однако $\bigotimes_F^q \mathfrak{m}$ – ее “проективные прообразующие”: функтор $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bigotimes_F^q \mathfrak{m}, -) = \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bigotimes_F^q(\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^N), -)$ точен на $\mathcal{A}$ для любого q (см. [16; следствие 4.16]).

Более того, (по крайней мере при $k = \overline{\mathbb{Q}}$) имеется функтор $\mathcal{S}$, заданный формулой $V \mapsto (Y \mapsto \mathcal{Y}_Y(V))$, отождествляющий категорию $\mathcal{A}$ с категорией “когерентных” пучков в гладкой топологии $\mathfrak{Sm}_k$ на k (см. [16; следствие 5.2]). По определению, $\mathfrak{Sm}_k$ – категория локально доминантных морфизмов гладких k -схем, снабженная предтопологией, в которой покрытия – это сюръективные гладкие морфизмы. Ясно, что замены базы сохраняют покрытия.

Пучок $\mathcal{O}$ -модулей на $\mathfrak{Sm}_k$ называется “когерентным”, если его ограничение на малый этальный сайт (или, эквивалентно, на малый сайт Зариского) любого гладкого k -многообразия когерентно. Здесь $\mathcal{O}$ – структурный предпучок сайта $\mathfrak{Sm}_k$ (который сопоставляет каждому $Y \in \mathfrak{Sm}_k$ его k -алгебру регулярных функций $\mathcal{O}(Y)$). Ясно, что $\mathcal{O}$ – пучок на $\mathfrak{Sm}_k$.

Сначала определяются ограничения пучка $\mathcal{S}(V)$ на проективные пространства (они оказываются пучками сечений однородных векторных расслоений), а на произвольные гладкие k -многообразия их можно локально продолжить как обратные образы относительно этальных морфизмов в проективные пространства. Зная явный вид объектов $\mathcal{A}$, корректность такого определения проверить нетрудно (см. [16; лемма 5.1]). Таким образом, $\mathcal{S}(V)|_Y = \mathcal{Y}_Y$ – локально свободный когерентный пучок на Y с общим слоем $V^{G_{F|k(Y)}}$ для каждого $V \in \mathcal{A}$ и любого гладкого k -многообразия Y . Фунториальность следует из того, для любого доминантного морфизма $X \xrightarrow{\pi} Y$ гладких k -многообразий включение общих слоев $k(X) \otimes_{k(Y)} V^{G_{F|k(Y)}} \subseteq V^{G_{F|k(X)}}$ индуцирует вложение когерентных пучков $\pi^* \mathcal{Y}_Y \hookrightarrow \mathcal{Y}_X$ на X .

Особый интерес среди k -линейных представлений группы G представляют допустимые представления, образующие полную подкатегорию в $\mathcal{I}_G(k)$. Хотя тензорное умножение на F и не переводит их в допустимые полулинейные представления,¹ существует аналогичный функтор в противоположном направлении $\Gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Sm}_G(k)$ – который можно назвать функтором “глобальных сечений”, – строгий и точный слева, по крайней мере, если $k = \overline{\mathbb{Q}}$. Функтор Γ уже был определен на с. 102, после предложения 1.2.4, причем даже в большей общности. Однако бывает полезно сначала сопоставить гладким представлениям V группы G пучки $\mathcal{V}$ на $\mathfrak{Sm}_k$, и лишь потом брать глобальные сечения.

Имеется следующий универсальный (но далеко не единственный) способ “глобализации” гладких представлений G . Пусть $V \in \mathcal{Sm}_G$, Y – неприводимое гладкое k -многообразие, $D \in Y^1$ – неприводимый дивизор и v_D – соответствующее дискретное нормирование поля $k(Y)$. Выберем вложение $k(Y)$ в F над k и продолжение v нормирования v_D до дискретного нормирования ранга 1 поля F . Пусть $\tilde{F} \subset F$ – максимальное подполе над k такое, что $v(\tilde{F}^\times) = v(k(Y)^\times)$. Положим

$$\mathcal{V}_{Y,D} = V^{G_{F|k(Y)}} \cap \bigcap_{\tilde{F}} \left(\sum_{k \subset F' \subset \tilde{F} \cap \mathcal{O}_v} V^{G_{F|F'}} \right). \quad (1)$$

“Когерентные” пучки содержатся в категории $\mathcal{Fl}$ плоских (как $\mathcal{O}$ -модули) “квазикогерентных” пучков в гладкой топологии. Для любого плоского “квазикогерентного” пучка $\mathcal{V}$ в гладкой топологии k -векторное пространство $\Gamma(Y, \mathcal{V}_Y)$ является бирациональным инвариантом гладкого собственного Y . Это следует из принципа Гартогса и того, что любое бирациональное отображение – композиция бирационального морфизма и отображения, обратного бирациональному

¹Предположим, что $W \otimes F$ допустимо для некоторого гладкого представления W группы G при $n \leq \infty$. Докажем, что W конечномерно. Из включения $(W \otimes F)^{G_{F|L}} \supseteq W^{G_{F|L}} \otimes L$ следует, что $\dim W^{G_{F|L}} < \infty$ для любого L конечной степени трансцендентности над k . Поэтому $\dim W < \infty$, если $n < \infty$. Если $n = \infty$, то из предложения 3.0.8 получаем, что W тривиально и, в частности, конечномерно.

морфизму, которое корректно определено вне подмножества коразмерности ≥ 2 (см. [16; лемма 5.3]).

Благодаря бирациональной инвариантности, можно определить точный слева (не строгий) функтор $\mathcal{F}l \xrightarrow{G} \mathcal{S}m_G(k)$ формулой $\mathcal{V} \mapsto \lim_{\rightarrow} \Gamma(Y, \mathcal{V}_Y)$, где Y пробегает гладкие проективные модели подполей в F конечного типа над k . Тогда $\Gamma(V) = \Gamma(\mathcal{V})$. Ограничение Γ на подкатегорию “когерентных” пучков строго, поскольку $\Gamma(Y', \mathcal{V}_{Y'})$ порождает общий слой пучка $\mathcal{V}_{Y'}$ для подходящих конечных накрытий Y' многообразия Y , если $\mathcal{V}$ – “когерентный”.

Если $\Gamma(Y, \mathcal{V}_Y)$ обладает свойством спуска Галуа, то $\Gamma(V) = \Gamma(\mathcal{V})$ допустимо. В общем же случае свойство спуска Галуа отсутствует и $\Gamma(V)$ не допустимо.

ПРИМЕР 1.2.12. Пусть Y' – гладкая проективная гиперэллиптическая кривая, рассматриваемая как двулистное накрытие проективной прямой Y . Тогда для $\mathcal{V} = (\Omega_{\mathcal{O}|k}^1)^{\otimes 2}$ тензорный квадрат любого регулярного дифференциала на Y' – Галуа-инвариантный элемент пространства $\Gamma(Y', \mathcal{V}_{Y'})$, который не лежит в подпространстве $\Gamma(Y, \mathcal{V}_Y) = 0$.

Функтор Γ совпадает с композицией забывающего функтора “общего слоя” в категорию $\mathcal{S}m_G(k)$ с функтором Γ , определенным после предложения 1.2.4. Функтор $\Gamma = \Gamma \circ \mathcal{S}$ – строгий на $\mathcal{A}$. Однако он не полон, и объекты в его образе очень сильно приводимы, см. пример 1.2.5 (к которому можно добавить, что $\mathcal{S}(\Omega_{F|k}^1)(Y) = \Gamma(Y, \Omega_{Y|k}^1)$).

ГИПОТЕЗА 1.2.13. 1) *Неприводимые объекты $\mathcal{A}$ – прямые слагаемые объектов $\bigotimes_F^{\bullet} \Omega_{F|k}^1$.*

2) *Функторы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bigotimes_F^q \mathfrak{m}, -)$ точны на $\mathcal{A}$ для всех $q \geq 0$.*

3) *$\mathcal{A}$ эквивалентна категории “когерентных” пучков на $\mathfrak{S}\mathfrak{m}_k$.*

Из справедливости гипотезы 1.2.13, 1) следовало бы, что естественное включение $\text{Der}(k) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(\Omega_{F|k}^1, F)$, сопоставляющее ненулевому дифференцированию $\eta \in \text{Hom}_k(\Omega_k^1, k)$ поля k класс расширения $0 \rightarrow F \xrightarrow{\eta^{-1}(1)} \Omega_F^1 / \ker \eta \otimes_k F \rightarrow \Omega_{F|k}^1 \rightarrow 0$ в $\mathcal{A}$, является изоморфизмом. Это согласуется с [16; лемма 3.10].

В качестве довода в пользу гипотезы 1.2.13, 2), в дополнение к случаю $k = \overline{\mathbb{Q}}$, в [16; теорема 2.4] показано, что для любого $L \subset F$, чисто трансцендентного степени m над k , и любого $V \in \mathcal{A}$ любой неприводимый подфактор полулинейного представления $V^{G_{F|L}}$ группы $\text{PGL}_{m+1} k$ над L – прямое слагаемое алгебры $\bigotimes_L^{\bullet} \Omega_{L|k}^1$.

Неприводимых гладких полулинейных представлений довольно много, и, в частности, большинство из них не допустимо. Например, никакой из факторов (в том числе неприводимых) циклического объекта $F[\{L \subset F \mid L \cong \overline{K}_q\}]^{\circ}$, состоящего из формальных F -линейных комбинаций степени нуль алгебраически замкнутых подполей в F степени трансцендентности q над k для некоторого целого $q \geq 1$, не лежит в $\mathcal{A}$, см. [16; следствие 3.5]. Однако автор не знает даже, приводимы ли эти объекты. Тем более непонятно, как явно описать неприводимые объекты в $\mathcal{C}$. Так что, в части 2) гипотезы 1.2.13, категорию $\mathcal{A}$ нельзя заменить целой категорией $\mathcal{C}$, и нужно накладывать некоторые дополнительные условия, например, упомянутые в замечании 1.2.7, (ii).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.14. (i) Предполагая справедливой часть 2) гипотезы 1.2.13, можно переформулировать гипотезу 1.1.13 в следующей, лингвистически более убедительной, форме: *любой неприводимый объект $\mathcal{A}dm$ (и $\mathcal{I}_G$) содержится в неприводимом объекте $\mathcal{A}$.*

Эта переформулировка основана на предложении 4.1.17.

(ii) Далеко не для всякой абелевой категории имеет смысл изучать ее неприводимые объекты. Например, в факторкатегории категории векторных пространств над некоторым полем по ее подкатегории конечномерных векторных пространств неприводимых объектов нет вообще (равно как нет ни бесконечных сумм, ни бесконечных произведений).

С другой стороны, любой пучок векторных пространств или квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ на схеме Y допускает фактор с носителем в одной точке p :

$$U \mapsto \lim_{\substack{\longrightarrow \\ V \ni p}} \mathcal{F}(V),$$

если $p \in U$; $U \mapsto 0$, если $p \notin U$. Поэтому неприводимые объекты соответствуют точкам Y .

1.3. Обозначения, соглашения и терминология. Введем обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей статьи.

Поля, их расширения, автоморфизмы и т.д. Пусть K – поле и H – некоторая группа его автоморфизмов. Мы считаем H топологической группой, базу открытых подгрупп которой порождают стабилизаторы элементов K . Тогда H становится хаусдорфовой и вполне несвязной группой, т.е. любая окрестность любого ее элемента содержит замкнутую подокрестность.

Для любого набора подмножеств K_0 , $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$ поля K подгруппа группы H , состоящая из элементов, неподвижных на K_0 и индуцирующих автоморфизмы каждого из K_α , замкнута в H . В случае, когда K_α – подполя, естественный гомоморфизм из этой подгруппы в группу автоморфизмов поля K_α непрерывен. Через $G_{\{K, (K_\alpha)_{\alpha \in I}\} | K_0}$ мы обозначаем группу автоморфизмов поля K , действующих неподвижно на K_0 и сохраняющих все K_α . Положим $G_{K|K_0} := G_{\{K\} | K_0}$.

Если K – подполе в F , то $\bar{K}$ обозначает алгебраическое замыкание K в F , а $\degtr(F|K)$ – степень трансцендентности расширения $F|K$ (возможно бесконечную, но счетную).

Если явно не оговорено противное, то $F|k$ – расширение алгебраически замкнутых полей счетной (по умолчанию) или конечной степени трансцендентности $\degtr(F|k) = n \geq 1$ и $G := G_{F|k}$. Везде, где не оговорено противное, характеристика k – нулевая.

Общие обозначения. На протяжении всей работы $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел и *модуль* – всегда $\mathbb{Q}$ -векторное пространство (за исключением нескольких случаев, в которых характеристике поля k разрешается быть положительной). Для абелевой группы A положим $A_{\mathbb{Q}} = A \otimes \mathbb{Q}$.

Для многообразия X над k и любого расширения полей $E|k$ положим $X_E := X \times_k E$. $\mathbb{P}_K^M$ обозначает M -мерное проективное пространство над полем K .

Для коммутативной групповой схемы A над k положим $W_A = A(F)/A(k)$.

Пусть R – кольцо. Если U – множество, то $R[U]$ обозначает свободный R -модуль с базисом U . Если M – R -модуль и $m \in M$, то $\langle m \rangle_R$ обозначает R -подмодуль в M , порожденный m . Если $R = \mathbb{Z}$, то $\langle m \rangle := \langle m \rangle_R$. Через Stab_w обозначается стабилизатор элемента w .

Если H – группа, действующая на множестве S слева (например, S – группа, а $H \subseteq S$ – ее подгруппа), то $H \backslash S$ обозначает множество H -орбит (правых смежных классов), а если S_1 – подмножество множества S , то $S \setminus S_1$ – дополнение в S к S_1 . Через $N_H H_1$ обозначаем нормализатор подгруппы H_1 в H .

Если S – множество, то $|S|$ обозначает его мощность. Если $\alpha, \beta \in S$, то $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера: $\delta_{\alpha\beta} = 1$, если $\alpha = \beta$, и $\delta_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$.

Топологические группы, их представления, меры и т. д. Если H – вполне несвязная топологическая группа, то через H° обозначим ее подгруппу, порожденную всеми компактными подгруппами, а через H^{ab} – фактор H по замыканию ее коммутанта. Очевидно, что H° – нормальная подгруппа в H , которая открыта, по крайней мере, если H локально компактна.

H -множество (или представление группы H в векторном пространстве над некоторым полем и т. п.) W называется *гладким*, если стабилизаторы всех элементов W открыты. Гладкое представление W называется *допустимым*, если неподвижные векторы каждой открытой подгруппы образуют конечномерное подпространство в W .

$\mathbb{Q}(\chi_H)$ – H -модуль правоинвариантных мер на H , и $\chi_H: H \rightarrow \mathbb{Q}_+^\times$ – модуль, если H локально компактна (см. текст после следствия 2.0.1). Положим $\mathbb{Q}(\chi) := \mathbb{Q}(\chi_G)$ и $\chi := \chi_G$ при $n < \infty$.

$\mathcal{S}m_H(E)$ – категория гладких представлений группы H над полем E характеристики нуля. $\mathcal{A}dm_H(E)$ – ее полная подкатегория допустимых E -представлений. $\mathcal{I}_G(E)$ – полная подкатегория в $\mathcal{S}m_G(E)$, состоящая из таких представлений W группы G , что $W^{G_F|L} = W^{G_F|L'}$ для любого расширения $L|k$ в F и любого чисто трансцендентного расширения $L'|L$ в F . Когда речь идет о $\mathcal{I}_G(E)$, основным случаем будет $n = \infty$. Положим $\mathcal{S}m_H = \mathcal{S}m_H(\mathbb{Q})$ и $\mathcal{I}_G = \mathcal{I}_G(\mathbb{Q})$.

Алгебры Гекке $\mathcal{H}_E(H, U)$ для компактных подгрупп U в H определены в замечании 3.0.6, единица $\mathcal{H}_E(H, U)$ – мера Хаара на U – обозначается h_U . Там же определено действие алгебры “мер” $\mathbb{D}_E(H) := \mathcal{H}_E(H, \{1\})$ на объектах $\mathcal{S}m_H(E)$. Положим $\mathbb{D}_E = \mathbb{D}_E(G)$ и $\mathcal{H}_E(U) = \mathcal{H}_E(G, U)$.

Фильтрация *уровня* $N_\bullet$ определена после теоремы 1.1.10.

2. Структура G и теории Галуа

В этом разделе описаны основные результаты о топологической группе G (в произвольной характеристике, см. теорему 2.2.1), такие как а) ее простота в случае $n = \infty$; б) простота ее (нормальной) подгруппы G° , порожденной всеми компактными подгруппами. В частности, G° плотна в G при $n = \infty$. Пункт а) дополняет результат Д. Ласкара [20]: G проста как дискретная группа, если степень трансцендентности $F|k$ несчетна.

Очевидно, что G° открыта при $n < \infty$, так что проекция $G \rightarrow G/G^\circ$ с дискретной топологией на G/G° непрерывна. При $n = 1$ лемма 2.4.7 представляет G/G° как фактор некоторой, довольно “структурированной”, группы. О группе G/G° известно немного, отчего обычно приходится работать в “стабильном” случае $n = \infty$ и ставить вопросы так, чтобы можно было обойтись без знания структуры этой группы.

Если $n = \infty$, то из простоты группы G следует (см. [7; следствие 2.11]), что любой нетривиальный непрерывный гомоморфизм из G инъективен; а в случае $n < \infty$ любой неинъективный непрерывный гомоморфизм из G пропускается через G/G° . Еще одно следствие состоит в том, что у группы G° (и у G , если $n = \infty$) нет ни нетривиальных гладких представлений конечной степени, ни собственных замкнутых подгрупп конечного индекса.

СЛЕДСТВИЕ 2.0.1 [7; следствие 2.11]. *Для любой подгруппы H группы G , содержащей G° , и любого непрерывного гомоморфизма π из H или π инъективен, или ограничение π на G° тривиально.*

Пусть H – локально компактная группа и $\mathbb{Q}(\chi_H)$ – фактор свободной абелевой группы, порожденной множеством компактных открытых подгрупп в H , по соотношениям $[U] = [U : U'] \cdot [U']$ для всех $U' \subset U$. Поскольку пересечение любой пары компактных открытых подгрупп в H имеет конечный индекс в каждой из них, $\mathbb{Q}(\chi_H)$ – одномерное $\mathbb{Q}$ -векторное пространство, ориентированное условием $[U] > 0$ для любой U . Другими словами, $\mathbb{Q}(\chi_H)$ – пространство $\mathbb{Q}$ -значных правоинвариантных мер на H . На этом пространстве действует группа бинепрерывных автоморфизмов группы H . В частности, группа H действует на нем сопряжением. Пусть $\chi_H: H \rightarrow \mathbb{Q}_+^\times$ – характер этого представления H , называемый модулем группы H . Он тривиален в ограничении на (открытую) подгруппу H° , порожденную всеми компактными подгруппами H .

В п. 2.5 вводится локально компактная группа $\mathfrak{G}$. Если $n < \infty$, то $\mathfrak{G} := G$, а если $n = \infty$, то имеется непрерывное вложение $\mathfrak{G} \hookrightarrow G$ с плотным образом. Из явного описания модуля $\chi = \chi_{\mathfrak{G}}$ видно, что χ сюръективен при всех $1 \leq n \leq \infty$. Из теоремы 2.2.1 вытекает, что группа $\mathfrak{G}^\circ$ топологически проста.

Однако автор не знает даже, тривиальна ли дискретная группа $\ker \chi / \mathfrak{G}^\circ$. Если она тривиальна при $n = 1$, то она тривиальна и в общем случае (см. [7; лемма 2.15]).

2.1. Теория Галуа для компактных подгрупп. Пусть $F|k$ – произвольное расширение произвольных полей и $G = G_{F|k}$ – его группа автоморфизмов. Топология на G , описанная во введении, с. 88, изучалась в работах [1; с. 151, упражнение 5], [2], [3; гл. 6, § 6.3] и [4; гл. 2, часть 1, § 1]. Там показано, что G хаусдорфова и вполне несвязна и что для любого подполя K в $F|k$ топология на $G_{F|K}$ совпадает с ограничением топологии на G . Подгруппы $G_{\{F_\alpha, (F_\alpha)_{\alpha \in I}\}|k}$ замкнуты в G , поскольку если $\sigma(F_\alpha) \subseteq F_\alpha$, $\sigma(F \setminus F_\alpha) \subseteq F \setminus F_\alpha$ и $\sigma(F) = F$, то $\sigma(F_\alpha) = F_\alpha$.

Теория Галуа–Крулля сопоставляет промежуточные подполя некоторого расширения Галуа замкнутым (или, что то же, компактным) подгруппам группы Галуа этого расширения, и обратно. А именно, подгруппе сопоставляется

ее поле инвариантов, а подполю сопоставляется группа автоморфизмов, неподвижных на нем.

Эти сопоставления взаимно обратны, и допускают следующее прямое обобщение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. (а) Непустой набор $\mathcal{L}$ подполей в F называется *решетом*, если с любым своим элементом он содержит и любое его расширение. Назовем *насыщением* произвольного набора $\mathcal{L}$ подполей в F решет $\overline{\mathcal{L}}$, элементы которого – это расширения в F элементов $\mathcal{L}$.

(б) Набор подполей называется *направленным*, если вместе с любой парой своих элементов он содержит и их пересечение.

ПРИМЕР 2.1.2. (i) Насыщение наборов, состоящих из единственного подполя, определяет вложение множества подполей в $F|k$ во множество решет подполей в $F|k$.

(ii) Для убывающей последовательности $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$ подполей K_j в $F|k$, над которыми поле F алгебраично, набор всех расширений всех K_j – направленное решет. Ясно, что насыщения наборов $(K_j)_{j \geq 1}$ и $(K_j)_{j \in S}$ совпадают для любого бесконечного подмножества S натуральных чисел.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.3. Формула $K \mapsto \text{Aut}(F|K) =: G_{F|K}$ задает морфизм

$$\beta: \{\text{подполя в } F \text{ над } k\} \rightarrow \{\text{замкнутые подгруппы в } G\} \quad (2)$$

унитарных полугрупп (который преобразует композит полей в пересечение подгрупп), обращающий включения, инъективный, если $\text{char}(k) = 0$ и F алгебраически замкнуто. Он сохраняет единицы: $k \mapsto G$. Образ β стабилен относительно переходов к подгруппам, факторы по которым компактны, и к большим подгруппам с компактными факторами; если F алгебраически замкнуто, то слои β состоят из подполей поля F с общим совершенным замыканием; β индуцирует согласованные биекции

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{направленные решета,} \\ \text{состоящие из таких } K \text{ в } F|k, \\ \text{что } F|K - \text{расширения Галуа} \end{array} \right\} & \xleftarrow{A} & \left\{ \begin{array}{l} \text{подгруппы } G, \text{ исчерпываемые} \\ \text{компактными подгруппами} \end{array} \right\} \\ \uparrow \text{насыщение} & & \cup \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{такие подполя } K \text{ в } F|k, \text{ что} \\ F|K - \text{расширение Галуа} \end{array} \right\} & \xleftarrow{B} & \{\text{компактные подгруппы в } G\} \\ \cup & & \cup \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{такие подполя } K \text{ в } F|k, \text{ что} \\ \text{существует такое подполе } L \\ \text{в } K|k \text{ конечного типа, что } F|K' - \\ \text{расширение Галуа только для} \\ K' = K, \text{ если } K' - \text{подполе в } K|L \end{array} \right\} & \xleftarrow{C} & \left\{ \begin{array}{l} \text{компактные открытые} \\ \text{подгруппы в } G \end{array} \right\}. \end{array}$$

Обратные отображения в случаях B и C заданы формулой $G \supset H \mapsto F^H$ (неподвижное подполе в F группы H).

Вполне несвязная топологическая группа локально компактна тогда и только тогда, когда в ней имеется открытая компактная подгруппа. В частности, если $\deg \text{tr}(F|F^G) < \infty$ (например, если $F = \overline{F}$ и $n < \infty$), то G локально компактна.

Соответствие B установлено в [2; §3, лемма 1] (см. также [3; предложение 6.11]); по поводу соотношения C см. [1], оно также непосредственно следует из [2; §3, лемма 1] и приведено в [3; предложение 6.12]. В случае алгебраически замкнутого F в левой части соответствия C стоят такие совершенные замыкания K в F подполей конечного типа над k , что $F|K$ – расширение Галуа. Соответствие A индуцируется отображениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{подгруппы в } G, \text{ порожденные} \\ \text{компактными подгруппами} \end{array} \right\} \beta \xrightarrow{\gamma} \left\{ \begin{array}{l} \text{решета, состоящие} \\ \text{из таких подполей в } F|k, \\ \text{над которыми } F \text{ алгебраично} \end{array} \right\},$$

заданными формулами $\beta: G \supset H \mapsto (F^G \subseteq F)_C$, где C пробегает компактные подгруппы в H , и $\gamma: \mathcal{L} \mapsto \bigcup_{K \in \mathcal{L}} G_{F|K}$.

ПРИМЕРЫ 2.1.4. (i) Если F алгебраически замкнуто, то подполя в $F|k$, над которыми F – расширение Галуа, – это совершенные подполя, содержащие k , над которыми F алгебраично. Если, кроме того, $n = 1$, то собственные подгруппы в образе β – это компактные подгруппы.

(ii) Пусть $\text{char}(k) = 0$, $F = \overline{k}(x)$ и группа H порождена компактными подгруппами $G_{F|k((x-a)^2)}$ для $a \in k$. Зафиксируем вложение $F \hookrightarrow k((x^{-1/\infty}))$ и определим очевидным образом действие сдвигов на элементы k на формальных рядах Пуизё. Это задаст вложение групп $k \hookrightarrow G$. Пусть Γ – образ $k \hookrightarrow G$. Тогда умножение $G_{F|k(x^2)} \times \Gamma \rightarrow H$ биективно. Ясно, что пересечение H с объединением компактных подгрупп G группой не является.

(iii) Группа G может быть локально компактной, даже если степень трансцендентности $F|F^G$ бесконечна. Например, пусть многочлен $P(X, Y, Z)$ над k определяет поверхность без бирациональных автоморфизмов, x, y_i , где $i \in \mathbb{Z}$, – независимые переменные и z_i удовлетворяют условиям $P(\tau^i x, y_i, z_i) = 0$ для всех $i \in \mathbb{Z}$ и некоторого элемента $\tau \in G_{k(x)|k}$ бесконечного порядка (например, $\tau x = x + 1$, если $\text{char}(k) = 0$, или $\tau x = qx$, если $q \in k^\times \setminus \mu_\infty$). Положим $F = k(x, y_i, z_i \mid i \in \mathbb{Z})$. Тогда $G_{F|k(x)} = \{1\}$, т.е. группа дискретна. С другой стороны, G содержит такой элемент σ , что $\sigma x = \tau x$, $\sigma y_i = y_{i+1}$ и $\sigma z_i = z_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, и, значит, $F^G = F^{\langle \sigma \rangle} = k$.

(iv) Отображение $H \mapsto F^H$ обращает порядок, но оно не согласовано, вообще говоря, с β . Если F алгебраически замкнуто, то оно обратно слева к ограничению β на совершенные подполя, любое совершенное подполе имеет вид F^H и G содержит в качестве подфакторов группы автоморфизмов всех расширений в $F|k$. Но $H \mapsto F^H$ не является морфизмом моноидов: группы $G_{\{F, k(x^2)\}|k}, G_{\{F, k((x+1)^2)\}|k}$ отображаются в k , в то время как $G_{\{F, k(x^2)\}|k} \cap G_{\{F, k((x+1)^2)\}|k} = G_{F|k(x)}$ переходит в $k(x) \neq k$.

Дополнительные примеры можно найти в [21].

2.2. Топологическая простота G° и G . Отныне поле F будет алгебраически замкнутым.

Скажем, что топологическая группа топологически проста, если любая ее замкнутая нормальная собственная подгруппа тривиальна.

ТЕОРЕМА 2.2.1 [7; теорема 2.9]. *Если $n < \infty$, то любая нетривиальная подгруппа в G , нормализуемая подгруппой G° , плотна в G° . Если $n = \infty$, то любая нетривиальная нормальная подгруппа в G , например G° , плотна.*

Здесь $F|k$ – произвольное расширение алгебраически замкнутых полей произвольной характеристики. В частности, подгруппа G° группы G топологически проста, если $n < \infty$; если $n = \infty$, то G топологически проста.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.2. (i) Если $n = 1$ и $\text{char}(k) \neq 0$, то сепарабельное замыкание подполя $k(x)$ в F порождено G° -орбитой x для любого $x \in F \setminus k$, см. предложение 3.3.1.

(ii) Рассуждение в работе [20] показывает, что G проста как дискретная группа, если степень трансцендентности F над k несчетна.

То, что G° плотна в G при $n = \infty$, вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2.2.3. *Пусть L – подполе поля F такое, что $\text{degtr}(F|L) = \infty$. Тогда $G_{F|L}$ – замыкание множества произведений пар элементов компактных подгрупп в $G_{F|L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma \in G_{F|L}$. Надо показать, что ограничение σ на любое конечное подмножество $S \subset F$ совпадает с ограничением произведения пары элементов компактных подгрупп $G_{F|L}$. Пусть $T \subset F$ – подмножество порядка $|S|$, элементы которого алгебраически независимы над $L(S, \sigma(S))$. Выберем в алгебраическом замыкании $L(T)$ подполе K , изоморфное над L полю $L(S)$. Ясно, что найдутся такие элементы компактных подгрупп τ_1, τ_2 , что τ_1 переставляет $L(S)$ и K , τ_2 переставляет $L(\sigma(S))$ и K и $\tau_1\tau_2|_S = \sigma|_S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.4 [7; предложение 2.14], [19]. *Пусть L_1 и L_2 – подполя в F такие, что $\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2$ алгебраично над $L_1 \cap L_2$ и либо $\text{degtr}(F|L_2) = \infty$, либо $\text{degtr}(L_1|L_1 \cap L_2) < \infty$ и L_1 и L_2 алгебраически замкнуты. Тогда подгруппа в G , порожденная $G_{F|L_1}$ и $G_{F|L_2}$, плотна в $G_{F|L_1 \cap L_2}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.5. Это предложение (и [7; лемма 2.16], см. доказательство приведенной ниже леммы 2.2.6) – аналог результата работы [22]: алгебра Ли дифференцирований $\text{Der}(F|L_1 \cap L_2)$ топологически порождена подалгебрами Ли $\text{Der}(F|L_1)$ и $\text{Der}(F|L_2)$. (Базу открытых подалгебр Ли в $\text{Der}(F|L)$ задают аннуляторы конечных подмножеств в F .)

ЛЕММА 2.2.6. *Пусть $L_0 \subset L_1 \subset L_2$ – пара нетривиальных чисто трансцендентных расширений в F конечного типа. Пусть $\mathfrak{S}$ – некоторая транзитивная группа перестановок базиса трансцендентности S поля L_2 над L_0 , продолжающего базис трансцендентности поля L_1 над L_0 . Пусть H – подгруппа в $G_{F|L_0}$, сохраняющая L_2 и проектирующаяся на подгруппу в $G_{L_2|L_0}$, содержащую $\mathfrak{S}$. Тогда подгруппа G' в G , порожденная $G_{F|L_1}$ и H , совпадает с $G_{F|L_0}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа G' содержит подгруппы, сопряженные с $G_{F|L_1}$ всеми элементами H . В частности, G' содержит подгруппы $G_{F|L_0(S \setminus \{x\})}$ для всех $x \in S$. Согласно [7; лемма 2.16], группа, порожденная подгруппами $G_{F|L(S \setminus \{x\})}$ для всех $x \in S$, плотна в $G_{F|L}$ для любого подполя L в F и некоторого множества S элементов F , алгебраически независимых над L . Поэтому G' совпадает с $G_{F|L_0}$.

2.3. Открытые и максимальные собственные подгруппы; теории Галуа. (Большую часть результатов этого пункта можно найти в [19].) Изучение гладких представлений G и стабилизаторов их векторов приводит к изучению открытых подгрупп G . Для любого $\text{degtr}(F|k) = n \leq \infty$ имеется морфизм коммутативных ассоциативных моноидов с (минимальной) единицей, обращающий включения:

$$\alpha: \left\{ \begin{array}{c} \text{открытые} \\ \text{подгруппы } G \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{алгебраически замкнутые} \\ \text{подполя поля } F \text{ конечной} \\ \text{степени трансцендентности над } k \end{array} \right\} =: \text{АП}.$$

Морфизм α преобразует пересечение подгрупп в алгебраическое замыкание композита подполей, а единицу G – в единицу k . Он однозначно определяется следующими эквивалентными условиями:

- каждая открытая подгруппа $U \subseteq G$ содержит $G_{F|\alpha(U)}$ в качестве нормальной подгруппы² и, по возможности, $\alpha(U) \neq F$;
- $G_{F|\alpha(U)} \subseteq H$ и степень трансцендентности $\alpha(U)$ над k минимальна.

В частности, для любого нетривиального алгебраически замкнутого расширения $L \neq F$ поля k конечной степени трансцендентности в F нормализатор $G_{\{F,L\}|k}$ в G подгруппы $G_{F|L}$ (который, очевидно, открыт) максимален среди собственных подгрупп G .

При $n = \infty$ любая собственная открытая подгруппа G содержится в максимальной собственной открытой подгруппе G и любая максимальная собственная открытая подгруппа G имеет вид $G_{\{F,L\}|k}$ для некоторого $L \in \text{АП}$, $L \neq k$.

ВОПРОСЫ. 1. Прообраз любой подгруппы простого (конечного) индекса в $\mathbb{Q}_+^\times$ относительно характера модуля при $n < \infty$ – это еще один тип максимальных открытых собственных подгрупп. Любое компактное подмножество группы G содержится в бесконечном множестве таких подгрупп. Существуют ли другие максимальные открытые собственные подгруппы?

2. Существуют ли замкнутые подгруппы, не содержащиеся в максимальных?

3. Реализуются ли максимальные собственные открытые подгруппы в качестве стабилизаторов *неприводимых* (полу-) линейных представлений (при $n = \infty$) группы G ? (Ответ был бы отрицательным, если бы представления $\mathbb{Q}[\{\bar{L}\} \mid k \subset L \subset F, \text{degtr}(L|k) = m]^\circ$ [соответственно $F[\{\bar{L}\} \mid k \subset L \subset F, \text{degtr}(L|k) = m]^\circ \in \mathcal{C}$] оказались неприводимыми для всех $m \geq 1$.)

В случае произвольной степени трансцендентности стабилизаторы дискретных нормирований ранга один – это еще один тип замкнутых максимальных,

²т. е. U содержится в нормализаторе $G_{\{F,\alpha(U)\}|k}$ подгруппы $G_{F|\alpha(U)}$.

но уже не открытых подгрупп, см. предложение 2.4.5. С их помощью по представлениям G строятся функторы на категориях гладких k -многообразий, см. формулу (1), предложение 4.4.12 и пояснительные тексты к ним.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.1. (i) Если $n < \infty$ и $H \subset G$ не содержится ни в одной из подгрупп вида $G_{\{F, L\}|k}$ ни для какого $L \in \text{АП} \setminus \{k, F\}$, то F алгебраично над подполем, порожденным над k H -орбитой x для любого $x \in F \setminus k$.

(ii) Если $\text{degtr}(L|k) = \text{degtr}(F|L) = \infty$, то $G_{\{F, \bar{L}\}|k}$ максимальна среди замкнутых собственных подгрупп G , т.е. подгруппа H , порожденная $G_{\{F, \bar{L}\}|k}$ и любым $\sigma \in G$ таким, что $\sigma(\bar{L}) \neq \bar{L}$, плотна в G . *Вопрос:* нельзя ли условие “ $\text{degtr}(F|L) = \infty$ ” заменить условием “ $F \neq \bar{L}$ ”?

(iii) Пусть подполя $\bar{K}$ и $\bar{L}$ находятся в общем положении. Тогда имеется ровно три максимальных собственных открытых подгруппы группы G , содержащих $G_{\{F, \bar{K}, \bar{L}\}|k}$, а именно, $G_{\{F, \bar{K}\}|k}$, $G_{\{F, \bar{L}\}|k}$ и $G_{\{F, \bar{K}\bar{L}\}|k}$, поскольку если $\sigma \in G$ не сохраняет $\bar{K}$, $\bar{L}$ и $\bar{K}\bar{L}$, то $\langle \sigma, G_{\{F, \bar{K}, \bar{L}\}|k} \rangle = G$.

Объединение собственных открытых подгрупп G характеризуется следующим фактом.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.2 [19]. *При $n = \infty$ объединение собственных открытых подгрупп группы G плотно в G и не совпадает с G . Следующие свойства элемента $\sigma \in G$ эквивалентны:*

- 1) σ не лежит в объединении собственных открытых подгрупп G ;
- 2) $W^{(\sigma)} = W^G$ для любого гладкого G -множества W ;
- 3) любое σ -инвариантное конечномерное F -векторное подпространство в $\Omega_{F|k}^1$ – нулевое.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.3. При $n = \infty$ любая счетная свободная группа $H = *_{j \in S} \mathbb{Z}$ вкладывается в G так, что ее пересечение с любой собственной открытой подгруппой в G тривиально. А именно, выберем базис трансцендентности $F|k$ и пронумеруем его элементами группы H : $\{x_h \mid h \in H\}$. Определим действие образующих $\{h_j \mid j \in S\}$ группы H на базисе трансцендентности формулой $h_j x_h = x_{h_j h}$. Ясно, что это действие продолжается, хотя и неоднозначно, на F .

Пусть $n = \infty$, σ не лежит в объединении собственных открытых подгрупп G и $A = A_\sigma := F\langle \sigma, \sigma^{-1} \rangle$ – алгебра эндоморфизмов аддитивной группы F , порожденная F и $\sigma^{\pm 1}$. Ясно, что A – евклидово простое кольцо с центром $F^{(\sigma)}$ (см. [23]). Стандартным образом проверяется, что A -модули без кручения свободны. В частности, $\Omega_{F|k}^1$ является свободным A -модулем не более чем счетного ранга. Ранг $\Omega_{F|k}^1$ как A -модуля – инвариант класса сопряженности σ . Других инвариантов автору не известно.

Еще одна теория Галуа, [19]. В. Круль в [24] задал вопрос, как построить теорию Галуа трансцендентных расширений $F|k$, т.е. как построить подгруппы H , совпадающие с группами автоморфизмов F над неподвижными подполями F^H ? Для алгебраически замкнутых полей счетной степени трансцендентности такая, хотя и не очень явная, теория получается как следствие описания максимальных открытых подгрупп группы G .

А именно, можно охарактеризовать

- 1) нормализаторы $G_{\{F,L\}|k}$ подгрупп $G_{F|L}$ в G для всех $L \in \text{АП} \setminus \{k\}$ как максимальные открытые собственные подгруппы G ;
- 2) подгруппы $G_{F|L}$ для всех $L \in \text{АП} \setminus \{k\}$ как минимальные замкнутые нетривиальные нормальные подгруппы в $G_{\{F,L\}|k}$ (это следует из топологической простоты G);
- 3) подгруппы $G_{F|L}$ группы G для всех нетривиальных расширений $L|k$ в F конечного типа как открытые подгруппы, содержащие нормальные компактные подгруппы вида $G_{F|\bar{L}}$ из п. 2) (это следует из классической теории Галуа для $\bar{L}|k$);
- 4) собственные подгруппы в образе β как пересечения подгрупп из п. 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.4. Подгруппы $G_{F|L}$ группы G для всех расширений $L|k$ в F конечного типа и степени трансцендентности один – это подгруппы из п. 3), которые содержатся в единственной максимальной собственной подгруппе группы G .

2.4. Нормирования и связанные с ними подгруппы. (Основные результаты этого пункта содержатся в [19].) Пусть $\mathcal{O}_v$ – кольцо нормирования в F , $\mathfrak{m}_v = \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^\times$ – максимальный идеал и $\kappa(v)$ – поле вычетов v . Если $k \subseteq \mathcal{O}_v$, то зафиксируем подполе $k \subseteq F' \subseteq \mathcal{O}_v$, отождествляемое редукцией по модулю $\mathfrak{m}_v$ с $\kappa(v)$. В этом случае поле вычетов $\kappa(v)$ алгебраически замкнуто и его характеристика равна нулю.

Положим $G_v := \{\sigma \in G \mid \sigma(\mathcal{O}_v) = \mathcal{O}_v\}$. Подгруппа G_v замкнута в G .

Группа нормирования $\Gamma := F^\times / \mathcal{O}_v^\times \cong \mathbb{Q}^r$ вполне упорядочена: $v(x) \geq v(y)$ тогда и только тогда, когда $xy^{-1} \in \mathcal{O}_v$, где $v: F^\times \rightarrow \Gamma$ – естественная проекция.

Назовем рангом v число $r = \dim_{\mathbb{Q}} \Gamma$. Будем всегда считать его конечным.

Допустим, что характеристики поля L и поля вычетов κ некоторого его нормирования w совпадают. Тогда w называется *дискретным*, если L алгебраично над подполем, порожденным некоторым подъемом базиса трансцендентности κ и некоторым подъемом базиса группы значений нормирования. В частности, v дискретно тогда и только тогда, когда степень трансцендентности F над F' равна r .

Выберем произвольное алгебраически замкнутое подполе F' в F , над которым степень трансцендентности F равна r , базис трансцендентности $x_1, \dots, x_r$ расширения $F|F'$ и вложения $F \hookrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} F'((x_1^{1/N})) \dots ((x_r^{1/N}))$ над $F'(x_1, \dots, x_r)$. В этом случае $v(x_1^{m_1}) < \dots < v(x_r^{m_r})$ для всех $m_1, \dots, m_r > 0$.

Если $r < \infty$ и $\sigma(\mathcal{O}_v) \subseteq \mathcal{O}_v$ для некоторого $\sigma \in G$, то $\sigma \in G_v$, так как σ индуцирует сюръективный эндоморфизм Γ , т. е. автоморфизм.

Как известно (см. [25] или [26; гл. 5, упражнение 32]), для любого кольца нормирования $\mathcal{O}_p$ с группой нормирования Γ отображение $\mathfrak{p} \mapsto \langle v(\mathcal{O}_p \setminus \mathfrak{p}) \rangle$ задает биекцию между простыми идеалами $\mathcal{O}_p$ и изолированными подгруппами в Γ , причем $v(\mathcal{O}_p \setminus \mathfrak{p})$ – множество всех неотрицательных элементов соответствующей изолированной подгруппы Γ . Поэтому в $\mathcal{O}_v$ имеется ровно $r + 1$ простой идеал.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.1. (i) Если $\mathfrak{p} \neq 0$ – не максимальный простой идеал конечной коразмерности в $\mathcal{O}_v$ и $\mathcal{O}_{v'} := (\mathcal{O}_v)_{\mathfrak{p}}$, то $G_v \subseteq G_{v'}$ (так как любой элемент $\sigma \in G_v$ сохраняет $\mathfrak{p}$, а значит, и $\mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{p}$, т. е. индуцирует автоморфизм $\mathcal{O}_{v'}$).

(ii) При $r > 1$ имеется собственное включение $G_v \subset G_{\{F, \mathcal{O}_v[x_1^{-1}]\}_{|k}}$, т. е. G_v не максимальна.

Пусть $\mathcal{P}_L^r$ – множество колец дискретного нормирования ранга r в L , содержащих k . Множество $\mathcal{P}_L^r$ допускает следующее описание.

Пусть $\mathcal{C}_X^r$ – множество цепочек до коразмерности r неприводимых нормальных подмногообразий на полном неприводимом нормальном многообразии X над k . Любая собственная сюръекция с неприводимыми слоями (например, бирациональный морфизм) $X' \xrightarrow{\pi} X$ задает вложение $\mathcal{C}_X^r \hookrightarrow \mathcal{C}_{X'}^r$ по формуле $(Z^1 \supset \dots \supset Z^r) \mapsto (W^1 \supset \dots \supset W^r)$, где $W^0 := X'$ и W^j – собственный прообраз Z^j относительно ограничения π на W^{j-1} для $1 \leq j \leq r$. Если L конечно порождено над k , то $\mathcal{P}_L^r \cong \varinjlim_X \mathcal{C}_X^r$, где X пробегает модели $L|k$, и $\mathcal{P}_F^r = \varprojlim_L \mathcal{P}_L^r$. Например, если C – гладкая проективная кривая над k , то $\mathcal{P}_{k(C)}^1$ – множество замкнутых схемных точек C .

Любая собственная сюръекция $X' \xrightarrow{\pi} X$ задает вложения $\mathbb{Z}[\mathcal{C}_X^r] \hookrightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{C}_{X'}^r]$ и $\mathbb{Z}[\mathcal{C}_X^r]^\circ \hookrightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{C}_{X'}^r]^\circ$, где $\mathbb{Z}[\mathcal{C}_X^r]^\circ := \bigcap_{j=0}^{r-1} \ker(\mathbb{Z}[\mathcal{C}_X^r] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{C}_X^{r,j}])$, $\mathcal{C}_X^{r,j}$ обозначает множество цепочек без компоненты коразмерности j и $\mathcal{C}_X^r \rightarrow \mathcal{C}_X^{r,j}$ – выбрасывание такой компоненты.

Пусть $\Pi^r := \varinjlim_L \mathbb{Z}[\mathcal{P}_L^r]^\circ$, где $L|k$ пробегает расширения конечного типа в F . Тогда формула

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\alpha \frac{dt_1}{t_1} \wedge \dots \wedge \frac{dt_q}{t_q} \right) &:= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \text{sgn}(\sigma) \alpha|_{D_{1\dots q}} \\ &\times \left(D_{\sigma(1)} \supset D_{\sigma(1)\sigma(2)} \supset \dots \supset \bigcap_{j=1}^q D_j =: D_{1\dots q} \right), \end{aligned}$$

где D_i задан локально уравнением $t_i = 0$ и α регулярна в некоторой окрестности $t_1 = \dots = t_q = 0$, определяет морфизм гладких G -модулей $\text{gr}_{2q}^W H_{\text{dR}/k}^q(F) \xrightarrow{\text{Res}} \Pi^q \otimes k$.

ЛЕММА 2.4.2. Если $0 \leq r < n+1 \leq \infty$, то G действует транзитивно на множестве пар (v, Λ) , где $v: F^\times \twoheadrightarrow \Gamma \cong \mathbb{Q}^r$ представляет элемент $\mathcal{P}_F^r$ и $\Lambda \cong \mathbb{Z}^r$ – решетка в Γ . Стабилизатор пары (v, Λ) действует транзитивно на множестве максимальных подполей $\tilde{F}$ в $F|k$ таких, что $v(\tilde{F}^\times) = \Lambda$. Поле вычетов поля $\tilde{F}$ совпадает с $\kappa(v)$ (в частности, оно алгебраически замкнуто).

Действие G_v на $\kappa(v)$ задает гомоморфизм $G_v \twoheadrightarrow G_{\kappa(v)|k}$. Определим подгруппу “инерции” как его ядро: $G_v^\dagger := \{\sigma \in G_v \mid \sigma x - x \in \mathfrak{m}_v \text{ для любого } x \in \mathcal{O}_v\}$.

Пусть L – поле функций некоторого d -мерного многообразия над k , $I \subseteq \{1, \dots, r\}$, $\mathcal{O}_v \in \mathcal{P}_F^r$, $p \in \mathcal{P}_L^{|I|}$. Пусть $O_{p,v,I}$ – множество всех вложений полей $\sigma: L \xrightarrow{I} F$ таких, что а) $\sigma^{-1}(\mathcal{O}_v) = \mathcal{O}_p$, б) $\sigma(L^\times) \cap \Gamma_i \neq \sigma(L^\times) \cap \Gamma_{i-1}$ тогда и только тогда, когда $1 \leq i \leq r$ и $i \in I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.3. Если $m := \max(0, r + d - n) \leq |I| \leq M := \min(d, r)$, то $O_{p,v,I}$ является непустой G_v -орбитой. Множество $\{L \xrightarrow{/k} F\}$ вложений в F над k поля L является несвязным объединением орбит $O_{p,v,I}$. В частности,

$$\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}]_{G_v^\dagger} = \bigoplus_{s=m}^M \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_L^s} \mathbb{Q}[\{\kappa(p) \xrightarrow{/k} \kappa(v)\}]^{(r)}_{(s)}$$

и

$$G_v \backslash \{L \xrightarrow{/k} F\} = \prod_{s=m}^M (\mathcal{P}_L^s) \Pi^{(r)}_{(s)}.$$

При $|I| = r$ стабилизаторы орбит $O_{p,v,I}$ изоморфны $\widehat{\mathbb{Z}}^r \times G_{\kappa(v)/\kappa(p)}$ (и компактны при $d = n$).

Нормирования и максимальные подгруппы.

ПРИМЕР 2.4.4. При $n = 1$ любому нормированию v соответствует разложение $\{L \xrightarrow{/k} F\} = C(F) \setminus C(k) = \prod_{C(k)} (\mathfrak{m}_v \setminus \{0\})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.5. G_v максимальна среди замкнутых подгрупп G для любого $\mathcal{O}_v \in \mathcal{P}_F^1$.

В доказательстве проверяется, что для любой пары различных $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_{v'} \in \mathcal{P}_F^1$ группа, порожденная G_v и $G_{v'}$, плотна в G , т.е. транзитивно действует на $\{L \xrightarrow{/k} F\}$ для любого $L|k$ конечного типа. Вопрос сводится к случаю $n = 1$, где v и v' интерпретируются как согласованные наборы точек на “универсальной башне” кривых над k , после чего остается показать, что для любой пары различных точек $p, q \in C(k)$ на гладкой полной кривой C над k найдутся “этаж” C_β этой башни и отображение C_β в C , которое переводит пару (v_β, v'_β) в (p, q) .

ЛЕММА 2.4.6. Группа $G_v^1 := \{\sigma \in G_v \mid \sigma x/x \in 1 + \mathfrak{m}_v \text{ для любого } x \in F^\times\} \subset G_v^\dagger$ дискретна при $n < \infty$.

При $n = r = 1$ определим $\varphi: G_v^1 \rightarrow \Gamma \cup \{+\infty\}$ формулой $\varphi(\sigma) = v(\sigma x/x - 1)$ для любого $x \in \mathfrak{m}_v \setminus \{0\}$. Ясно, что φ не зависит от x и определяет ограниченное неархимедово биинвариантное расстояние на G_v^1 . Логарифмическое расстояние преобразует присоединенное действие G_v на G_v^1 в естественное действие G_v на $\Gamma \cong \mathbb{Q}$. С помощью рядов Пуизё нетрудно показать, что отображение G_v^1 в себя, $\sigma \mapsto \sigma^N$, инъективно для любого $N \in \mathbb{N}$.

Пусть $G_v^1(\beta) := \{\sigma \in G_v^1 \mid \varphi(\sigma) \geq \beta\}$, где $\beta \in \Gamma \otimes \mathbb{R}$. Это – нормальная подгруппа в G_v° . Тогда $G_v^1 = G_v^1(0) = G_v^1(0)^+$, где $G_v^1(\beta)^+ := \bigcup_{\gamma > \beta} G_v^1(\gamma) = \{\sigma \in G_v^1 \mid \varphi(\sigma) > \beta\}$. Ясно, что $G_v^1(\beta) \neq G_v^1(\gamma)$, если $\beta \neq \gamma$. Группа $G_v^1(\beta)$ “очень” унипотентна. Например, имеется канонический изоморфизм $G_v^1(\beta)/G_v^1(\beta)^+ \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\Gamma, \mathfrak{m}^{[\beta]})$, где

$$\mathfrak{m}^{[\beta]} = \{x \in \mathfrak{m} \mid v(x) \geq \beta\} / \{x \in \mathfrak{m} \mid v(x) > \beta\} \cong \begin{cases} k, & \text{если } \beta \in \Gamma \text{ и } \beta > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

ЛЕММА 2.4.7. Группа $G_v^1(\beta)$ сюръективна над G/G° для любого элемента $\beta \in \Gamma \otimes \mathbb{R}$.

2.5. “Плотная” локально компактная “подгруппа” $\mathfrak{G}$ в G . Как известно из [1]–[4], в случае алгебраически замкнутого F группа G локально компактна тогда и только тогда, когда $n < \infty$. Пусть $n = \infty$ и $\{x_1, x_2, \dots\}$ – базис трансцендентности поля F над k . Положим $L_m := k(x_m, x_{m+1}, \dots) \subset F$. Тогда $L_\bullet = (L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \dots)$ – убывающая последовательность подполей в F . Положим $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{L_\bullet} := \bigcup_{m \geq 1} G_{F|L_m}$. Возьмем в качестве базиса открытых подгрупп множество $\{G_{F|L_1}\}$, где L пробегает подполя в F конечного типа над k .

Геометрически (в смысле, аналогичном п. 3.4) это соответствует бесконечномерным многообразиям, заданным конечным числом уравнений, морфизмы между которыми не меняют координат с достаточно большими номерами.

Тогда:

- $\mathfrak{G}$ локально компактна (поскольку F алгебраично над L_1), но не унимодулярна;
- включение $\mathfrak{G}$ в G непрерывно и имеет плотный образ (это следует из равенства $\bigcap_{m \geq 1} \bar{L}_m = k$).

Чтобы описать модуль $\chi = \chi_{\mathfrak{G}} : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{Q}_+^\times$, для каждого $\sigma \in G_{F|L_m} \subseteq \mathfrak{G}$ выберем подполе L в $F|L_m$ конечного типа, над которым F алгебраично, например, порожденное над L_m некоторым базисом трансцендентности $F|L_m$. Тогда $[G_{F|L}] = [L\sigma(L) : L^{\text{insep}}] \cdot [G_{F|L\sigma(L)}]$ и $[G_{F|\sigma(L)}] = [L\sigma(L) : \sigma(L)^{\text{insep}}] \cdot [G_{F|L\sigma(L)}]$ для любого $\sigma \in G$, где $-^{\text{insep}}$ обозначает чисто несепарабельное замыкание в $L\sigma(L)$. Следовательно, $\chi(\sigma) = [L\sigma(L) : \sigma(L)^{\text{insep}}] / [L\sigma(L) : L^{\text{insep}}]$.

Для любого целого $q > 1$ имеется элемент $\mathfrak{G}$, оставляющий неподвижными все элементы базиса трансцендентности $F|k$, кроме одного, t , на котором его действие имеет вид $t \mapsto t^q - t$. Поэтому χ сюръективен при всех $1 \leq n \leq \infty$.

В частности, группа $\mathfrak{G}$ не является компактно порожденной ни при каком $1 \leq n \leq \infty$, так как иначе группа значений модуля была бы конечно порождена, что неверно для $\mathbb{Q}_+^\times$.

Примеры гладких полулинейных представлений группы $\mathfrak{G}$. Скажем, что подмножества I и J в $\mathbb{N}$ соизмеримы, если $I \setminus (I \cap J)$ конечно и $|I \setminus (I \cap J)| = |J \setminus (I \cap J)|$. Обозначим через $[I]$ класс подмножеств в $\mathbb{N}$, соизмеримых с подмножеством I . Это – счетное множество.

Определим $\Omega_{F|k}^{[I]}$ как F -векторное пространство с базисом $\{dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_n} \mid J \in [I]\}$, где $J = (j_1 < j_2 < j_3 < \dots)$. Группа $\mathfrak{G}$ действует на $\Omega_{F|k}^{[I]}$ естественным образом. Если I конечно мощности q , то получается представление $\Omega_{F|k}^q$. Если $I = \mathbb{N}$, то получается полулинейное представление степени 1. Если $J = \mathbb{N} \setminus I$, то имеется невырожденное спаривание $\Omega_{F|k}^{[I]} \otimes_F \Omega_{F|k}^{[J]} \rightarrow \Omega_{F|k}^{[\mathbb{N}]}$, естественное, если зафиксировано $I \in [I]$. Из [12; лемма 7.7] следует, что полулинейное представление $\Omega_{F|k}^{[I]}$ неприводимо.

Пусть M – множество таких отображений f множества натуральных чисел в себя, что $\lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = \infty$. Определим $\Omega_{F|k}^M$ как F -векторное пространство с базисом $\{dx_{f(1)} \otimes dx_{f(2)} \otimes dx_{f(3)} \otimes \dots \mid f \in M\}$. Действие $\mathfrak{G}$ определяется естественным образом. Определим $\Omega_{F|k}^{[f]}$ как F -векторное подпространство в $\Omega_{F|k}^M$, натянутое на $\mathfrak{G}$ -орбиту элемента $dx_{f(1)} \otimes dx_{f(2)} \otimes dx_{f(3)} \otimes \dots$.

2.6. Автоморфизмы группы G . Группа непрерывных автоморфизмов группы G “имеет тот же размер”, что и G . А именно, она совпадает с группой автоморфизмов поля F , сохраняющих алгебраически замкнутое подполе k .

При $n > 1$ это утверждение следует из более сильного результата Ф. А. Бомолова [27]–[29]: любой изоморфизм между абсолютными группами Галуа (и даже между их про- p -факторами по второму члену нижнего центрального ряда) полей функций многообразий над k размерности > 1 индуцирован изоморфизмом между этими полями. Основная часть доказательства в этом случае состоит в проверке того, что все абелевы подгруппы ранга > 1 абсолютных групп Галуа содержатся в подгруппах разложения различных нормирований.

При $n = 1$ это утверждение доказано в [30]. Общая идея состоит в следующем. Открытые компактные подгруппы G° – это абсолютные группы Галуа полей функций кривых над k с отмеченной F -рациональной общей точкой. Эти кривые удается функториально описать в терминах топологической группы G° как проективные схемы над $\mathbb{Q}$. Например, абсолютные группы Галуа полей функций рациональных кривых над k – это такие открытые компактные подгруппы U , что $N_G(U)/U$ бесконечна и не имеет абелевых подгрупп конечного индекса. В этом случае подгруппы разложения в U^{ab} параметризованы множеством параболических подгрупп P в $N_G(U)/U \cong \text{PGL}_2 k$: подгруппа $D_P \cong \widehat{\mathbb{Z}}(1)$ состоит из элементов U^{ab} , неподвижных относительно присоединенного действия P . Если открытая компактная подгруппа $U = G_{F|L}$ произвольна, то подгруппы разложения в U^{ab} можно описать как максимальные подгруппы в замыкании аддитивной оболочки образов гомоморфизмов переноса $G_{F|k(x)}^{\text{ab}} \rightarrow G_{F|L}^{\text{ab}}$ для всех $x \in L \setminus k$, проекции которых на $G_{F|k(x)}^{\text{ab}}$ (относительно вложения $G_{F|L}^{\text{ab}} \rightarrow \prod_{x \in L \setminus k} G_{F|k(x)}^{\text{ab}}$, индуцированного включениями $G_{F|L} \subseteq G_{F|k(x)}$) являются подгруппами конечного индекса в некоторых подгруппах разложения в $G_{F|k(x)}^{\text{ab}}$.

Из этого следует, что автоморфизм G° индуцирует автоморфизм всего набора кривых, т. е. автоморфизм поля F . Несколько более общая формулировка выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.6.1 [30; теорема 4.2]. Пусть $n = 1$ и H – подгруппа в G , содержащая G° . Тогда $N_{G_{F|\mathbb{Q}}}(H)$ содержится в группе $N_{G_{F|\mathbb{Q}}}(G)$ автоморфизмов поля F , сохраняющих подполе k , и присоединенное действие $N_{G_{F|\mathbb{Q}}}(H)$ на H индуцирует изоморфизм группы $N_{G_{F|\mathbb{Q}}}(H)$ на группу непрерывных открытых автоморфизмов H . Если $H \supseteq \ker \chi$, то $N_{G_{F|\mathbb{Q}}}(H) = N_{G_{F|\mathbb{Q}}}(G^\circ)$.

3. Общие свойства гладких представлений группы G и их реализации

Прежде чем обсуждать представления G , сделаем несколько общих замечаний о категории $\mathcal{S}m_H(E)$ гладких E -представлений произвольной вполне несвязной топологической группы H .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.0.1. Как известно (см., например, [31; доклад IV, §§ 2.4, 2.5] или [32; § 8.1, пример 8.15 (iii)]), гладкие H -множества и их H -эквивариантные отображения образуют топос.

Пусть $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(H, B)$ – категория, объекты которой – это элементы некоторой базы B открытых подгрупп группы H , и $\text{Hom}_{\mathfrak{T}}(U, V) = \{h \in H \mid hUh^{-1} \supseteq V\}/U$. Композиция определяется естественным образом. Снабдим $\mathfrak{T}$ максимальной топологией, т. е. будем считать покрывающими все решета. Тогда пучки множеств, групп и т. п. отождествляются с гладкими H -множествами, группами и т. п.: $\mathcal{F} \mapsto \varinjlim_{U \in B} \mathcal{F}(U)$ (это H -множество – гладкое, так как любой его элемент лежит в образе некоторого $\mathcal{F}(U)$, а действие U на нем тривиально по определению) и $W \mapsto (U \mapsto W^U)$.

Например, если $B = \{1\}$ (и, в частности, H дискретна), то в $\mathfrak{T}$ имеется ровно один объект $*$ и $\text{Hom}_{\mathfrak{T}}(*, *) = H$.

Пусть B – множество открытых подгрупп в G вида $G_{F|L}$ (где $L|k$ – расширение конечного типа) и $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(G, B)$. Тогда

$$\text{Hom}_{\mathfrak{T}}(G_{F|L}, G_{F|K}) = \{h \in G \mid h(L) \subseteq K\}/G_{F|L} = \{h: L \xrightarrow{/k} K\}$$

– множество вложений полей над k . Когда $n = \infty$, лемма 3.4.1 описывает гладкие G -множества как пучки на несколько ином сайте, в “доминантной топологии”.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.0.2. а) В категории $\mathcal{S}m_H(E)$ имеется достаточно много инъективных объектов. А именно, забывающий функтор $\mathcal{S}m_H(E) \rightarrow \text{Vec}_E$ допускает правый сопряженный I : для любого E -векторного пространства V определим $I(V)$ как гладкую часть модуля V -значных функций на H , т. е. $I(V) := \varinjlim_{U \in B} \text{Maps}(H/U, V)$.

Группа H действует на $I(V)$ сдвигами аргумента. Из полупростоты категории E -векторных пространств Vec_E следует инъективность $I(V)$. Если V – гладкий H -модуль, то имеется H -эквивариантное вложение $V \rightarrow I(V)$, $v \mapsto (h \mapsto hv)$.

б) Объекты $E[H/U]$, где $U \in B$, задают систему образующих категории $\mathcal{S}m_H(E)$, т. е. любое гладкое циклическое E -представление H является фактором представления $E[H/U]$ для некоторого $U \in B$. У представления $E[H/U]$ имеется не более $2^{\max(|H/U|, |E|)}$ факторов. Таким образом, у H имеется не более $\max(|B|, \sup_U 2^{\max(|H/U|, |E|)})$ циклических представлений. В случае $H = G$ получаем оценку $\leq 2^{\max(|k|, |E|)}$. Если H локально компактна и не унимодулярна, то имеется не менее $\max(2^{\text{rk}(\chi_H(H))}, |E|)$ неприводимых представлений. Например, если $n < \infty$, то в случае $H = G$ получаем оценку $\geq \max(2^{|N|}, |E|)$. Нижние оценки в случае $H = G$ приведены в предложении 3.5.2.

в) В категории $\mathcal{S}m_H(E)$ имеются прямые суммы, прямые произведения, тензорные произведения и внутренний функтор $\mathcal{H}om$. Это – гладкие части соответствующих функторов на Vec_E . А именно, прямое произведение семейства в $\mathcal{S}m_H(E)$ – это гладкая часть его теоретико-множественного прямого произведения, и

$$\mathcal{H}om(W_1, W_2) := \varinjlim_U \text{Hom}_{E[U]}(W_1, W_2),$$

где U пробегает открытые подгруппы в H . Функтор $\mathcal{H}om(W, -)$ сопряжен справа к функтору $- \otimes_E W$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}m_H(E)}(W_1 \otimes_E W, W_2) &= \operatorname{Hom}_{E[H]}(W_1 \otimes_E W, W_2) \\ &= \operatorname{Hom}_{E[H]}(W_1, \operatorname{Hom}_E(W, W_2)) = \operatorname{Hom}_{E[H]}(W_1, \mathcal{H}om(W, W_2)) \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}m_H(E)}(W_1, \mathcal{H}om(W, W_2)) \end{aligned}$$

для любых $W_1, W_2, W \in \mathcal{S}m_H(E)$.

г) Если $\varphi: H_2 \rightarrow H_1$ – гомоморфизм с плотным образом, то функтор обратного образа $\varphi^{-1}: \mathcal{S}m_{H_1} \rightarrow H_2\text{-mod}$ – вполне строгий. (*Доказательство.* Пусть $W_1, W_2 \in \mathcal{S}m_{H_1}$, $\alpha: \varphi^*W_1 \rightarrow \varphi^*W_2$ – H_2 -гомоморфизм, $v \in W_1$ и $\sigma \in H_1$. Пусть S – общий стабилизатор элементов v и $\alpha(v)$. Выберем некоторый элемент $\sigma' \in H_2 \cap \varphi^{-1}(\sigma S)$. Тогда $\alpha(\sigma v) = \alpha(\sigma' v) = \sigma' \alpha(v) = \sigma \alpha(v)$.)

Если φ непрерывен, то φ^{-1} пропускается через $\varphi^*: \mathcal{S}m_{H_1} \rightarrow \mathcal{S}m_{H_2}$.

Если гомоморфизм φ непрерывен и имеет плотный образ, то функтор φ^* допускает правый сопряженный $\varphi_*: W \mapsto \bigcup_U W^{U \times_{H_1} H_2}$, где U пробегает открытые подгруппы H_1 . В частности, φ^* сохраняет неприводимость. (*Доказательство.* Действие H_1 на φ_*W определяется так. Если $w \in W^{\varphi^{-1}(U)}$ и $\sigma \in H_1$, то $\sigma w := \sigma' w$, где $\sigma' \in H_2$ и $\varphi(\sigma') \in \sigma U$, что не зависит от σ' .)

ПРИМЕР 3.0.3. “Забывающий” функтор $\mathcal{S}m_G \rightarrow \mathfrak{G}\text{-mod}$ вполне строг, сохраняет неприводимость, пропускается через $r: \mathcal{S}m_G \rightarrow \mathcal{S}m_{\mathfrak{G}}$, и r допускает правый сопряженный: $W \mapsto \varinjlim_{L \twoheadrightarrow} W^G F|LL_m$, где L пробегает подполя конечного типа $F|k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.0.4. Если любая открытая подгруппа группы H содержит открытую подгруппу бесконечного индекса (например, $H = G$ при $n = \infty$), то в категории гладких представлений группы H нет ненулевых проективных объектов. (*Доказательство.* Пусть W – проективный объект в категории гладких E -представлений группы H . Выберем систему образующих $\{e_j\}_{j \in J}$ представления W . Это задаст сюръективный гомоморфизм $\bigoplus_{j \in J} E[H/\operatorname{Stab}_{e_j}] \xrightarrow{\pi} W$. Зафиксируем элемент $i_0 \in J$ и для каждого $j \in J$ зафиксируем открытую подгруппу U_j бесконечного индекса в $\operatorname{Stab}_{e_j} \cap \operatorname{Stab}_{e_{i_0}}$. Поскольку W проективен, композиция π с сюръекцией $\bigoplus_{j \in J} E[H/U_j] \rightarrow \bigoplus_{j \in J} E[H/\operatorname{Stab}_{e_j}]$ расщепляется, и, следовательно, существует элемент в $\bigoplus_{j \in J} E[H/U_j]$ с тем же стабилизатором, что и e_{i_0} . Однако, поскольку $E[H/U_j]^{\operatorname{Stab}_{e_{i_0}}} = 0$, отсюда следовало бы, что $e_{i_0} = 0$, а значит, $W = 0$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 3.0.5. а) Если H локально компактна (например, $H = \mathfrak{G}$ для любого $n \leq \infty$, см. п. 2.5), то категория $\mathcal{S}m_H(E)$ имеет достаточно много проективных объектов. А именно, любой гладкий H -модуль является фактором прямой суммы объектов вида $E[H/U]$ для некоторых открытых компактных подгрупп U группы H .

Однако G -модули $E[G/U]$ устроены очень сложно (см. п. 3.5). Кроме того (предложение 3.5.2), имеется “слишком много” ($\geq \max(2^{|N|}, |k|, |E|)$) гладких неприводимых представлений группы G для любого $1 \leq n \leq \infty$. Это – некоторые из причин изучать скорее категорию $\mathcal{S}_G$, см. стр. 92 (где есть надежда

на бóльшую контролируемость объектов, от которых ожидается, что они – “гомологической природы”, см. п. 1.1), чем $\mathcal{S}m_G(E)$.

б) Категория $\mathcal{A}dm_H(E)$ допустимых представлений любой вполне несвязной группы H замкнута относительно расширений и перехода к подобъектам в $\mathcal{S}m_H(E)$.

Если H локально компактна, то $\mathcal{A}dm_H(E)$ – подкатегория Серра в $\mathcal{S}m_H(E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.0.6. Теория представлений локально компактных групп во многом определяется теорией представлений алгебр Гекке. Пусть, однако, H произвольна.

Определим $\mathbb{D}_E(H) := \varprojlim_U E[H/U]$, где E – некоторое поле нулевой характеристики, а обратная система образована по отношению к проекциям $E[H/V] \xrightarrow{r_{VU}} E[H/U]$ и $H/V \rightarrow H/U$, индуцированным включениями $V \subset U$ открытых подгрупп H . Для любых $\nu \in \mathbb{D}_E(H)$, $\sigma \in H$ и открытой подгруппы U пусть $\nu(\sigma U)$ – коэффициент при $[\sigma U]$ в образе ν в $E[H/U]$.

Для каждого гладкого E -представления W группы H определим спаривание $\mathbb{D}_E(H) \times W \rightarrow W$ формулой $(\nu, w) \mapsto \sum_{\sigma \in H/U} \nu(\sigma U) \cdot \sigma w$, где U – произвольная открытая подгруппа стабилизатора элемента w , например, $U = \text{Stab}_w$. Ясно, что результат не зависит от выбора U . Это определяет на W структуру $\mathbb{D}_E(H)$ -модуля. Когда $W = E[H/U]$, это спаривание согласовано с проекциями r_{VU} , так что оно задает спаривание $\mathbb{D}_E(H) \times \varprojlim_U E[H/U] \rightarrow \varprojlim_U E[H/U] = \mathbb{D}_E(H)$, а значит, и ассоциативное умножение $\mathbb{D}_E(H) \times \mathbb{D}_E(H) \xrightarrow{*} \mathbb{D}_E(H)$, продолжающее свертку мер с компактным носителем. (*Носитель* ν – минимальное замкнутое подмножество S в полугруппе $\varprojlim_U H/U$ такое, что $\nu(\sigma U) = 0$ для σU , не пересекающего S .)

Алгеброй Гекке пары (H, U) , где U – компактная подгруппа в H , называется подалгебра $\mathcal{H}_E(H, U) := h_U * \mathbb{D}_E(H) * h_U$ в $\mathbb{D}_E(H)$ U -биинвариантных мер. Здесь h_U – мера Хаара на U , определенная системой $(h_U)_V = [U : U \cap V]^{-1} \sum_{\sigma \in U/U \cap V} [\sigma V] \in \mathbb{Q}[H/V]$ для всех открытых подгрупп $V \subset H$. Мера Хаара на U – единица алгебры $\mathcal{H}_E(H, U)$ и $h_U h_{U'} = h_U$ для замкнутой подгруппы $U' \subseteq U$. Для каждого гладкого E -представления W группы H алгебра Гекке $\mathcal{H}_E(H, U)$ действует на пространстве W^U , поскольку $W^U = h_U(W)$.

Когда H локально компактна, а U открыта и компактна, это определение алгебры Гекке эквивалентно обычному определению и для каждого гладкого E -представления W группы H алгебра Гекке действует на пространстве W^U обычным образом (см. [33]).

В случае $H = G$ и $n < \infty$ алгебры Гекке становятся алгебрами невырожденных соответствий на некоторых n -мерных многообразиях над k (см. п. 3.1, текст после леммы 3.1.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.0.7. Гладкие представления любой компактной группы полупросты. Пусть $U \subseteq H = G$ – компактная подгруппа, ρ – ненулевое гладкое неприводимое представление U над $\mathbb{Q}$ и $\sigma \in H$ – такой элемент, что $\sigma^{-1}H\sigma \subseteq H$. Определим представление ρ^σ группы U формулой $(\tau, u) \mapsto (\sigma^{-1}\tau\sigma)u$ для всех $\tau \in U$ и $u \in \rho$. Пусть W – гладкое представление G . Тогда кратность $m_W(\rho) \geq 0$, с которой ρ входит в W , равна $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hom}_U(\rho, W) / \dim_{\mathbb{Q}} \text{End}_U(\rho)$.

Она конечна, если W допустимо. Определим вложение $\text{Hom}_U(\rho, W) \hookrightarrow \text{Hom}_U(\rho^\sigma, W)$ формулой

$$\lambda \mapsto \sigma\lambda : \begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\sigma\lambda} & \sigma\lambda(u) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ (\sigma^{-1}\tau\sigma)u & \xrightarrow{\sigma\lambda} & \tau\sigma\lambda(u) \end{array}.$$

В частности, если $m_W(\rho) \neq 0$, то и $m_W(\rho^\sigma) \neq 0$. Ясно, что $\text{End}_U(\rho) \subseteq \text{End}_U(\rho^\sigma)$. Поэтому $m_W(\rho) = m_W(\rho^\sigma)$, если $\sigma^{-1}H\sigma = H$.

Заметим, что для любой пары компактных подгрупп $U_1, U_2 \subset G$ любая пара их гладких представлений сплетена в обычном смысле, т. е. существуют $g \in G$ и ненулевой $\varphi \in \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)$ такие, что если $gk_1 = k_2g$ и $k_i \in U_i$, $i \in \{1, 2\}$, то $\varphi\rho_1(k_1) = \rho_2(k_2)\varphi$. А именно, существует такой $g \in G$, что $\rho_1|_{U_1 \cap g^{-1}U_2g}$ и $\rho_2|_{U_2 \cap gU_1g^{-1}}$ тривиальны (если ρ_i конечной длины). Это объясняется тем, что представление F (а значит, и неприводимое представление F/k) группы G содержит все гладкие неприводимые (и значит, конечномерные) представления групп U_i (теорема 90 Гильберта). По-видимому, то же верно и для $F^\times/k^\times$.

В [7; приложение А, теорема А.4] показано, что для любой компактной подгруппы K в G центры алгебр Гекке $\mathcal{H}_E(K)$ и $\mathcal{H}_E(G^\circ, K)$ пар (G, K) и (G°, K) (определение G° см. в п.1.3) совпадают с $E \cdot h_K$, если $n < \infty$, т. е. состоят из скаляров. Это – отрицательные результаты, особенно в сравнении с аналогичными вопросами для p -адических групп.

В некоторых случаях группы морфизмов между геометрическими объектами отождествляются с группами морфизмов между соответствующими G -модулями (см. предложения 3.1.6 и 3.3.2 и следствие 3.1.7).

В [15] (см. следствие 3.4.9 ниже) установлена бесконечность когомологических размерностей категорий $\mathcal{S}m_G$ и $\mathcal{C}$ (гладких полулинейных представлений G) при $n = \infty$.

По аналогии с соответствиями Лэнглендса, можно называть неприводимые представления группы G в образе функтора $\mathfrak{B}^n$ *каскадными*, где $\mathfrak{B}^n$ – некоторый функтор на категории примитивных n -мотивов, определенный (в большей общности) в разделе 4. Для групп GL над локальными неархимедовыми полями имеется несколько эквивалентных определений квазикаскадных представлений. Одно из них (финитность): носители всех *матричных коэффициентов* гладкого представления W топологической группы (т. е. функций на этой группе вида $\langle \sigma w, \tilde{w} \rangle$ для некоторого вектора $w \in W$ и вектора с открытым стабилизатором $\tilde{w}$ в двойственном представлении) компактны по модулю центра. Однако в [7; предложение 4.6] показано, что при $n < \infty$ все финитные представления любой подгруппы в G , содержащей G° , – нулевые. Это выводится из неприводимости гладких представлений F/k и/или $F^\times/k^\times$ подгруппы G° группы G и их точности как модулей над соответствующими алгебрами мер на G : для любого $1 \leq n \leq \infty$ аннулятор F/k в $\mathbb{D}_k$ и аннулятор $F^\times/k^\times$ в $\mathbb{D}_\mathbb{Q}$ тривиальны [7; предложение 4.2].

В случае $n = \infty$ можно установить некоторые аналоги теоремы 90 Гильберта. В частности, как вытекает из следствия 3.4.8, любой гладкий G -торсор над

гладкой G -группой $B(F)$ тривиален для любой алгебраической k -группы B . Однако в случае $n < \infty$ имеются интересные примеры торсоров.

Согласно предложению 1.1.16, $\text{Ext}_{\mathcal{S}m_G(\mathbb{Q})}^1(A(F)/A(k), \mathbb{Q}) = \text{Hom}(A(k), \mathbb{Q})$, если $n = \infty$ и A – неприводимая коммутативная алгебраическая группа над k . Если A – абелево многообразие, то $A(F)/A(k) = \mathfrak{B}^1(A^\vee)$, где $A^\vee := \text{Pic}^\circ A$ – двойственное абелево многообразие, а $\mathfrak{B}^1$ – функтор на категории примитивных 1-мотивов, определенный (в большей общности) в разделе 4. Поэтому это равенство естественно сравнить с тождеством $\text{Ext}_{\mathcal{M}\mathcal{M}_k}^1(\mathbb{Q}(0), H_1(A)) = A(k)_\mathbb{Q}$ в категории смешанных мотивов над k .

Если $A = \mathbb{G}_m$, то тождество $\text{Ext}_{\mathcal{M}\mathcal{M}_k}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) = k^\times \otimes \mathbb{Q}$ подсказывает, что хотя гладкое представление $F^\times/k^\times$ группы G и не является допустимым, оно может иметь мотивную интерпретацию, аналогичную $\mathbb{Q}(1)$.

В п. 3.5 содержатся примеры пар различных расширений конечного типа L_1 и L_2 поля k с одними и теми же наборами неприводимых подфакторов $\text{JH}(L_1)$ и $\text{JH}(L_2)$ представлений $\mathbb{Q}[\{L_1 \xrightarrow{/k} F\}]$ и $\mathbb{Q}[\{L_2 \xrightarrow{/k} F\}]$. В двух из этих примеров примитивные мотивы максимального уровня моделей полей L_1 и L_2 тривиальны, а в еще одном $L_1 = k(X)$ и $L_2 = k(\mathbb{P}^{\dim X})$, где X – произведение двулистных (в общей точке) накрытий проективных пространств (например, гиперэллиптических кривых) над k , из которых хотя бы одно – кривая рода ≤ 1 . Не исключено поэтому, что $\text{JH}(L)$ зависит только от $\text{degtr}(L|k)$.

Прежде всего установим некоторое обобщение того факта, что у G нет конечномерных гладких представлений при $n = \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.0.8. Пусть $W \in \mathcal{S}m_G(E)$ и для некоторых подполей $\bar{L}_1 \subsetneq \bar{L}_2$ в $F|k$ подпространства $W^{G_{F|\bar{L}_1}}$ и $W^{G_{F|\bar{L}_2}}$ – конечномерные и ненулевые. Тогда $W^G = W^{G_{F|\bar{L}_1}} \neq 0$. В частности, если $n = \infty$ и $\dim_E W^{G_{F|\bar{L}}} < \infty$ для любого L достаточно большой конечной степени трансцендентности над k , то W тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление $W^{G_{F|\bar{L}_1}}$ группы $G_{\bar{L}_1|k}^\circ$ и представление $W^{G_{F|\bar{L}_2}}$ группы $G_{\bar{L}_2|k}^\circ$ тривиальны. Поэтому любой вектор $w \in W^{G_{F|\bar{L}_1}}$ неподвижен относительно действия подгруппы H в G , порожденной подгруппами $G_{F|\bar{L}_1}$ (в $G_{\{F, \bar{L}_1\}|k} \times_{G_{\bar{L}_1|k}} G_{\bar{L}_1|k}^\circ$) и $G_{\{F, \bar{L}_2\}|k} \times_{G_{\bar{L}_2|k}} G_{\bar{L}_2|k}^\circ$. Из леммы 2.2.6 следует, что эта подгруппа H совпадает с G .

3.1. Алгебры Гекке и соответствия. Пусть $\mathcal{H}_E(U) := \mathcal{H}_E(G, U) = h_U * \mathbb{D}_E * h_U$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.1. 1) Пусть H – вполне несвязная топологическая группа, а T – некоторое фильтрующее семейство ее компактных подгрупп, т.е. любая открытая подгруппа содержит элемент T . Тогда гладкое E -представление W группы H неприводимо (соответственно полупросто) тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}_E(H, U)$ -модуль W^U неприводим (соответственно полупрост) для каждой компактной подгруппы $U \in T$.

2) Пусть W_j для $j = 1, 2$ – гладкие неприводимые E -представления H и $W_1^U \neq 0$ для некоторой компактной подгруппы U . Тогда W_1 эквивалентно W_2 тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}_E(H, U)$ -модуль W_1^U эквивалентен W_2^U .

3) Для каждой открытой компактной подгруппы $U \subset H$ и каждого неприводимого E -представления τ алгебры $\mathcal{H}_E(H, U)$ существует гладкое неприводимое представление W группы H такое, что $\tau \cong W^U$.

Это предложение доказывается ровно так же, как предложение 2.10 в [33] и лемма 3.2 в [7].

Мы будем применять предложение 3.1.1 в ситуации, когда $H = G$ и T состоит из компактных подгрупп U с подполем инвариантов F^U , чисто несепарабельным над чисто трансцендентным расширением расширения k конечного типа.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.2. Было бы естественно условия полупростоты или неприводимости представлений алгебр Гекке из предложения 3.1.1 заменить соответствующими условиями на представления групп $G_{F'|k}$ для алгебраически замкнутых расширений $F'|k$ в F конечной степени трансцендентности. Для некоторого небольшого класса представлений это сделано в лемме 4.3.1. Следующая лемма – весьма предварительный шаг в общем направлении.

ЛЕММА 3.1.3 [15]. Пусть $n = \infty$, $\mathcal{H}$ – подкатегория в $\mathcal{S}m_G$, замкнутая относительно перехода к подобъектам, и $F'|k$ – алгебраически замкнутое расширение в F конечной степени трансцендентности. Следующие условия на подкатегорию $\mathcal{H}$ и F' эквивалентны:

- 1) для любого $W \in \mathcal{H}$ любой $G_{F'|k}$ -подмодуль $U \subseteq W^{G_{F|F'}}$ совпадает с $G_{F'|k}$ -подмодулем $G_{F|F'}$ -инвариантов в G -подмодуле, порожденном U : $U = \langle U \rangle_G^{G_{F|F'}}$;
- 2) для любого $W \in \mathcal{H}$ любая сюръекция $\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}]^N \rightarrow W$ в $\mathcal{S}m_G$ индуцирует сюръекцию $G_{F|F'}$ -инвариантов $\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F'\}]^N \rightarrow W^{G_{F|F'}}$ в $\mathcal{S}m_{F'|k}$, где $F' = \bar{L}$;
- 3) для любого расширения $L|k$ в F конечного типа, где $F' = \bar{L}$, и любого $Q \subseteq \mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}]^N$ такого, что фактор лежит в $\mathcal{H}$, имеется равенство $H_{\mathcal{S}m_G}^1(G_{F|F'}, Q) = 0$.

Для любого неприводимого k -многообразия Y с полем функций $k(Y) = F^U$ для некоторой компактной открытой подгруппы U в G можно отождествить алгебру Гекке $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(U)$ с $\mathbb{Q}$ -алгеброй невырожденных соответствий на Y (т. е. формальных линейных комбинаций n -подмногообразий в $Y \times_k Y$, доминантных над обоими множителями Y). Это вытекает из следующей леммы и того, что

- множество двойных классов смежности $U \backslash G / U$ можно отождествить с базисом $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(U)$ как $\mathbb{Q}$ -векторного пространства с помощью $[\sigma] \mapsto h_U * \sigma * h_U$;
- неприводимые n -подмногообразия в $Y \times_k Y$, доминантные над обоими множителями Y , находятся в естественной биекции с множеством максимальных идеалов алгебры $F^U \otimes_k F^U$.

ЛЕММА 3.1.4 [7; лемма 3.3]. Пусть $L, K \subseteq F$ – расширения поля k , причем $\deg \text{tr}(L|k) = q < \infty$. Тогда множество $G_{F|K} \backslash G / G_{F|L}$ двойных смежных классов канонически отождествляется с множеством всех точек $\mathbf{Spec}(L \otimes_k K)$

корузмерности $\geq q - \deg \text{tr}(F|K)$ (так что $G_{F|K} \backslash G/G_{F|L} = \mathbf{Max}(L \otimes_k K)$, если $F = \bar{K}$). Здесь $G/G_{F|L}$ – множество вложений поля L в F над k .

Пусть $A^q(Y)$ – фактор $\mathbb{Q}$ -векторного пространства $Z^q(Y)$ циклов на гладком собственном многообразии Y над k коразмерности q по $\mathbb{Q}$ -векторному подпространству $Z^q_{\sim}(Y)$ циклов, $\sim$ -эквивалентных нулю для некоторого адекватного отношения эквивалентности $\sim$. Согласно теореме Хиронаки о разрешении особенностей, каждое гладкое многообразие X допускает открытое вложение i в гладкое собственное многообразие $\bar{X}$ над k . Тогда $A^q(\cdot)$ можно продолжить на произвольное гладкое многообразие X как коядро отображения $Z^q_{\sim}(\bar{X}) \xrightarrow{i^*} Z^q(X)$, индуцированного ограничением циклов. Это не зависит от выбора многообразия $\bar{X}$.³

Стандартным образом, можно продолжить контравариантные функторы $A^q(\cdot)$ и $Z^q(\cdot)$ до контравариантных функторов на категории гладких промногообразий над k . А именно, если для некоторого множества индексов I обратная система $(X_j)_{j \in I}$ гладких многообразий над k образована по отношению к плоским морфизмам и X – ее предел, то $Z^q(X) = \varinjlim_{j \in I} Z^q(X_j)$, где индуктивная система образована по отношению к обратным образам, и аналогично для $A^q(\cdot)$. Тогда $A^q(X)$ – коядро отображения $\bigoplus_{j \in I} Z^q_{\sim}(\bar{X}_j) \rightarrow Z^q(X)$. Это не зависит от выбора проективной системы, определяющей X .

В частности, поскольку для любой коммутативной k -алгебры R схема $\mathbf{Spec}(R)$ – обратный предел некоторой системы k -многообразий, определено $A^q(R) := A^q(\mathbf{Spec}(R))$. Любой автоморфизм α k -алгебры R индуцирует морфизм системы $(X_j)_{j \in I}$, определяющей $\mathbf{Spec}(R)$, в систему $(\alpha^*(X_j))_{j \in I}$, канонически эквивалентную системе $(X_j)_{j \in I}$, и, следовательно, индуцирует автоморфизм $A^q(Y_R)$ для любой k -схемы Y . Это определяет контравариантный функтор из категории многообразий над k в категорию $\text{Aut}(R|k)$ -модулей.

В нашей ситуации X будет иметь вид Y_F для некоторой k -подсхемы Y в некотором многообразии над k .

Гомоморфизм алгебр $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(U) \rightarrow A^{\dim Y}(Y \times_k Y)$ сюръективен для любого гладкого проективного Y , где $k(Y) \subset F$ и $U = G_{F|k(Y)}$. Это видно из следующей “леммы о сдвиге”, примененной в случае $X_1 = X_2 = Y$ и $Z = X_1 \times_k X_2$ (и приводимой в форме, предложенной рецензентом).

ЛЕММА 3.1.5 [7; лемма 3.4]. Пусть $Z, X_1, \dots, X_r$ – неприводимые проективные многообразия над k , и пусть $Z \xrightarrow{p_j} X_j$ – сюръективные отображения. Пусть $q \geq \max_{1 \leq j \leq r} \dim X_j$ и $\alpha \subset Z$ – неприводимое подмногообразие размерности q . Тогда α рационально эквивалентен линейной комбинации некоторых неприводимых подмногообразий в Z , сюръективных (относительно отображений p_j) над всеми X_j .

³Поскольку любая пара гладких компактификаций $(\bar{X}, \bar{X}')$ многообразия X доминируется третьей $\bar{X} \xleftarrow{\beta} \bar{X}'' \xrightarrow{\beta'} \bar{X}'$, i^* пропускается через $Z^q_{\sim}(\bar{X}) \xrightarrow{\beta^*} Z^q_{\sim}(\bar{X}'') \xrightarrow{(i'')^*} Z^q(X)$ и $i^* Z^q_{\sim}(\bar{X}) = (i'')^* Z^q_{\sim}(\bar{X}'')$.

В частности, естественная проекция $Z^q(k(X) \otimes_k k(Y)) \rightarrow CH^q(X \times_k Y)$ сюръективна при $q \leq \dim X \leq \dim Y$, а $Z^q(k(Y) \otimes_k F) \rightarrow CH^q(Y_F)$ сюръективна при $q \leq \dim Y \leq n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.6. Пусть Y – гладкое неприводимое собственное многообразие над k и $\dim Y \leq n$. Пусть X – гладкое многообразие над k и W – фактор представления $A^q(X_F)$ группы G для некоторого $q \geq 0$. Тогда имеются канонические изоморфизмы $A^q(X_{k(Y)}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(A^{\dim Y}(Y_F), A^q(X_F))$ и $\text{Hom}_G(A^{\dim Y}(Y_F), W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(Z^{\dim Y}(k(Y) \otimes_k F), W)$.

Это предложение фактически не отличается от предложения 3.6 в [7]. Его доказательство использует леммы 3.1.4 и 3.1.5 и элементарную теорию пересечений.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.7 [7; следствие 3.7]. Для любого поля L' , конечно порожденного и степени трансцендентности $t \leq n$ над k , любого поля L , конечно порожденного над k , и любого целого $q \geq t$ имеется канонический изоморфизм $A^q(L \otimes_k L') \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(A^m(L' \otimes_k F), A^q(L \otimes_k F))$, где обе группы нулевые при $q > t$.

3.2. Инварианты подгрупп и тензорные произведения.

ЛЕММА 3.2.1. Пусть W – гладкое G -множество и L – расширение k в F . Тогда $W^{G_F|L} = \bigcup_{L_0 \subseteq L} W^{G_F|L_0}$, где L_0 пробегает расширения k конечного типа.

Доказательство идентично доказательству леммы 6.1 работы [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.2. Пусть E – или F , или любое поле характеристики нуль с тривиальным действием G и W_1, W_2 – гладкие полулинейные представления G над E . Предположим, что либо подгруппа $H \subseteq G$ не допускает нетривиальных конечномерных гладких полулинейных представлений над E , либо $\text{degtr}(F|k) = \infty$ и $H = G_{F|\bar{L}}$ для некоторого расширения $L \subset F$ поля k . Тогда имеется равенство $(W_1 \otimes_E W_2)^H = W_1^H \otimes_{E^H} W_2^H$.

“Обратно”, если $(W_1 \otimes_E W_2)^H = W_1^H \otimes_{E^H} W_2^H$ для некоторой подгруппы $H \subset G$, то поле F^H алгебраически замкнуто.

Если $\text{degtr}(F|k) < \infty$ и H имеет вид $G_{F|\bar{L}}$, то равенство $(W_1 \otimes_E W_2)^H = W_1^H \otimes_{E^H} W_2^H$, вообще говоря, не выполнено. А именно, если W_1 и W_2 – нетривиальные одномерные представления группы G , двойственные друг другу, то $(W_1 \otimes_E W_2)^G = E^G$, но $W_1^G = W_2^G = 0$.

Это предложение – небольшое обобщение леммы 7.5 работы [12], доказывається аналогично.

3.3. G - и G° -модули вида $A(F)/A(k)$, где A – коммутативная k -группа, морфизмы между ними и сепарабельное замыкание одномерного расширения k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.1. Если $n = 1$, то G° -орбита x порождает сепарабельное замыкание K_x поля $k(x)$ в F для любого $x \in F \setminus k$. Точнее, $K_x^\times/k^\times$ – неприводимый G° -модуль, а K_x/k – неприводимый G° -модуль при $\text{char}(k) \neq 2$.

G° -модули F/k и $F^\times/k^\times$ неприводимы, если характеристика k – нулевая или $2 \leq n \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [7; предложение 4.1] показано, что если A – подгруппа аддитивной группы поля F , порожденная G° -орбитой некоторого $x \in F \setminus k$, и характеристика k отлична от 2, то A – подполе в F . Кроме того, если M – подгруппа мультипликативной группы $F^\times$ поля F , порожденная G° -орбитой x , то $M \cup \{0\}$ – G° -инвариантное подполе в F .

Очевидно, что $A = M \cup \{0\} = F$ при $n \geq 2$. Если $n = 1$, то $\text{Gal}(F|\mathbb{Q}(G^\circ x))$ – компактная нормальная, т. е. – тривиальная (теорема 2.2.1), подгруппа в G° . Таким образом, расширение $F|\mathbb{Q}(G^\circ x)$ чисто несепарабельно.

Покажем, что $k(G^\circ x)$ – сепарабельное расширение поля $k(x)$. Другими словами, что если $\sigma^N x = x$ для некоторого $N \geq 1$, то $k(x, \sigma x)$ – сепарабельное расширение поля $k(x)$. Пусть $P(x, \sigma x)$ – минимальный многочлен. Тогда $P_I dx + P_{II} d(\sigma x) = 0 \in \Omega_{k(x, \sigma x)|k}^1$, где или $P_I \neq 0$, или $P_{II} \neq 0$, так как иначе $P = Q^p$ для другого многочлена Q . Если $P_{II} \neq 0$, то $k(x, \sigma x)$ – сепарабельное расширение поля $k(x)$. Если $P_I \neq 0$, то $k(x, \sigma x)$ – сепарабельное расширение поля $k(\sigma x)$ и, значит, $k(x, \sigma^{-1}x)$ – сепарабельное расширение поля $k(x)$. Тогда поле, порожденное над k элементами $x, \sigma^{-1}x, \dots, \sigma^{-(N-1)}x = \sigma x$, – сепарабельное расширение поля $k(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.2 [7; предложения 3.6, 4.3]. Пусть $1 \leq n \leq \infty$ и A и B – приведенные неприводимые групповые k -схемы и пусть $\text{Hom}(A, B)$ – множество гомоморфизмов групповых k -схем. Тогда естественное отображение $\text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_G(A(F), B(F))$, где Hom_G – G -гомоморфизмы, является биекцией.

Допустим, что k -группы A и B коммутативны и просты. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, B)_{\mathbb{Q}} &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(A(F)/A(k), B(F)/B(k)) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{G^\circ}(A(F)/A(k), B(F)/B(k)). \end{aligned}$$

Доказательство второй части состоит, к сожалению, из перебора случаев: A и B – простые абелевы многообразия, $\mathbb{G}_a$ или $\mathbb{G}_m$.

3.4. Доминантная топология, ацикличность некоторых из гладких представлений G и бесконечность когомологической размерности. (Основные результаты этого пункта взяты из [15].) В этом пункте мы отождествляем гладкие представления с абелевыми пучками на некотором “малом” сайте и интерпретируем гладкие когомологии (т. е. $\text{Ext}_{\mathcal{S}_{m_G}}^*(\mathbb{Q}, -)$) как когомологии Чеха пучков.

Мы будем считать, что $F|k$ – расширение алгебраически замкнутых полей нулевой характеристики счетной степени трансцендентности.

Пусть $\mathfrak{M}_k$ – категория гладких морфизмов гладких k -схем. Снабдим $\mathfrak{M}_k$ предтопологией, в которой покрытия – это доминантные морфизмы.

ЛЕММА 3.4.1. Категория пучков на $\mathfrak{M}_k$ эквивалентна категории гладких G -множеств.

Пучку сопоставляется его “общий слой”, т. е. $\lim_{U \rightarrow} \mathcal{F}(U)$, где U пробегает множество гладких целых k -многообразий с полем функций, вложенным в F над k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.2. Пусть степень трансцендентности расширения $F'|k$ в F бесконечна. Тогда $H_{\mathcal{S}m_G}^{>0}(G_{F|\overline{F}'}, W) = H_{\mathcal{S}m_G}^{>0}(G_{F|F'}, W \otimes \mathbb{Q}) = 0$ для любого гладкого G -модуля W .

Когомологии Чеха.

ЛЕММА 3.4.3. Комплекс $\cdots \rightarrow \mathbb{Q}[\{L(Y^2) \xrightarrow{/k} F\}] \rightarrow \mathbb{Q}[\{L(Y) \xrightarrow{/k} F\}] \rightarrow \mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}] \rightarrow 0$ ацикличесен для любого L -многообразия Y . Если $L = k$ и Y – гладкое собственное, то комплексы $\cdots \rightarrow C_{k(Y^2)} \rightarrow C_{k(Y)} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0$ и $\cdots \rightarrow CH_0(Y^2)_{\mathbb{Q}} \rightarrow CH_0(Y)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0$ также ацикличесны.

СЛЕДСТВИЕ 3.4.4. Для любого $W \in \mathcal{I}_G$ комплекс $0 \rightarrow W^G \rightarrow W^{G_{F|k(Y)}} \rightarrow W^{G_{F|k(Y^2)}} \rightarrow \cdots$ точен. В частности, $0 \rightarrow CH^q(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow CH^q(X_{k(Y)})_{\mathbb{Q}} \rightarrow CH^q(X_{k(Y^2)})_{\mathbb{Q}} \rightarrow \cdots$ точен.

Поскольку $\mathcal{I}$ точен справа, из леммы 3.4.3 получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.4.5. Отображение поля функций L многообразия над k в $\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}] \in \mathcal{S}m_G$ (соответственно в $C_L \in \mathcal{I}_G$) определяет пучок на $\mathfrak{D}t_k$ со значениями в $\mathcal{S}m_G^{\text{op}}$ (соответственно в $\mathcal{I}_G^{\text{op}}$).

Обозначим через $\check{H}^*$ когомологии Чеха.

СЛЕДСТВИЕ 3.4.6 [34; гл. III, следствие 2.5]. $\check{H}^*$ совпадает с H^* для любого пучка тогда и только тогда, когда $\check{H}^*$ переводит любую короткую точную последовательность пучков в длинную точную последовательность когомологий Чеха.

Для любого подполя K в $F|k$, над которым степень трансцендентности F бесконечна, зафиксируем базис трансцендентности $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} = \{x_1^{(\overline{K})}, x_2^{(\overline{K})}, x_3^{(\overline{K})}, \dots\}$ поля F над K .

Для каждого $m \geq 0$ положим $F_m = \overline{K(x_2^m, x_2^{m.3}, x_2^{m.5}, \dots)}$ и для каждого $j \geq 0$ зафиксируем вложение σ_j поля F в себя над $\overline{K}$ такое, что $\sigma_j|_{F_s} = \text{id}$, если $j > s$, и $\sigma_j|_{F_s} = \sigma_s|_{F_s} : F_s \xrightarrow{\sim} F_{s+1}$, если $j \leq s$. Для любого расширения L поля K зафиксируем $L_0 \subseteq F_0$, изоморфное над K полю L , и положим $L_s := \sigma_0^s(L_0)$.

Для G -модуля W положим

$$LW^\bullet := (W^{G_{F|L_0}} \xrightarrow{\sigma_0 - \sigma_1} W^{G_{F|L_0L_1}} \xrightarrow{\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2} W^{G_{F|L_0L_1L_2}} \rightarrow \cdots).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.7. $H_{\mathcal{S}m_G}^q(G_{F|K}, W) = H^q(F_K W^\bullet)$ для любого гладкого представления W группы G и любого алгебраически замкнутого расширения $K \supseteq k$ в F .

Ацикличесность “геометрических” G -модулей и когомологическая размерность категории $\mathcal{S}m_G$. Сопоставим предпучку $\mathcal{F}$ на $\mathfrak{D}t_k$ и фильтрованному объединению $\mathcal{O} = \varinjlim_U A$ конечно порожденных гладких k -подалгебр A гладкое $\text{Aut}(\mathcal{O}|k)$ -множество $\mathcal{F}(\mathcal{O}) := \varinjlim_A \mathcal{F}(\text{Spec}(A))$. В качестве $\mathcal{O}$ будут выступать F и $\mathcal{O}_v$.

Покажем, что $\mathcal{F}(F)^{G_{F|F'}} = \mathcal{F}(F')$ для любого $F' = \overline{F'} \subseteq F$ с $\deg_{\text{tr}}(F'|k) = \infty$. (Как показывает пример предпучка $\mathcal{F}: U \mapsto \Gamma(\overline{U}, \bigotimes_{\mathcal{O}}^2 \Omega_{\overline{U}/k}^1)$, условие $F' = \overline{F'}$ существенно.)

Зафиксируем изоморфизм $\alpha: F \xrightarrow{\sim} F'$ над k . Он индуцирует изоморфизм $\alpha^*: \lim_{U \rightarrow} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \lim_{V \rightarrow} \mathcal{F}(V)$, где $\mathcal{O}(U) \subset F$ и $\mathcal{O}(V) \subset F'$ пробегают гладкие k -подалгебры. Для любого U существует $\sigma \in G$ такое, что $\sigma|_{\mathcal{O}(U)} = \alpha|_{\mathcal{O}(U)}$, так что $\lim_{V \rightarrow} \mathcal{F}(V) = \lim_{(U, \sigma) \rightarrow} \sigma \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(F)^{G_{F|F'}}$, ср. с леммой 4.1.2.

Допустим, что для любых гладких многообразий X, Y и любой точки $x \in X(k)$ предпучок $\mathcal{F}$ снабжен преобразованиями $i_{X,Y}^x: \mathcal{F}(X \times_k Y) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ такими, что $i_{X,Y}^x \circ x \operatorname{pr}_Y^* = \operatorname{id}_{\mathcal{F}(Y)}$ и $i_{X,Y \times_k Z}^x \circ z \operatorname{pr}_{X \times_k Y}^* = z \operatorname{pr}_Y^* \circ i_{X,Y}^x$, где $x \operatorname{pr}_Y: X \times_k Y \rightarrow Y$ – проекция.

Пусть $\mathcal{R}$ – предпучок коммутативных колец и $\mathcal{F}$ – $\mathcal{R}$ -модуль. Тогда представление $\mathcal{F}(F)$ является $\mathcal{R}(F)$ -модулем и такие представления (для всевозможных $\mathcal{F}$ при фиксированном $\mathcal{R}$) образуют тензорную категорию по отношению к операции $\otimes_{\mathcal{R}(F)}$. В частности, категория представлений вида $\mathcal{F}(F)$ для $\mathcal{F}$ со значениями в коммутативных группах – тензорная.

СЛЕДСТВИЕ 3.4.8 [15]. $H_{\mathcal{F}_m}^{>0}(G, W) = 0$ для любого $W \in \mathcal{I}_G$; для любого $\mathcal{F}$ со значениями в группах множество $H_{\mathcal{F}_m}^1(G, \mathcal{F}(F))$ состоит из единственного элемента; $H_{\mathcal{F}_m}^{>0}(G, \mathcal{F}(F)) = 0$ для любого $\mathcal{F}$ со значениями в коммутативных группах.

Примеры представлений вида $\mathcal{F}(F)$ как в следствии 3.4.8 дают $A(F)$ для любого группового k -многообразия A , или $A(F)/A(k)$, если A коммутативно, $CH_0(X_F)_{\mathbb{Q}}$, $\Omega_{F|k, \text{per}}^{\bullet}$, $\bigotimes_F^{\bullet} \Omega_{F|k_0}^1$, $\Omega_{F|k_0, \text{замкн}}^{\bullet}$, $\Omega_{F|k_0, \text{точн}}^{\bullet}$ и $H_{\text{dR}/k_0}^{\bullet}(F)$ для любого $k_0 \subseteq k$. (Соответствующие функторы: $A(\mathcal{O})$, или $A(\mathcal{O})/A(k)$, $CH_0(X \times_k (-))_{\mathbb{Q}}$, $\Gamma(-, \Omega_{\mathcal{O}|k}^{\bullet})$, $\bigotimes_{\mathcal{O}}^{\bullet} \Omega_{\mathcal{O}|k_0}^1$, $\Omega_{\mathcal{O}|k_0, \text{замкн}}^{\bullet}$, $\Omega_{\mathcal{O}|k_0, \text{точн}}^{\bullet}$ и $H_{\text{dR}/k_0}^{\bullet}(\mathcal{O})$.)

СЛЕДСТВИЕ 3.4.9 [15]. 1) Категории $\mathcal{M}_G$ и $\mathcal{C}$ (см. п. 1.2) допускают системы ациклических образующих $\{\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}]\}_L$ и $\{F[\{L \xrightarrow{/k} F\}]\}_L$, где L – поля конечного типа над k , содержащие любое фиксированное расширение k конечного типа.

2) Когомологические размерности категорий $\mathcal{M}_G$ и $\mathcal{C}$ бесконечны.

$\mathbb{A}^1$ -инвариантность некоторых предпучков. Пусть $\mathcal{V}_k$ – некоторая категория многообразий над k , содержащая все гладкие многообразия. Пусть $\mathcal{L}$ – некоторая категория, в которой все вложения всех объектов в себя являются изоморфизмами (например, такая абелева категория, объекты которой исчерпываются подобъектами конечной длины, что для любого объекта кратности его неприводимых подфакторов конечны).

$\mathcal{L}$ -значный предпучок $\mathcal{F}$ на $\mathcal{V}_k$ называется $\mathbb{A}^1$ -инвариантным, если $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1)$ для любого $U \in \mathcal{V}_k$.

Рассмотрим любую предтопологию на $\mathcal{V}_k$ такую, что морфизмы k -схем $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \operatorname{Spec} k$, $(\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}) \amalg (\mathbb{A}_k^1 \setminus \{1\}) \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ и $\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$, $x \mapsto x^2$, являются покрытиями (в частности, $\mathcal{F}(\mathbb{A}_X^1) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{G}_{m,X})$ инъективно для любого $X \in \mathcal{V}_k$ и любого пучка на $\mathcal{V}_k$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.10 [15]. *Любой пучок $\mathcal{F}$ на $\mathcal{V}_k$ со значениями в $\mathcal{L}$ является $\mathbb{A}^1$ -инвариантным.*

Для доказательства нужно заметить, что фактор $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \setminus \Delta_{\mathbb{A}^1}$ по перестановке σ двух множителей $\mathbb{A}^1$ “более или менее” совпадает с $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ и, значит, $\mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1)$ вкладывается в $\mathfrak{S}_2$ -инвариантную часть $\mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1)$, т.е. σ действует тривиально. Поскольку $U \times \mathbb{A}^1 \rightarrow U$ – покрытие, $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2 \circ \sigma$ и $\mathcal{F}(U)$ – уравниватель инъекций $\mathrm{pr}_1^*, \mathrm{pr}_2^*: \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1) \rightrightarrows \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1)$, индуцированных проекциями, получаем, что $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U \times \mathbb{A}^1)$ – изоморфизм.

3.5. Представления, коиндуцированные с открытых подгрупп. В этом пункте мы приведем пример (в предложении 3.5.3) пары существенно различных открытых компактных подгрупп U и U' в G таких, что имеются вложения E -представлений $E[G/U] \hookrightarrow E[G/U']$ и $E[G/U'] \hookrightarrow E[G/U]$ группы G . Из этого следует, что неприводимые подфакторы $E[G/U]$ и $E[G/U']$ – одни и те же. В этом примере примитивные мотивы максимального уровня моделей полей F^U и $F^{U'}$ совпадают (и зануляются). Однако, как показывает пример предложения 3.5.4, совпадение неприводимых подфакторов – явление довольно общего характера.

Но сделаем сначала несколько общих замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.1. (i) Если $U \subset U' \subset H$ – подгруппы и индекс U в U' конечен, то имеется естественное вложение $E[H/U'] \hookrightarrow E[H/U]$, заданное формулой $[u] \mapsto \sum_{h \in H/U, hU' = uU'} [h]$.

(ii) *Представления группы G/G° .* Пусть E – произвольное поле и U – компактная открытая подгруппа в G . Тогда имеется сюръекция E -представления $E[G/U]$ группы G на любое неприводимое E -представление группы G , пропускающееся через фактор G/G° .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.2. Пусть $1 \leq n \leq \infty$, $F'|k$ – алгебраически замкнутое расширение в F конечной степени трансцендентности и φ – гладкое неприводимое E -представление группы $G_{F'|k}$. Пусть W – любой неприводимый фактор (циклического, порожденного любым ненулевым элементом из $V^{G_{F|F'}} = [\mathrm{id}] \otimes \varphi$) представления $V := E[G/G_{F|F'}] \otimes_{E[G_{F'|k}]} \varphi$. Тогда в $W^{G_{F|F'}}$ имеется не более $\max(|k|, |E|)$ неприводимых подпредставлений группы $G_{F'|k}$, одно из которых – φ .

Группа G имеет не менее $|k|$ допустимых неприводимых представлений. Если k и E счетны, то гладких неприводимых представлений группы G ровно $2^{|N|}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что только одномерных над E представлений группы $G_{F'|k}$, которые пропускаются через модуль группы $G_{F'|k}$, имеется ровно $|\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_+^\times, E^\times)| = \max(2^{|N|}, |E|)$ штук. Для каждого φ выберем $W =: W_\varphi$. Скажем, что $\varphi \sim \psi$, если $W_\varphi \cong W_\psi$. Поскольку $|W^{G_{F|F'}}| \leq |W| = \max(|k|, |E|)$, классы эквивалентности имеют мощность, не превосходящую $\max(|k|, |E|)$. Поэтому $|\{\varphi\}/\sim| \geq \max(2^{|N|}, |E|)$, если это $> \max(|k|, |E|)$, т.е. если $2^{|N|} > |k|$ и $2^{|N|} > |E|$. В любом случае имеется $|k|$ гладких неприводимых представлений группы G вида $(A(F)/A(k)) \otimes E$, где A – эллиптическая кривая над k без комплексного умножения.

(iii) *Подкрутки одномерными представлениями.* Пусть $n < \infty$ и φ – гомоморфизм из G/G° в $\mathbb{Q}^\times$. Рассмотрим $E[G/U](\varphi)$ как то же E -векторное пространство, что и $E[G/U]$, но с действием G по формуле $[\sigma] \xrightarrow{\tau} \varphi(\tau) \cdot [\tau\sigma]$. Тогда $\lambda_\varphi([\sigma]) := \varphi(\sigma) \cdot [\sigma]$ задает изоморфизм представлений $E[G/U] \xrightarrow{\lambda_\varphi} E[G/U](\varphi)$ группы G .

Из этого следует, что для любого неприводимого E -представления W группы G кратности W и $W(\varphi)$ в $E[G/U]$ совпадают. Однако, скорее всего, эти кратности бесконечны.

Например, пусть L – расширение k конечного типа и степени трансцендентности q в F . Тогда, по крайней мере если выполняются некоторые гипотезы, любой мотивный G -модуль уровня $< q$ является подфактором $\mathbb{Q}[G/G_{F|L}]$ бесконечной кратности. Чтобы это увидеть, зафиксируем базис трансцендентности $x_1, \dots, x_q$ поля L над k . Тогда имеется сюръекция $\mathbb{Q}[G/G_{F|L}] \rightarrow \Omega_{F|k}^s$, заданная формулой $[1] \mapsto x_{s+1}dx_1 \wedge \dots \wedge dx_s$ для любого $s < q$. Любой мотивный G -модуль уровня s является подмодулем $\Omega_{F|k}^s$ бесконечной кратности.

Чисто трансцендентные расширения квадратичных расширений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.3 [7; следствие 7.3]. Пусть $L'' \subset F$ – подполе, конечно порожденное над k , и $F \neq L''$. Для некоторого $u \in \sqrt{(L'')^\times} \setminus (L'')^\times$ и некоторого $t \in F$, трансцендентного над L'' , положим $L = L''(u, T)$, где $T = (2t - u)^2$, и $L' = L''(t)$. Тогда для $U = G_{F|L}$ и $U' = G_{F|L'}$ существуют вложения $E[G/U'] \hookrightarrow E[G/U]$ и $E[G/U] \hookrightarrow E[G/U']$.

Это вытекает из следующего комбинаторного утверждения [7; лемма 7.2].

Пусть H – группа, а U и U' – такие подгруппы H , что индекс $U \cap U'$ в U равен двум: $U = (U \cap U') \cup \sigma(U \cap U')$. Предположим, что $\tau_1 \cdots \tau_N \neq 1$ для любого целого $N \geq 1$ и любого набора $\tau_1, \dots, \tau_N \in U'\sigma \setminus U$. Тогда морфизм E -представлений $E[H/U] \xrightarrow{[\xi] \mapsto [\xi\sigma] + [\xi]} E[H/U']$ группы H инъективен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.4 [7; предложение 7.4]. Зафиксируем нечетное целое $m \geq 1$, и пусть $m - 1 \leq n \leq \infty$. Зафиксируем набор $x_1, \dots, x_m$ элементов F с единственным соотношением $\sum_{j=1}^m x_j^d = 1$ над k , где $d \in \{m+1, m+2\}$. Положим $L'' = k(x_1, \dots, x_m)$ и $L = (L'')^{\langle e_1 e_2^2 \cdots e_m^m \rangle}$, где $e_i x_j = \zeta^{\delta_{ij}} \cdot x_j$ для примитивного d -го корня из единицы ζ . Пусть L' – максимальное чисто трансцендентное расширение k в L . Тогда если $U = G_{F|L}$ и $U' = G_{F|L'}$, то E -представления $E[G/U]$ и $E[G/U']$ группы G имеют одни и те же неприводимые подфакторы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.5. Пусть $g_1, \dots, g_N$ – рациональные инволюции k -многообразия X , которые порождают бесконечную группу. Тогда естественное отображение E -представлений $r: E[\{k(X) \xrightarrow{/k} F\}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^N E[\{k(X)^{\langle g_j \rangle} \xrightarrow{/k} F\}]$ группы G инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ненулевой 0-цикл α лежит в ядре r и P – точка в носителе α , то носитель α содержит $\langle g_1, \dots, g_N \rangle$ -орбиту точки P . Поскольку эта орбита бесконечна, а носитель α конечен, получаем противоречие, т. е. $\alpha = 0$.

ПРИМЕР 3.5.6. (i) Пусть X – алгебраическая k -группа, $g_1: x \mapsto x^{-1}$ и $g_2: x \mapsto h \cdot x^{-1}$, где $h \in X(k)$ – точка бесконечного порядка. Тогда E -представления $E[\{k(X) \xrightarrow{/k} F\}]$ и $E[\{k(K(X)) \xrightarrow{/k} F\}]$ группы G имеют одни и те же неприводимые подфакторы, где $K(X)$ – фактор X по инволюции g_1 (многообразие Куммера).

(ii) Если Y_j – двулистные в общей точке накрытия проективных пространств над k , из которых хотя бы одно, например Y_1 , – кривая рода ≤ 1 , то имеются вложения

$$\begin{aligned} E\left[\left\{k\left(\prod_{j=1}^N Y_j\right) \xrightarrow{/k} F\right\}\right] &\hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^N E\left[\left\{k\left(\prod_{1 \leq j \leq N, j \neq i} Y_j\right)(\mathbb{P}^{d_i}) \xrightarrow{/k} F\right\}\right]^{1+\delta_{1i}} \\ &\hookrightarrow E[\{k(\mathbb{P}^d) \xrightarrow{/k} F\}]^{N+1}, \end{aligned}$$

где $d_i = \dim Y_i$ и $d = \sum_{j=1}^N d_j$.

4. Гомотопически инвариантные представления группы G

В этом разделе продолжено описание абелевой категории $\mathcal{I}_G$ (см. п. 1.1).

Категория $\mathcal{I}_G$ замкнута относительно перехода к подфакторам в $\mathcal{S}m_G$ (лемма 4.1.1). При $n = \infty$ это – подкатегория Серра в $\mathcal{S}m_G$ (теорема 1.1.10, 1),⁴ замкнутая относительно внутреннего функтора $\mathcal{H}om$ на $\mathcal{S}m_G$ (предложение 4.1.14). Из леммы 3.4.1 и предложения 3.4.10 следует, что $\mathcal{I}_G(E)$ содержит категорию $\mathcal{A}dm_G(E)$ допустимых представлений G (теорема 1.1.10, 2), если $n = \infty$. Прямое (но такое же по сути) доказательство приводится в [7; предложение 6.4].

Функтор включения $\mathcal{I}_G \hookrightarrow \mathcal{S}m_G$ допускает левый сопряженный

$$\mathcal{I} = \left(\lim_{\longleftarrow L} C_L\right) \otimes_{\mathbb{D}\mathbb{Q}}: \mathcal{S}m_G \rightarrow \mathcal{I}_G,$$

см. п. 4.6, так что любой морфизм из $W \in \mathcal{S}m_G$ в объект $\mathcal{I}_G$ пропускается через $\mathcal{I}W \in \mathcal{I}_G$ (предложение 4.1.3).

В случае $n = \infty$ в категории $\mathcal{S}m_G$ нет ненулевых проективных объектов (замечание на с. 119). В отличие от категории $\mathcal{S}m_G$, в категории $\mathcal{I}_G$ достаточно много проективных объектов (теорема 1.1.10, 4)). А именно, объекты $C_L := \mathcal{I}\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}]$ для всех расширений полей конечного типа $L|k$ задают систему проективных образующих категории $\mathcal{I}_G$. Пучок $X \mapsto C_{k(X)}$ на $\mathfrak{D}m_k$ со значениями в $\mathcal{I}_G^{\text{op}}$ (следствие 3.4.5) $\mathbb{A}^1$ -инвариантен (лемма 4.1.10).

Для любого гладкого неприводимого собственного многообразия X над k имеется естественная сюръекция $C_{k(X)} \rightarrow CH_0(X \times_k F)_{\mathbb{Q}}$. Первая часть гипотезы 1.1.11 утверждает, что это – изоморфизм при $n = \infty$. Если X – кривая, то это проверено в предложении 4.1.11. С этой гипотезой связано существование тензорной структуры на $\mathcal{I}_G$, см. замечание 1.1.12, (iii).

⁴При $n < \infty$ имеются нетривиальные расширения $\mathbb{Q}$ при помощи $\mathbb{Q}$, т. е. категория $\mathcal{I}_G$ не замкнута относительно расширений в $\mathcal{S}m_G$.

По всей видимости, категорию смешанных мотивов можно связать с некоторой полной подкатегорией в категории гладких G -модулей, объекты которой имеют “мотивные” неприводимые подфакторы. Так, по аналогии с теорией Ходжа, предположено (гипотеза 4.1.7), что присоединенные факторы фильтрации уровня $N_\bullet$ полупросты для любого объекта $\mathcal{S}_G$. Из этого нетрудно вывести (следствие 4.1.8), что фильтрация уровня $N_\bullet$ строго совместима с морфизмами в $\mathcal{S}_G$. В частности, расширения G -модулей из $\mathcal{S}_G$ меньшего уровня неприводимыми G -модулями из $\mathcal{S}_G$ большего уровня (канонически) расщеплены. В свою очередь, гипотеза 4.1.7 следует из первой части гипотезы 1.1.11 и “мотивных” гипотез, см. замечание 1.1.12, (ii).

Хотелось бы расширить категорию $\mathcal{S}_G$, чтобы рассматривать такие G -модули, как $F^\times/k^\times$, и продолжить фильтрацию $N_\bullet$ на $\mathcal{S}_G$ до некоторой “весовой фильтрации” так, чтобы свойство строгой совместимости с морфизмами сохранилось.

Заметим, что фильтрация $N_\bullet$ на гладких G -модулях не является строго совместимой с морфизмами. Например, любой неприводимый допустимый G -модуль уровня 1 (соответствующий некоторому абелевому многообразию) допускает нетривиальное расширение неприводимым G -модулем $F^\times/k^\times$ (который также уровня 1), см. контрпример после предложения 1.1.18.

Как правило, вес неприводимого объекта W_1 больше веса неприводимого объекта W_2 , если $\text{Ext}^1(W_1, W_2) \neq 0$, и, следовательно, $\text{вес}(\mathbb{Q}) < \text{вес}(F^\times/k^\times) < \text{вес}(A(F)/A(k))$ для любого абелева многообразия A над k . Если веса согласованы с мотивными весами и $A(F)/A(k)$ соответствует мотиву $H_1(A)$ веса 1, то вес представления $F^\times/k^\times$ оказывается натуральным числом, меньшим единицы. Вариантом решения этой проблемы могла бы стать градуировка ранга > 1 .

Эта большая категория должна допускать функтор двойственности, которого нет в случае категории $\mathcal{S}_G$.

Резюмируем следующим образом основные результаты п. 4.3, помимо упомянутых в п. 1.1.

ТЕОРЕМА 4.0.1. 1) Для любых $1 \leq n \leq \infty$ и $q \geq 0$ имеется функтор $\mathfrak{B}^q$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{чистые примитивные} \\ q\text{-мотивы над } k \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathfrak{B}^q} \left\{ \begin{array}{l} \text{полупростые допустимые } G\text{-модули} \\ \text{конечного типа и уровня } q \end{array} \right\},$$

вполне строгий при $q \leq n$. (Под уровнем G -модуля W понимается такое q , что $N_q W = W$ и $N_{q-1} W = 0$ для фильтрации $N_\bullet$, определенной после теоремы 1.1.10.)

2) Если $n < \infty$, то на G -модуле $\mathfrak{B}^n(M)$ имеется билинейная симметрическая невырожденная G -эквивариантная форма со значениями в ориентированном G -модуле $\mathbb{Q}(\chi)$ степени 1, где $M = (X, \Delta_{k(X)})$ – максимальный примитивный n -подмотив мотива (X, Δ_X) и $\dim X = n$.

Эта форма определена, если для $(n-1)$ -циклов на $2n$ -мерных комплексных многообразиях численная эквивалентность совпадает с гомологической (например, при $n \leq 2$) и, следовательно, $\mathfrak{B}^n$ пропускается через подкатегорию “поляризуемых” G -модулей (т.е. допускающих положительную форму как выше).

Эта теорема прямо вытекает из следствия 3.1.7 и предложений 4.3.2, 4.3.12 и 4.3.14. Грубо говоря, функтор $\mathfrak{B}^q$ определен как пространство 0-циклов над F по модулю “численной эквивалентности над k ”. Подробности см. в п. 4.3, с. 141, где показано, что он пропредставим. Из предложения 4.3.9 следует, что $\mathfrak{B}^q((X, \pi))$ зависит только от класса бирациональной эквивалентности X . Более того, из предложения 3.3.2 следует, что композиция функтора $\mathfrak{B}^1$ с забывающим функтором в категорию G° -модулей также вполне строга, и функтор $\mathfrak{B}^1$ из теоремы 4.0.1, 1) – эквивалентность категорий при $n = \infty$, см. п. 4.1.

Гипотеза 1.1.7 допускает следующую форму, удобную для проверки в частных случаях.

ГИПОТЕЗА 4.0.2. *Для любого $q \geq 0$ функтор $\mathfrak{B}^q$ задает эквивалентность категорий при $n = \infty$.*

Можно показать, что если $U \neq 0$ – фактор $F^\times$, то функтор $U \otimes: \mathcal{I}_G \rightarrow \mathcal{M}_G$ – вполне строгий. Поэтому помимо $\mathbb{B}^\bullet$ существуют другие вполне строгие функторы из категории чистых мотивов в категорию гладких градуированных представлений G , см. также лемму 1.2.6. Однако эти функторы не сохраняют неприводимость.⁵

Имеются указания на то, что категория примитивных n -мотивов “недалека” от категории поляризуемых (в смысле теоремы 4.0.1, 2)) G -модулей (по крайней мере, если $n \leq 2$). Так, обращение в нуль неподвижных (относительно компактной подгруппы) подпространств в поляризуемых G -представлениях $G_{F|L(x)}$ (здесь $L|k$ – подрасширение в F и x – такой элемент поля F , трансцендентный над L , что $F = \overline{L(x)}$) соответствует тривиальности примитивных n -подмотивов мотива $(Y \times \mathbb{P}^1, \pi)$, где $\dim Y < n$. Однако необходимо наложить дополнительные условия, поскольку из предложения 3.3.2 и полной строгости функтора $\mathfrak{B}^1$ нетрудно вывести, что для любого G -модуля W существует не более одного характера ψ такого, что $W(\psi) \cong \mathfrak{B}^1(M)$ для чистого 1-мотива M (см. [7; следствие 4.5]), а подкрутки поляризуемых G -модулей характеристиками группы G порядка 2 также поляризуемы.

Возможные связи со смешанными мотивами. Несколько теорий когомологий алгебраических многообразий связаны изоморфизмами сравнения и ведут себя параллельным образом. Это подвело А. Гротендика, П. Делиня, А. А. Бейлинсона и др. к гипотезе о существовании универсальной теории когомологий – со значениями в абелевой категории смешанных мотивов – и о тождествах между группами расширений между этими когомологическими объектами и K -группами. Ссылками для этого круга идей являются, например, [8], [35].

⁵ $W \otimes U$ неприводимо, только если U неприводимо и $W \not\cong U$. Поэтому, если $U \neq 0$ – фактор $A(F)$ для некоторой коммутативной k -группы A , то можно считать, что A – простая k -группа и не абелево многообразие, т. е. или $\mathbb{G}_m$, или $\mathbb{G}_a$, и что $U = A(F)/A(k)$. Если $W = E(F)/E(k)$ для некоторой эллиптической кривой E над k , то морфизм $W \otimes U \xrightarrow{\omega \wedge \eta} \Omega_{F|k}^2$, где ω – ненулевая регулярная 1-форма на E , а η – ненулевая инвариантная 1-форма на A , – ненулевой и не инъективен, т. е. $W \otimes U$ приводимо.

Для гладких проективных многообразий эта теория задается мотивами Гротендика, но только при условии, что численная эквивалентность совпадает с гомологической.

В. А. Воеводский, М. Левин и М. Ханамура (см. [36]–[38]) определили триангулированные категории, которые, как ожидается, должны быть эквивалентны производной категории смешанных мотивов. Основная трудность состоит в построении t -структуры, сердцевиной которой была бы искомая абелева категория смешанных мотивов. Это можно было бы сделать, если бы были доказаны “стандартные” гипотезы (в том числе гипотезы Бейлинсона), см. [10].

Другой подход, Делиня и Яннсена (см. [39]), состоит в рассмотрении согласованных наборов “реализаций”. Здесь трудности связаны с недоказанностью гипотез Ходжа и Тэйта.

Как упоминалось в п. 1.1, с данной теорией когомологий H^* можно связать G -модуль $H_c^*(F) := \varinjlim H^*(Y)/N^1 H^*(Y)$, где Y пробегает все гладкие собственные неприводимые многообразия над k с полями функций, вложенными в F , и $N^\bullet$ – фильтрация коуровня. Ясно, что $H_c^*(F) \in \mathcal{S}_G$ и $H_c^*(F) \in \mathcal{A}dm_G(E)$, если $H^*(k)$ – конечномерное E -векторное пространство. Тогда (в предположении, что численная эквивалентность совпадает с гомологической) $H_c^*(F)$ – полупростой G -модуль, допускающий разложение $H_c^*(F) \cong \bigoplus_M H^*(M) \otimes_{\text{End}(M)} \mathbb{B}(M)$, где M пробегает классы изоморфизма неприводимых примитивных мотивов (как в предложении 1.1.18). Отсюда следует, что, в обозначениях п. 4.3, $H^*(N) \cong \bigoplus_i \text{Hom}_G(\mathbb{B}^{[i]}(N), H_c^*(F))$ для любого мотива N . Таким образом, функтор реализации (на категории чистых мотивов над k), соответствующий теории H^* , разлагается в композицию функтора $\mathbb{B}^\bullet$ и (контравариантного) функтора $\text{Hom}_G(-, H_c^*(F))$ (на категории G -модулей).

4.1. Категория $\mathcal{S}_G$, фильтрация $N_\bullet$ и дифференциальные формы.

ЛЕММА 4.1.1 [7; лемма 6.6]. *Функтор $H^0(G_{F|L}, -): \mathcal{S}_G \rightarrow \mathcal{V}ect_{\mathbb{Q}}$ точен для любого расширения L поля k в F . Подкатегория $\mathcal{S}_G$ замкнута относительно взятия подфакторов в $\mathcal{S}m_G$.*

Для каждого целого $q \geq 0$ пусть $\mathcal{S}_G^q$ – полная подкатегория в $\mathcal{S}_G$ с такими объектами W , что $W^{G_{F|F'}} = 0$ для любого алгебраически замкнутого F' с $\degtr(F'|k) = q - 1$. Тогда $\{\mathcal{S}_G^q\}_{q \geq 0}$ – убывающая фильтрация категории $\mathcal{S}_G$ подкатегориями Серра.⁶

Отсюда следует, что $\mathcal{A}dm_G(E)$ – (абелева) подкатегория Серра в $\mathcal{S}m_G(E)$ [7; следствие 6.5].

ЛЕММА 4.1.2 [7; лемма 6.7]. *Если $F'|k$ – расширение в F бесконечной степени трансцендентности, то функтор $H^0(G_{F|\overline{F'}}, -)$ из $\mathcal{S}m_G$ в $\mathcal{S}m_{G_{\overline{F'}|k}}$ задает эквивалентность категорий (индуцирующую эквивалентность $\mathcal{S}_G$ и $\mathcal{S}_{G_{\overline{F'}|k}}$). Функтор $H^0(G_{F|K}, -)$ из $\mathcal{S}m_G$ в $\mathcal{V}ect_{\mathbb{Q}}$ точен тогда и только тогда, когда $\degtr(K|k) = \degtr(F|k) (\leq \infty)$.*

Доказательство использует изоморфизм полей $F \xrightarrow{\sim} \overline{F'}$, тождественный на k .

⁶Полная подкатегория абелевой категории $\mathcal{B}$ называется подкатегорией Серра, если она замкнута относительно взятия подфакторов и расширений в $\mathcal{B}$.

Функтор $\mathcal{I}$. Фильтрация уровня $N_\bullet$ на G -модуле M была определена на с. 93. Эквивалентно, $N_j M$ – минимальное подпредставление группы G в M , содержащее $M^{G|F_j}$ для некоторого алгебраически замкнутого $F_j \subseteq F$. Ясно, что $N_\bullet$ – функториальная (ограничение на $N_j M$ каждого G -гомоморфизма $M \rightarrow M'$ пропускается через $N_j M'$), неотрицательная, возрастающая ($N_j M \subseteq N_{j+1} M$), мультипликативная (по отношению к тензорным произведениям: $N_{i+j}(M_1 \otimes M_2) \supseteq N_i M_1 \otimes N_j M_2$) фильтрация, исчерпывающая на гладких представлениях ($M = \bigcup_{j \geq 0} N_j M$, если M – гладкое).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.3 [7; предложение 6.8]. Для любого целого $q \geq 0$ любой объект $W \in \mathcal{S}m_G$ допускает такой фактор $\mathcal{I}^q W \in \mathcal{I}_G^q$, что любой G -гомоморфизм из W в любой объект $\mathcal{I}_G^q$ пропускается через $\mathcal{I}^q W$. Функтор $\mathcal{S}m_G \xrightarrow{\mathcal{I}^q} \mathcal{I}_G^q$, заданный $W \mapsto \mathcal{I}^q W$, точен справа и

$$\mathcal{I}^q W = \mathcal{I}W / N_{q-1} \mathcal{I}W.$$

Существование функторов $\mathcal{I}^q$ можно вывести из общекатегорных фактов, см. [40; § 5.8], однако в [7] они строятся “явно”, что позволяет увидеть следующую связь образующих категории $\mathcal{I}_G$ с группами Чжоу 0-циклов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.4 [7; предложение 6.17]. Если $n = \infty$, то для любого неприводимого многообразия X над k ядро проекции $\mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{f_k} F\}] \rightarrow C_{k(X)} -$ сумма по всем кривым $y \in (k(X) \otimes_k F)_1$ подпространств, натянутых на те линейные комбинации общих (по отношению к некоторому полю определения кривых y) F -точек кривых $\overline{\{y\}}$, которые линейно эквивалентны нулю на любой компактификации $\overline{\{y\}}$.

ПРИМЕР 4.1.5. Пусть A – одномерная групповая схема над k , $m \geq 1$ – целое и $W = N_q W$ – гладкое представление группы G , где $q \leq n - 1$. Тогда $\mathcal{I}(S^m A(F) \otimes W) = 0$ в следующих трех случаях: или если m четно, или если $A = \mathbb{G}_a$, или если $A = \mathbb{G}_m$. В частности, естественная проекция $A(F)_{\mathbb{Q}}^{\otimes N} \rightarrow \bigwedge_{\text{End}_{\mathbb{Q}} A}^N A(F)_{\mathbb{Q}}$ индуцирует изоморфизм $\mathcal{I}(A(F)_{\mathbb{Q}}^{\otimes N}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(\bigwedge_{\text{End}_{\mathbb{Q}} A}^N A(F)_{\mathbb{Q}})$, если $n \geq N - 1$. (Если $\text{End } A = \mathbb{Z}$, то это проверено в [7; с. 204]; общий случай аналогичен.)

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.6. Функтор $\mathcal{I}$ не является точным слева. Например, он преобразует вложение $k \hookrightarrow F$ в $k \rightarrow 0$.

ГИПОТЕЗА 4.1.7. Если $n = \infty$, то для любого $j \geq 0$ и любого объекта W категории $\mathcal{I}_G$ представление $\text{gr}_j^N W$ группы G полупросто.

Это очевидно в случае $j = 0$ и легко выводится из следствия 4.1.12 в случае $j = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1.8. Предположим, что $n = \infty$ и гипотеза 4.1.7 верна для любого $0 \leq j \leq q - 1$. Пусть $L|k$ – расширение полей конечного типа и $\deg \text{tr}(L|k) < q$. Тогда:

- функтор $\mathcal{I}^q$ точен на $\mathcal{I}_G$ (что эквивалентно строгой совместимости фильтрации $N_0 \subseteq \dots \subseteq N_{q-1}$ с морфизмами в $\mathcal{I}_G$);

– алгебра $A = CH^s(\mathrm{Spec}(L \otimes_k L))$, где $s = \mathrm{degtr}(L|k)$, полупроста и длина ее конечна⁷.

Первая часть этого следствия доказана в [7; следствие 6.10], а вторая очевидна из формулы $A = \mathrm{End}_G(W)$, где $W := CH^s(\mathrm{Spec}(L \otimes_k F)) = \mathrm{gr}_s^N W$ полупросто и циклично.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.9. Пример морфизма гладких G -модулей, не строго совместимого с фильтрацией $N_\bullet$, дает включение $\mathbb{Q}[G/G_{F|L}]^\circ \hookrightarrow \mathbb{Q}[G/G_{F|L}]$, поскольку $N_{\mathrm{degtr}(L|k)}\mathbb{Q}[G/G_{F|L}]^\circ$ совпадает с

$$\left\{ \sum_{[\sigma] \in G/G_{F|L}} a_\sigma[\sigma] \mid \sum_{\sigma(L) \subset \overline{F'}} a_\sigma = 0 \text{ для любого } F' \text{ с } \mathrm{degtr}(F'|k) = \mathrm{degtr}(L|k) \right\},$$

что отличается от $\mathbb{Q}[G/G_{F|L}]^\circ$, но $\mathbb{Q}[G/G_{F|L}] = N_{\mathrm{degtr}(L|k)}\mathbb{Q}[G/G_{F|L}]$.

ЛЕММА 4.1.10 [7; лемма 6.12]. Для любого $1 \leq n \leq \infty$, любого подполя $L_1 \subset F$ конечного типа над k и любого унирационального расширения L_2 поля L_1 в F конечного типа имеется естественный изоморфизм $C_{L_2} \xrightarrow{\sim} C_{L_1}$.

Объекты категории $\mathcal{I}_G$ уровня 1. Для любого $W \in \mathcal{S}m_G$ имеется сюръекция $\bigoplus_{e \in W^{G_{F|F'}}} \langle e \rangle_G \rightarrow N_1 W$, где $F'|k$ – алгебраически замкнутое расширение в F с $\mathrm{degtr}(F'|k) = 1$. Это значит, что для того, чтобы описать объекты $\mathcal{I}_G$ уровня 1, достаточно разобраться со случаем $W = \langle e \rangle_G$, где $\mathrm{Stab}_e \supseteq G_{F|L}$ с $L \cong k(X)$ для гладкой собственной кривой X над k рода $g \geq 0$. Тогда W доминируется представлением C_L . Пусть $\mathrm{Pic}^j X$ – многообразие Пикара классов линейной эквивалентности дивизоров на X степени j .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.11 [7; предложения 6.20, 6.21]. Пусть X – гладкая проективная кривая над k , $k(X)$ – ее поле функций, $Z_0^{\mathrm{rat}}(k(X) \otimes_k F)$ – ядро естественной проекции $\mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{!k} F\}] \rightarrow \mathrm{Pic}(X_F)_{\mathbb{Q}}$ и $\mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{!k} F\}]^\circ$ – группа общих 0-циклов над F нулевой степени. Если $n = \infty$, то $\mathcal{I}_G Z_0^{\mathrm{rat}}(k(X) \otimes_k F) = 0$, $\mathcal{I}_G \mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{!k} F\}]^\circ = \mathrm{Pic}^\circ(X_F)_{\mathbb{Q}}$ и $C_{k(X)} = \mathrm{Pic}(X_F)_{\mathbb{Q}}$.

Доказательство основано на том, что а) достаточно большие симметрические степени гладкой проективной кривой – это проективные расслоения над ее якобианом, и б) [7; лемма 6.18]: G -модуль $Z_0^{\mathrm{rat}}(k(X) \otimes_k F)$ порожден элементами $w_N = \sum_{j=1}^N \sigma_j - \sum_{j=1}^N \tau_j$ для всех $N \gg 0$, где $(\sigma_1, \dots, \sigma_N; \tau_1, \dots, \tau_N)$ – общая F -точка слоя над нулем морфизма $X^N \times_k X^N \xrightarrow{p_N} \mathrm{Pic}^\circ X$, посылающего точку $(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N)$ в класс $\sum_{j=1}^N (x_j - y_j)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1.12 [7; следствия 6.22, 6.23]. Если $n = \infty$, то $A(F)_{\mathbb{Q}}$ – проективный объект категории $\mathcal{I}_G$ для любого абелева k -многообразия A и любой объект $\mathcal{I}_G$ уровня 1 является прямой суммой тривиального модуля и фактора прямой суммы модулей $A(F)_{\mathbb{Q}}$ для некоторых A по тривиальному подмодулю.

⁷Используя следствие 1.1.14, из этого можно было бы вывести, в частности, что алгебра A конечномерна над $\mathbb{Q}$.

Внутренний $\mathcal{H}om$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1.13 [7; следствие 6.25]. Для любого расширения L поля k в F с $\deg \text{tr}(F|L) = \infty$ и любого неприводимого k -многообразия X включение $\mathbb{Q}[\{L(X) \xrightarrow{L} F\}] \subseteq \mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{k} F\}]$ индуцирует сюръекцию $G_{F|L}$ -модулей $\mathbb{Q}[\{L(X) \xrightarrow{L} F\}] \rightarrow C_{k(X)}$.

Теорема 1.1.10, 1) и следующее предложение указывают на связь категории $\mathcal{I}_G$ с категорией эффективных гомологических мотивов. В п. 4.3 обсуждаются также неэффективные мотивы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.14 [7; 6.26]. При $n = \infty$ внутренний функтор $\mathcal{H}om$ на $\mathcal{S}t_G$ (см. замечание 3.0.2, в)) индуцирует внутренний функтор $\mathcal{H}om$ на $\mathcal{I}_G$. Уровень $\mathcal{H}om(W_1, W_2)$ не превосходит q , если $W_1, W_2 = N_q W_2 \in \mathcal{I}_G$ и $q \leq 1$.

ПРИМЕР 4.1.15. Поскольку группа G – коядро $G_{\overline{F(X)}|F(X)} \hookrightarrow G_{\{\overline{F(X)}, F\}|k(X)}$, она действует на множестве орбит $\{k(Y) \xrightarrow{k} \overline{F(X)}\} / \text{Gal}(\overline{F(X)}|F(X))$. Тогда $\mathcal{H}om(C_{k(X)}, CH_0(Y_F)\mathbb{Q}) = CH_0(Y_{F(X)})\mathbb{Q}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.16. В отличие от объектов категории $\mathcal{I}_G$ (в случае $n = \infty$), для любой топологической группы H существует много гладких представлений H с нетривиальными контрагredientными представлениями. А именно, H -эквивариантное спаривание $\mathbb{Q}[H/U] \otimes \mathbb{Q}[H/U] \rightarrow \mathbb{Q}$, заданное формулами $[\sigma] \otimes [\tau] \mapsto 0$, если $[\sigma] \neq [\tau]$, и $[\sigma] \otimes [\sigma] \mapsto 1$, определяет вложение $\mathbb{Q}[H/U]$ в свое контрагredientное представление. Здесь U – любая открытая подгруппа H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.17 [12; предложение 7.6]. Пусть $W \in \mathcal{I}_G$ и $q \geq 0$ – целое. Тогда:

- любой G -гомоморфизм $W \xrightarrow{\varphi} \bigotimes_F^q \Omega_{F|k}^1$ пропускается через $W \rightarrow \Omega_{F|k}^q \subseteq \bigotimes_F^q \Omega_{F|k}^1$;
- для любого гладкого собственного k -многообразия Y вложение $k(Y) \xrightarrow{k} F$ индуцирует инъекцию $\varphi(W) \cap \iota_* \Omega_{k(Y)|k}^q \hookrightarrow \Gamma(Y, \Omega_{Y|k}^q)$, и имеются следующие канонические изоморфизмы, функториальные относительно произвольных морфизмов $Y \rightarrow Y'$:

$$\text{Hom}_G\left(C_{k(Y)}, \bigotimes_F^\bullet \Omega_{F|k}^1\right) \xleftarrow{\sim} \Gamma(Y, \Omega_{Y|k}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G\left(CH_0(Y_F), \bigotimes_F^\bullet \Omega_{F|k}^1\right). \quad (3)$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Форма $\omega \in \bigotimes_F^q \Omega_{F|k}^1$ интерпретируется как рациональное сечение когерентного пучка $\Omega_{Y^q|k}^q|_{\Delta_Y}$ на гладком проективном многообразии Y над k . Основная идея: если ω не лежит в сумме образов $\Gamma(Y, \Omega_{Y|k}^\bullet)$ для гладких собственных многообразий Y над k , то прямой образ $f_*\omega = \text{tr}_{/k(\mathbb{P}^M)}(\omega)$ формы ω – неподвижный ненулевой элемент G -модуля, порожденного ω , для подходящего конечного морфизма $f: Y \rightarrow \mathbb{P}_k^M$. Чтобы гарантировать, что $f_*\omega \neq 0$, используются полюсы. Даже если ω не имела полюсов, но не лежала в $\Omega_{F|k}^\bullet$, то полюсы будут у ее прямого образа относительно подходящего конечного разветвленного морфизма.

4.2. “Формула Кюннета” и тензорная структура. Тензорная структура на $\mathcal{I}_G$. Как показывает пример 4.1.5, $\mathcal{I}_G$ не замкнута относительно тензорных произведений в $\mathcal{S}m_G$. Определим $W_1 \otimes_{\mathcal{I}} W_2$ формулой $\mathcal{I}(W_1 \otimes W_2)$.

На следующем примере видно, что эта операция не ассоциативна на $\mathcal{S}m_G$. Пусть $W_j = \mathbb{Q}[\{k(X_j) \xrightarrow{/k} F\}]$ для некоторых неприводимых k -многообразий X_j , $1 \leq j \leq N$, $N \geq 2$. Тогда

$$W_1 \otimes \cdots \otimes W_N = \bigoplus_{x \in \mathbf{Spec}(k(X_1) \otimes_k \cdots \otimes_k k(X_N))} \mathbb{Q}[\{k(x) \xrightarrow{/k} F\}],$$

так что $\mathcal{I}(W_1 \otimes \cdots \otimes W_N)$ изоморфен прямой сумме по всем $x \in \mathbf{Spec}(k(X_1) \otimes_k \cdots \otimes_k k(X_N))$ представлений $C_{k(x)}$. Если $X_1 = X_2 = \mathbb{A}_k^1$, то $\mathcal{I}W_1 = \mathcal{I}W_2 = \mathbb{Q}$ и, следовательно, $W_1 \otimes_{\mathcal{I}} (W_2 \otimes_{\mathcal{I}} \mathbb{Q}) = W_1 \otimes_{\mathcal{I}} \mathcal{I}W_2 = \mathcal{I}W_1 = \mathbb{Q}$.

С другой стороны, по лемме Нётер о нормализации, $(W_1 \otimes_{\mathcal{I}} W_2) \otimes_{\mathcal{I}} \mathbb{Q} = \mathcal{I}(W_1 \otimes W_2)$ содержит подмодули, изоморфные $C_{k(X)}$ для любой кривой X над k .

ЛЕММА 4.2.1 [7; леммы 6.27, 6.28]. Пусть $n = \infty$. Тогда для любого конечного набора гладких неприводимых собственных k -многообразий $X_1, \dots, X_N$ имеется канонический сюръективный морфизм $\mathcal{I}(\alpha): C_{k(X_1 \times_k \cdots \times_k X_N)} \rightarrow \mathcal{I}(C_{k(X_1)} \otimes \cdots \otimes C_{k(X_N)})$ представлений G .

Если $C_{k(X_1 \times_k \cdots \times_k X_N)} = CH_0(X_1 \times_k \cdots \times_k X_N)_{\mathbb{Q}}$, то $\mathcal{I}(\alpha)$ – изоморфизм.

Если $\mathcal{I}(\alpha)$ – изоморфизм, то $\otimes_{\mathcal{I}}$ ассоциативна, класс проективных объектов $\mathcal{I}_G$ замкнут относительно $\otimes_{\mathcal{I}}$ и $W_1 \otimes_{\mathcal{I}} \cdots \otimes_{\mathcal{I}} W_N = \mathcal{I}(W_1 \otimes \cdots \otimes W_N)$.

“Формула Кюннета” для произведений с кривыми. Отображение ограничения $\tau \mapsto \tau|_{k(X)} \otimes \tau|_{k(Y)}$ определяет гомоморфизм G -модулей $\mathbb{Q}[\{k(X) \otimes_k k(Y) \xrightarrow{/k} F\}] \xrightarrow{\alpha} C_{k(X)} \otimes C_{k(Y)}$. Из леммы 4.2.1 следует сюръективность α , что задает сюръекцию $C_{k(X \times_k Y)} \rightarrow C_{k(X)} \otimes_{\mathcal{I}} C_{k(Y)}$.

Для произвольных $A \in C_{k(X)}$ и $B \in C_{k(Y)}$ выберем $\tilde{A} \in \mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{/k} F\}]$ и $\tilde{B} \in \mathbb{Q}[\{k(Y) \xrightarrow{/k} F\}]$ такие, что все вложения из $\tilde{A}$ и из $\tilde{B}$ – в попарно общем положении.⁸

Нужно проверить, что класс $\tilde{A} \times \tilde{B} \in \mathbb{Q}[\{k(X \times_k Y) \xrightarrow{/k} F\}]$ в $C_{k(X \times_k Y)}$ не зависит от выбора $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$. Если $\tilde{A}' \in \mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{/k} F\}]$ и $\tilde{B}' \in \mathbb{Q}[\{k(Y) \xrightarrow{/k} F\}]$ определены аналогично, то выберем $\tilde{B}'' \in \mathbb{Q}[\{k(Y) \xrightarrow{/k} F\}]$ такой, что все вложения из $\tilde{A}$ и из $\tilde{B}''$, а также из $\tilde{A}'$ и из $\tilde{B}''$ – в попарно общем положении. Тогда $\tilde{A} \times \tilde{B} - \tilde{A}' \times \tilde{B}' = (\tilde{A} - \tilde{A}') \times \tilde{B}'' + \tilde{A} \times (\tilde{B} - \tilde{B}') + \tilde{A}' \times (\tilde{B}'' - \tilde{B}')$.

Таким образом, нужно проверить условие $\star_{X,Y}$:

⁸Сначала выберем $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ произвольно. Проведем через каждую точку P носителя $\tilde{B}$ общую кривую C_P , на которой точка P – общая относительно некоторого поля определения C_P . Заменим P линейно эквивалентной линейной комбинацией точек C_P в общем положении относительно $\tilde{A}$. Получим требуемое $\tilde{B}$.

если класс $\sum_{i=1}^N a_i \tau_i \in \mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{/k} F\}]$ – нулевой в $C_{k(X)}$ и все τ_i – в общем положении относительно $\sigma: k(Y) \xrightarrow{/k} F$, то класс $\gamma := \sum_{i=1}^N a_i(\tau_i, \sigma) \in \mathbb{Q}[\{k(X \times_k Y) \xrightarrow{/k} F\}]$ – нулевой в $C_{k(X \times_k Y)}$,

а также условие $\star_{Y,X}$.

По определению функтора $\mathcal{J}$, найдутся чисто трансцендентные расширения $L'_j|L_j$, элементы $\alpha_j \in \mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{/k} F\}]^{G_{F|L'_j}}$ и $\xi_j \in G_{F|L_j}$ такие, что $\sum_{i=1}^N a_i \tau_i = \sum_j (\xi_j \alpha_j - \alpha_j)$.

Если σ – в общем положении относительно композита L всех $\tau_i(k(X))$, то найдется $\kappa \in G_{F|L}$ такой, что $\kappa\sigma =: \sigma'$ – в общем положении относительно композита всех L'_j . Тогда $\gamma' := \kappa\gamma = \sum_i a_i(\tau_i, \sigma') = \sum_j (\xi_j \alpha_j - \alpha_j) \otimes \sigma'$. Положим $K_j := L_j \sigma'(k(Y))$ и $K'_j := L'_j \sigma'(k(Y))$. Тогда $\alpha_j \otimes \sigma' \in \mathbb{Q}[\{k(X \times_k Y) \xrightarrow{/k} F\}]^{G_{F|K'_j}}$, K'_j – чисто трансцендентное расширение K_j и найдутся такие $\xi'_j \in G_{F|\sigma'(k(Y))}$, что $\xi'_j|_{L'_j} = \xi_j|_{L'_j}$. Отсюда следует, что $\gamma' = \sum_j (\xi'_j(\alpha_j \otimes \sigma') - \alpha_j \otimes \sigma')$ лежит, по определению функтора $\mathcal{J}$, в ядре проекции $\mathbb{Q}[\{k(X \times_k Y) \xrightarrow{/k} F\}] \rightarrow C_{k(X \times_k Y)}$, а значит, то же верно и для γ .

Проверим, что условия $\star_{X,Y}$ и $\star_{Y,X}$ равносильны. Пусть общая кривая C на Y над некоторым полем, содержащим все $\tau_i(k(X))$, проходит через σ . Тогда σ линейно эквивалентна линейной комбинации β общих точек C (которые являются общими точками Y). Тогда образ γ в $C_{k(X \times_k Y)}$ совпадает с образом $\sum_i a_i \tau_i \times (\sigma - \beta)$, что доказывает импликацию $\star_{Y,X} \Rightarrow \star_{X,Y}$.

ПРИМЕР 4.2.2. Проверим условие $\star_{X,Y}$ в случае, когда X – гладкая полная кривая. Пусть $K = \overline{\sigma(k(Y))}$. Тогда $\sum_i a_i \tau_i$ – общий дивизор на кривой X_K над K , линейно эквивалентный нулю. Согласно [7; лемма 6.18], $G_{F|K}$ -модуль общих дивизоров на X_K над K , линейно эквивалентных нулю, порожден элементами $w_M = \sum_{j=1}^M (\sigma_j - \sigma'_j)$ для всех $M \gg 0$, где $(\sigma_1, \dots, \sigma_M; \sigma'_1, \dots, \sigma'_M)$ – общая F -точка слоя над нулем морфизма $X_K^M \times_K X_K^M \rightarrow \text{Pic}^\circ X_K$, посылающего точку $(x_1, \dots, x_M; y_1, \dots, y_M)$ в класс $\sum_{j=1}^M (x_j - y_j)$. Ясно, что композит всех подполей $\sigma_j(k(X))\sigma'_j(k(X))$ находится в общем положении по отношению к K . То же относится и к любому элементу в $G_{F|K}$ -орбите w_M . Поэтому, как мы видели выше, образ $\sum_i a_i(\tau_i, \sigma)$ в $C_{k(X \times_k Y)}$ – нулевой.

Таким образом, имеется каноническая сюръекция $C_{k(X)} \otimes C_{k(Y)} \rightarrow C_{k(X \times_k Y)}$, по крайней мере если X – кривая, и композиция $C_{k(X \times_k Y)} \rightarrow C_{k(X)} \otimes_{\mathcal{J}} C_{k(Y)} \rightarrow C_{k(X \times_k Y)}$ тождественна.

СЛЕДСТВИЕ 4.2.3. Если $n = \infty$, X и Y – неприводимые k -многообразия и X – кривая, то $C_{k(X \times_k Y)} = C_{k(X)} \otimes_{\mathcal{J}} C_{k(Y)}$.

ПРИМЕР 4.2.4. Пусть X_j , $1 \leq j \leq N$, и Y – неприводимые k -многообразия, причем все X_j , кроме, быть может, одного, – кривые. Пусть $Y \dashrightarrow X_j$, $1 \leq j \leq N$, – доминантные отображения. Тогда имеется естественный морфизм $C_{k(Y)} \rightarrow C_{k(\prod_{j=1}^N X_j)}$. Действительно, в этом случае имеется естественный

морфизм $\bigotimes_{j=1}^N C_{k(X_j)} \rightarrow C_k(\prod_{j=1}^N X_j)$, композиция которого с

$$\mathbb{Q}[\{k(Y) \xrightarrow{k} F\}] \rightarrow \mathbb{Q}\left[\prod_{j=1}^N \{k(X_j) \xrightarrow{k} F\}\right] = \bigotimes_{j=1}^N \mathbb{Q}[\{k(X_j) \xrightarrow{k} F\}] \rightarrow \bigotimes_{j=1}^N C_{k(X_j)}$$

пропускается через $C_{k(Y)}$. В предположении, что точен функтор $(-)_v$ из предложения 1.2.4 (см. также с. 146), можно построить естественный морфизм $C_{k(D)} \rightarrow C_{k(X)}$ для любого неприводимого дивизора D на любом неприводимом многообразии X над k , см. следствие 4.4.14.

4.3. Геометрическая конструкция допустимых представлений. Мы приступаем к построению некоторого запаса полупростых допустимых представлений группы G . Гипотетически, в случае $n = \infty$ все полупростые допустимые представления группы G получаются этим способом.

Положим $B^q(X) = A^q(X)$, если $\sim$ – численная эквивалентность (над $k!$). Как и прежде, $X_E := X \times_k E$ для любого k -многообразия X и любого расширения полей $E|k$.

Напомним, что $B^q(X)$ – предел некоторых факторов $\mathbb{Q}$ -векторных пространств классов численной эквивалентности циклов коразмерности q на гладких собственных многообразиях над k , и ни в каком смысле не над F , даже если $X = Y_F$, см. текст после леммы 3.1.4.

ЛЕММА 4.3.1. Пусть $W \in \mathcal{S}m_G$. Если $\text{Hom}_G(Z^{\dim X}(k(X) \otimes_k F), W) = \text{Hom}_G(CH_0(X_F), W)$ для любого гладкого собственного многообразия X над k , то W полупрост тогда и только тогда, когда полупросты $W^{G_{F|F'}}$ как $G_{F'|k}$ -модули для всех алгебраически замкнутых F' конечной степени трансцендентности над k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $W \in \mathcal{S}m_G$. По предложению 3.1.1, G -модуль W полупрост тогда и только тогда, когда для любого $L \subset F$ конечного типа над k и любого чисто трансцендентного расширения $L'|L$ в F с $\overline{L'} = F$ модуль $W^{G_{F|L'}} = W^{G_{F|L}}$ над алгеброй Гекке $\mathcal{H}_{G_{F|L'}} = h_{L'}\mathbb{D}h_{L'} \supseteq \langle h_{L'}\sigma h_{L'} \mid \sigma \in G \rangle_{\mathbb{Q}}$ полупрост. Здесь $h_{L'}$ – мера Хаара на $G_{F|L'}$. Поскольку W – фактор прямой суммы объектов вида $CH_0(X_F)_{\mathbb{Q}}$, действие $\mathbb{D} \otimes W^{G_{F|L}} \rightarrow \mathbb{Q}[G/G_{F|L}] \otimes W^{G_{F|L}} \rightarrow W$ пропускается через $CH_0(Y_F)_{\mathbb{Q}} \otimes W^{G_{F|L}} \rightarrow W$, где Y – гладкая собственная модель расширения $L|k$ (см. предложение 3.1.6). Поэтому действие $\mathcal{H}_{G_{F|L'}}$ пропускается через $CH_0(Y_{k(Y)})_{\mathbb{Q}} = h_{L'}CH_0(Y_F)_{\mathbb{Q}}$.

Другими словами, действие алгебры $\mathcal{H}_{G_{F|L'}}(G)$ на $W^{G_{F|L}}$ определяется действием алгебры $\mathcal{H}_{G_{\overline{L}|L}}(G_{\overline{L}|k})$, так что полупростота $\mathcal{H}_{G_{F|L'}}(G)$ -модуля $W^{G_{F|L}}$ эквивалентна его полупростоте как $\mathcal{H}_{G_{\overline{L}|L}}(G_{\overline{L}|k})$ -модуля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3.2. G -модуль $\mathbf{B}_X^q := B^q(X_F)$ допустим и полупрост для любого гладкого собственного k -многообразия X и любого $q \geq 0$. Если $q \in \{0, 1\}$ или $q = \dim X \leq n$, то $\mathbf{B}_X^q$ – конечной длины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По стандартным соображениям, можно считать, что k вложено в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, и, значит, для любого гладкого неприводимого собственного d -мерного k -многообразия Y с $k(Y) =: L \subset F$ пространство $B^q(X_F)^{G_{F|L}}$ – фактор конечномерного пространства $Z^q(X \times_k Y)/\sim_{\text{hom}} \subseteq H^{2q}((X \times_k Y)(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(q))$, так что представление $B^q(X_F)$ допустимо.

Согласно предложению 3.1.6 и лемме 4.3.1 (где $W = B^q(X_F)$), и потому $W^{G_{F|L'}} = W^{G_{F|L}} = B^q(X_L)$, полупростота G -модуля $B^q(X_F)$ эквивалентна полупростоте $\mathcal{H}_{G_{\bar{L}|L}}(G_{\bar{L}|k})$ -модуля $B^q(X_L)$ для любого $L \subset F$ как выше.

Ядро гомоморфизма $A^q(X \times_k Y) \rightarrow A^q(X_{k(Y)})$ является $A^d(Y \times_k Y)$ -подмодулем в $A^q(X \times_k Y)$, поскольку $\alpha \circ \beta = \text{pr}_{13*}(\text{pr}_{12}^* \alpha \cdot \text{pr}_{23}^* \beta)$ для его произвольного элемента α и для любого элемента $\beta \in A^d(Y \times_k Y)$, так что проекция на Y носителя $\alpha \circ \beta$ содержится в $\text{pr}_2((D \times_k Y) \cap \text{supp}(\beta))$ для некоторого дивизора D на Y , размерность которого равна $d - 1$, и, значит, D не может доминировать Y . Отсюда следует, что $A^q(X_{k(Y)})$ имеет естественную структуру $A^d(Y \times_k Y)$ -модуля.

Согласно [6], алгебра $B^d(Y \times_k Y)$ полупроста, так что $B^d(Y \times_k Y)$ -модуль $B^q(X_{k(Y)})$ также полупрост. По лемме о сдвиге 3.1.5, гомоморфизм колец $\mathcal{H}_{G_{\bar{L}|L}}(G_{\bar{L}|k}) \rightarrow B^d(Y \times_k Y)$, индуцированный отождествлением алгебры Гекке $\mathcal{H}_{G_{\bar{L}|L}}(G_{\bar{L}|k})$ с алгеброй невырожденных соответствий на Y (см. текст после леммы 3.1.3), сюръективен. Это задает структуру (полупростого) $\mathcal{H}_{G_{\bar{L}|L}}(G_{\bar{L}|k})$ -модуля на любом $B^d(Y \times_k Y)$ -модуле.

Длина любого циклического полупростого G -модуля, в частности $\mathbf{B}_X^{\dim X}$ (лемма 3.1.5), конечна.

Из теорем Лефшеца о гиперплоском сечении и об $(1, 1)$ -классах следует, что $\mathbf{B}_X^q$ – подфактор $\mathbf{B}_H^q$ для любого гладкого q -мерного плоского сечения H многообразия X , так что длина $\mathbf{B}_X^q$ также конечна.

СЛЕДСТВИЕ 4.3.3. $\text{Hom}_G(B^q(L' \otimes_k F), B^p(L \otimes_k F)) = 0$ для любой пары полей L, L' конечного типа над k с $\text{degtr}(L|k) = p$, $\text{degtr}(L'|k) = q$ и $p \neq q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p > n$ или $q > n$, то по крайней мере один из модулей $B^q(L' \otimes_k F)$ и $B^p(L \otimes_k F)$ – нулевой, так что можно считать, что $\max(p, q)$ не превосходит n . По предложению 4.3.2, G -модули $B^q(L' \otimes_k F)$ и $B^p(L \otimes_k F)$ полупросты, так что $\text{Hom}_G(B^q(L' \otimes_k F), B^p(L \otimes_k F))$ изоморфно $\text{Hom}_G(B^p(L \otimes_k F), B^q(L' \otimes_k F))$, и поэтому можно считать, что $p > q$. Тогда, по следствию 3.1.7, $\text{Hom}_G(B^q(L' \otimes_k F), B^p(L \otimes_k F)) = B^p(L \otimes_k L') = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3.4 [7; следствие 3.12]. Для любого гладкого неприводимого многообразия X размерности не выше $n + 1$ над k и $q \in \{0, 1, 2, \dim X\}$ существует единственный G -подмодуль в $\mathbf{B}_X^q = B^q(X \times_k F)$, изоморфный $B^q(k(X) \otimes_k F)$.

Для каждой открытой компактной подгруппы $U \subset G$ и гладкого неприводимого многообразия Y над k с $k(Y) = F^U$ определим полупростой G -модуль (конечной длины) $\mathbf{B}_{Z, Y}^q$ как минимальный среди таких, что $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(U)$ -модуль $(\mathbf{B}_{Z, Y}^q)^U$ изоморфен $B^q(Z \times_k Y)$. По предложению 3.1.1, он существует и единственен.

ЛЕММА 4.3.5 [7; лемма 3.13]. Пусть X, Y и Z – гладкие неприводимые k -многообразия, $\dim X = \dim Y = n \geq \dim Z$, и $p, q \geq 0$ – целые.

Тогда $\text{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(U)}(B^q(Z \times_k Y), B^p(k(X) \otimes_k k(Y))) = 0$, если или $q = \dim Z < p$, или $q = n$ и $\dim Z < p$, или $q > n$ и $p + q > \dim Z + n$, или $q < p$ и $q \in \{0, 1\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3.6 [7; предложение 3.14]. Пусть X и Y – гладкие неприводимые многообразия над k и или $q \in \{0, 1, 2\}$, или $q = \dim X = \dim Y$. Тогда имеется единственный подмодуль в $B^q(X \times_k Y)$ над $(B^{\dim X}(X \times_k X) \otimes B^{\dim Y}(Y \times_k Y)^{\text{op}})$, изоморфный его фактору $B^q(k(X) \otimes_k k(Y))$.

Единственность такого подмодуля вытекает из леммы 4.3.5. Существование следует из полупростоты модуля $B^q(X \times_k Y)$, см. [6].

Представления, контрагреддиентные к мотивным. Для каждой открытой компактной подгруппы U в $\mathfrak{G}$ (см. п. 2.5) зафиксируем гладкое собственное неприводимое многообразие Y_U над k и вложение его поля функций в F такие, что $F^U = k(Y_U)L_m$ для некоторого целого $m \geq 1$, где $k(Y_U)$ и L_m алгебраически независимы над k , т.е. $\dim_k Y_U = m - 1$. Пусть $n_U := \dim_k Y_U$. Если Y'_U – другое многообразие с теми же свойствами, то существует канонический изоморфизм $B^{n_U}((Y'_U)_L) = B^{n_U}((Y_U)_L)$, индуцированный изоморфизмами прямого образа вида $B^{n_U}((Y_U)_L) = B^{n_U+q}((Y_U \times \mathbb{P}^q)_L)$.

Для каждой упорядоченной пары открытых компактных подгрупп $U \supseteq U'$ в $\mathfrak{G}$ можно выбрать гладкие собственные неприводимые многообразия $Y_U, Y_{U'}$ над k и вложения их полей функций в F такие, что: (а) $F^U = k(Y_U)L_m$ и $F^{U'} = k(Y_{U'})L_m$ для некоторого целого $m \geq 1$ и (б) $k(Y_U)k(Y_{U'}) = k(Y_{U'})$ и L_m алгебраически независимы над k . Тогда гомоморфизм обратного образа индуцирует каноническое вложение $B^{n_U}((Y_U)_L) \hookrightarrow B^{n_{U'}}((Y_{U'})_L)$.

Это позволяет образовать индуктивную систему $(B^{n_U}((Y_U)_{k(X)}))_U$, где U пробегает множество открытых компактных подгрупп в $\mathfrak{G}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3.7. Пусть X и Y – гладкие неприводимые собственные k -многообразия. Тогда $\mathbb{Q}$ -векторные пространства $B^{\dim X}(X_{k(Y)})$ и $B^{\dim Y}(Y_{k(X)})$ естественно двойственны друг другу. Если $\dim X \leq n$, то эта двойственность индуцирует невырожденное $\mathfrak{G}$ -эквивариантное спаривание

$$B^{\dim X}(X_F) \otimes \lim_{U \rightarrow} B^{n_U}((Y_U)_{k(X)}) \rightarrow B^{\dim X}(X_{k(X)})(\chi) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{Q}(\chi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \geq \dim Y \geq \dim X$. По предложению 3.1.5, $B^{\dim X}(X_{k(Y)}) = \text{Hom}_G(B^{\dim Y}(Y_F), B^{\dim X}(X_F))$ и аналогично, $B^{\dim Y}(Y_{k(X)}) = \text{Hom}_G(B^{\dim X}(X_F), B^{\dim Y}(Y_F))$. Согласно предложению 4.3.2, представления $B^{\dim Y}(Y_F)$ и $B^{\dim X}(X_F)$ группы G полупросты, и их длины конечны. Для любых $\alpha \in B^{\dim X}(X_{k(Y)})$ и $\beta \in B^{\dim Y}(Y_{k(X)})$ определим элемент $\alpha \circ \beta \in \text{End}_G(B^{\dim X}(X_F)) = B^{\dim X}(X_{k(X)})$ как композицию соответствующих G -гомоморфизмов α и β . Если $\pi: Z \rightarrow Y$ – морфизм, конечный в общей точке, то обозначим через α' и β' образы α и β в $B^{\dim X}(X_{k(Z)})$ и $B^{\dim Y}(Z_{k(X)})$ соответственно, т.е. $\alpha' = \alpha \circ \pi_*$ и $\beta' = \pi^* \circ \beta$. По формуле проекции $\alpha' \circ \beta' = \deg \pi \cdot \alpha \circ \beta$. Положим $\langle \alpha \cdot \beta \rangle = \text{tr}(\alpha \circ \beta)$ ($= \text{tr}(\beta \circ \alpha)$). Если $\alpha \neq 0$, то существует элемент $\gamma \in B^{\dim Y}(Y_{k(X)})$ такой, что $\alpha \circ \gamma$ – ненулевой проектор в $\text{End}_G B^{\dim X}(X_F)$, так что форма $\alpha \otimes \beta \mapsto \langle \alpha \cdot \beta \rangle$ невырождена. Определим форму $B^{\dim X}(X_F) \otimes \lim_{U \rightarrow} B^{n_U}((Y_U)_{k(X)}) \rightarrow \mathbb{Q}(\chi)$ как $\alpha \otimes \beta \mapsto \langle \alpha \cdot \beta \rangle \cdot [U]$ для

любых $\alpha \in B^{\dim X}(X_F)^U$ и $\beta \in B^{nv}((Y_U)_{k(X)})$. По формуле проекции, это определение корректно.

Подчеркнем, что $B^*(X_F)$ – допустимое представление группы $\mathfrak{S}$ (см. предложение 4.6.1). В частности, чистые эффективные мотивы образуют полную подкатегорию в категории градуированных полупростых допустимых $\mathfrak{S}$ -модулей. Заметим, что, поскольку категория градуированных полупростых допустимых $\mathfrak{S}$ -модулей конечной длины самодвойственна, произвольные чистые мотивы (не обязательно эффективные) можно реализовать в этой категории.

Проектор $\Delta_{k(X)}$. Для любой пары многообразий X, Y пусть $\alpha \mapsto {}^t\alpha$ – транспозиция циклов, индуцированная транспозицией $X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$. Обозначим через $\Delta_{k(X)} = {}^t\Delta_{k(X)}$ тождественный (диагональный) элемент алгебры $B^{\dim X}(k(X) \otimes_k k(X))$, рассматриваемый как элемент кольца $B^{\dim X}(X \times_k X)$.

ЛЕММА 4.3.8 [7; леммы 3.15, 3.16]. *Для любого неприводимого гладкого собственного многообразия X над k элемент $\Delta_{k(X)}$ – центральный проектор алгебры $B^{\dim X}(X \times_k X)$. Левый (эквивалентно, правый) идеал, порожденный $\Delta_{k(X)}$, совпадает с (образом кольца) $B^{\dim X}(k(X) \otimes_k k(X))$. Модуль $\Delta_{k(X)} B^{\dim X}(X_L)$ совпадает с $B^{\dim X}(k(X) \otimes_k L)$ для любого расширения поля $L|k$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3.9 [7; предложение 3.17]. *$(X, \Delta_{k(X)})$ – максимальный примитивный n -подмотив мотива (X, Δ_X) для любого неприводимого гладкого собственного n -мерного k -многообразия X . Мотив $(X, \Delta_{k(X)})$ – бирациональный инвариант X .*

Бирациональная инвариантность $(X, \Delta_{k(X)})$ следует из бирациональной инвариантности Y^{prim} для любого гладкого проективного многообразия Y над k , см. ниже.

СЛЕДСТВИЕ 4.3.10 [7; следствие 3.18]. *Пусть X и Y – гладкие неприводимые собственные многообразия над k и $\dim X = \dim Y = n$. Тогда*

$$\Delta_{k(X)} \cdot B^n(X \times_k Y) = B^n(X \times_k Y) \cdot \Delta_{k(Y)} = \Delta_{k(X)} \cdot B^n(X \times_k Y) \cdot \Delta_{k(Y)}$$

– единственный $(B^n(X \times_k X) \otimes B^n(Y \times_k Y))^{\text{op}}$ -подмодуль в $B^n(X \times_k Y)$, изоморфный своему фактору $B^n(k(X) \otimes_k k(Y))$. Аналогично, $B^q(k(X) \otimes_k k(Y)) = \Delta_{k(X)} \cdot B^q(X \times_k Y) \cdot \Delta_{k(Y)}$ для $q = 0, 1$.

Функторы $\mathbb{B}^\bullet$ и $\mathbb{B}^q$. Для гладкого проективного многообразия Y над k пусть мотив Y^{prim} определен как пересечение ядер всех морфизмов $\varphi: Y \rightarrow M \otimes \mathbb{L}$ для всевозможных эффективных мотивов M , или, что эквивалентно, Y^{prim} – это коядро морфизма $\sum \varphi: \bigoplus_{M \otimes \mathbb{L} \xrightarrow{\varphi} Y} M \otimes \mathbb{L} \rightarrow Y$ (с такими же M). Ясно, что $Y \mapsto Y^{\text{prim}}$ – функтор из категории гладких проективных многообразий в категорию чистых мотивов. Любое бирациональное отображение есть композиция раздутия и стягивания с гладкими центрами (см. [41], [42]). Поскольку раздутие не меняет Y^{prim} (см. [43]), из этого следует, что Y^{prim} – инвариант поля функций $k(Y)$. Согласно теореме Хиронаки, для любого расширения конечного типа $L|k$ в F существует гладкое проективное многообразие $Y_{[L]}$ над k с полем функций L , и, следовательно, мы получаем каноническую

проективную систему мотивов $\{Y_{[L]}^{\text{prim}}\}_L$, пронумерованную подполями L в F конечного типа над k .

Определим теперь функтор $\mathbb{B}^\bullet = \bigoplus \mathbb{B}^{[i]}$ в теореме 1.1.5 из категории чистых мотивов в категорию градуированных $\mathbb{Q}$ -векторных пространств, положив $\mathbb{B}^{[i]} = \varinjlim_L \text{Hom}(Y_{[L]}^{\text{prim}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes i}, -)$ для его компоненты степени i . Пусть также $\mathfrak{B}^q$ обозначает ограничение функтора $\mathbb{B}^{[0]}$ на подкатегорию примитивных q -мотивов. Группа G действует на проективной системе $\{Y_{[L]}^{\text{prim}}\}_L$ по правилу $Y_{[L]} \xrightarrow{\sigma} Y_{[\sigma(L)]}$, $\sigma(L) \xrightarrow{\sigma^{-1}} L$, так что G действует на пределах $\mathfrak{B}^q(M)$ и $\mathbb{B}^\bullet(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3.11. Любой чистый мотив $M = (X, \pi)$ изоморфен прямой сумме $\bigoplus_{0 \leq i, j, i+j \leq \dim X} M_{ij} \otimes \mathbb{L}^{\otimes i}$, где M_{ij} – примитивный j -мотив и $\mathbb{L} = (\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1 \times \{0\})$, так что $\mathbb{B}^{[i]}(M) \cong \bigoplus_j \mathfrak{B}^j(M_{ij})$. Это доказывается индукцией по размерности d многообразия X следующим образом. Пусть $M_{0d} = \bigcap_{\varphi} \ker(\varphi)$, где φ пробегает множество морфизмов из M в мотивы вида $(Y \times \mathbb{P}^1, \Delta)$ для всех Y с $\dim Y < d$. (По предложению 4.3.9, $M_{0d} = (X, \pi \circ \Delta_{k(X)})$.) Поскольку длина M не превосходит $\dim_{\mathbb{Q}} \text{End}(M) < \infty$, мотив M/M_{0d} можно вложить в конечную прямую сумму мотивов $(Y_j \times \mathbb{P}^1, \Delta)$ с $\dim Y_j < d$. Поскольку $(Y_j \times \mathbb{P}^1, \Delta) = (Y_j, \Delta) \oplus (Y_j, \Delta) \otimes \mathbb{L}$, индукция завершена. В действительности, разложение $M = \bigoplus_{0 \leq i, j, i+j \leq \dim X} \widetilde{M}_{ij}$, где $\widetilde{M}_{ij}$ изоморфен $M_{ij} \otimes \mathbb{L}^{\otimes i}$, – каноническое, так как $\widetilde{M}_{ij}$ – это сумма образов всех морфизмов $\varphi: N \otimes \mathbb{L}^{\otimes i} \rightarrow M$ для всевозможных примитивных j -мотивов N .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3.12 [7; предложение 3.19]. Если $\dim X = q \leq n$ и $M = (X, \pi)$ – примитивный q -мотив, то $\mathfrak{B}^q(M) = \mathbb{B}^{[0]}(M) = \pi B^q(X_F)$.

Доказательство использует эквивариантную версию разрешения особенностей и основную теорему работы [6].

Из предложения 4.3.12 и леммы 4.3.8 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.3.13 [7; следствие 3.20]. Для любого $q < d := \dim X$, любого неприводимого гладкого собственного k -многообразия X и любого неприводимого гладкого k -многообразия Y имеется равенство $\Delta_{k(X)} B^d(X \times_k Y) = B^d(k(X) \otimes_k k(Y))$, и группа $\Delta_{k(X)} B^q(X \times_k Y)$ обращается в нуль.

“Поляризация” на $B^n(k(X) \otimes_k F)$ и поляризуемые G -модули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3.14 [7; предложение 3.21]. Для любого неприводимого k -многообразия X размерности n существует симметрическое G -эквивариантное невырожденное спаривание

$$B^n(k(X) \otimes_k F) \otimes B^n(k(X) \otimes_k F) \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \mathbb{Q}(X)$$

такое, что $\langle p^*(\cdot), \cdot \rangle = \langle \cdot, p_*(\cdot) \rangle$ для любого рационального отображения p , конечного в общей точке. В частности, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ индуцирует невырожденное спаривание между подмодулями $W := \pi B^n(k(X) \otimes_k F)$ и ${}^t W := {}^t \pi B^n(k(X) \otimes_k F)$ для всех проекторов $\pi \in B^n(k(X) \otimes_k k(X))$.

Если для $(n-1)$ -циклов на $2n$ -мерных комплексных многообразиях численная эквивалентность совпадает с гомологической, то форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ является $(-1)^n$ -определенной. Например, это заведомо верно при $n \leq 2$.

Форма $\langle \alpha, \gamma \rangle \in \mathbb{Q}(\chi)$ определяется как $\langle \hat{\alpha} \cdot \hat{\gamma} \rangle \cdot [U]$, где $\alpha, \gamma \in B^n(k(X) \otimes_k F)$ фиксированы компактной открытой подгруппой $U \subset G$, $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}$ – образы $\alpha, \gamma \in B^n(k(X) \otimes_k k(Y_U))$ в $B^n(X \times_k Y_U)$ в смысле предложения 4.3.6. Здесь Y_U – гладкое собственное многообразие над k с полем функций $k(Y_U)$, отождествленным с F^U , и $\alpha \otimes \beta \mapsto \langle \alpha \cdot \beta \rangle$ – форма пересечения на $B^n(X \times_k Y_U)$. По формуле проекции, $\langle \alpha, \gamma \rangle$ не зависит от произвола во всевозможных выборах, и $\langle p^*(\cdot), \cdot \rangle = \langle \cdot, p_*(\cdot) \rangle$.

Оставшаяся часть доказательства использует стандартную теорию пересечений, лемму 4.3.5 и теорему Ходжа об индексе.

4.4. Нормирования и связанные с ними функторы. (Большая часть результатов этого пункта содержится в [19].) В этом пункте каждому гладкому представлению G сопоставляется пучок в гладкой топологии на k . Для этого каждому гладкому k -многообразию X , его схемной точке $p \in X$ и вложению $k(X_p) \xrightarrow{\ell^k} F$ сопоставляется набор $J_{X,p}$ подполей в F и определяются слои $\mathcal{W}_{X,p} := W^{G_{F|k(X_p)}} \cap \left(\sum_{F'' \in J_{X,p}} W^{G_{F|F''}} \right)$.

Естественно, что для каждого $q \geq 0$ из гладкого представления $\Omega_{F|k}^q$ группы G мы хотим получить пучок $\Omega_{\mathcal{O}|k}^q$. Для представления $\bigotimes_F^q \Omega_{F|k}^1$ имеется два варианта: один – “гомотопически инвариантный” (и более естественный) – $\bigotimes_{\mathcal{O}}^q \Omega_{\mathcal{O}|k}^1$, а другой – со свойством спуска Галуа. “Гомотопически инвариантный” означает, что для любого проективного расслоения $X \rightarrow Y$ над собственной базой Y индуцированное отображение сечений – изоморфизм.

Функтор “глобализации”. Для любого набора J подполей $F'' \subset F$ аддитивный функтор $\Phi_J: W \mapsto \sum_{F'' \in J} W^{G_{F|F''}}$ на категории $\mathcal{M}_G$ сохраняет сюръекции, если любой элемент J содержится в элементе J сколь угодно большой конечной или счетной степени трансцендентности над k , и инъекции – в общем случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4.1. Если набор J состоит из всех чисто трансцендентных расширений поля k , то $\Phi_J(\Omega_{F|k}^q) = \Omega_{F|k}^q$ при $n > q$ и $\Phi_J(\Omega_{F|k, \text{per}}^q) = 0$ для любого $q \geq 1$. Поэтому Φ_J , вообще говоря, не точен, даже если $n = \infty$.

В частности, с каждым кольцом дискретного нормирования $\mathcal{O}_v \in \mathcal{P}_F^r$ связан набор J всех его подполей. Мы рассмотрим соответствующий функтор Φ_J :

$$\begin{aligned} (-)_v: \mathcal{M}_G &\rightarrow \mathcal{M}_{G_v}, \\ W &\mapsto W_v := \sum_{\sigma \in G_v} W^{G_{F|\sigma(F')}} = \sum_{\sigma \in G_v^{\dagger}} W^{G_{F|\sigma(F')}} \subseteq W, \end{aligned}$$

где используются обозначения п. 2.4. Положим $\Gamma_r(W) := \bigcap_{\mathcal{O}_v \in \mathcal{P}_F^r} W_v$ и $\Gamma := \Gamma_1$, т. е. Γ_r – аддитивные функторы из категории $\mathcal{M}_G$ в себя.

ПРИМЕР 4.4.2. Имеют место равенства $\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{\ell^k} F\}]_v = \mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{\ell^k} \mathcal{O}_v\}]$ и $(F[\{L \xrightarrow{\ell^k} F\}])_v = \mathcal{O}_v[\{L \xrightarrow{\ell^k} \mathcal{O}_v\}]$ (и все эти модули – нулевые при $\text{degtr}(L|k) > n - r$); $\Gamma(\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{\ell^k} F\}]) = \Gamma(F[\{L \xrightarrow{\ell^k} F\}]) = 0$, если $L \neq k$.

ЛЕММА 4.4.3. Если $n = \infty$, то имеются канонические изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_G(W, W') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_v}(W_v, W') = \mathrm{Hom}_{G_v}(W_v, W'_v)$$

для любых $W, W' \in \mathcal{S}m_G$. В частности, функтор $(-)_v: \mathcal{S}m_G \rightarrow \mathcal{S}m_{G_v}$ вполне строг.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4.4. Ясно, что функтор $(-)_v$ не сохраняет неприводимость: как правило, сюръекция $W_v \rightarrow H_0(G_v^\dagger, W_v)$ нетривиальна и неинъективна. Например, длина G_v -модуля F/k равна $r + 1$: $(F/k)_v = \mathcal{O}_v/k \supsetneq \mathfrak{m}_v = \mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}_r$.

ЛЕММА 4.4.5. Пусть J – набор алгебраически замкнутых подполей $F'' \subset F$ счетной степени трансцендентности над k . Точность Φ_J эквивалентна любому из следующих условий на J :

– для любого целого $N \geq 1$, любого расширения L поля k конечного типа, любого набора вложений $\xi_j: L \xrightarrow{/k} F_j$ таких, что $F_j \in J$ для всех $1 \leq j \leq N$, и любого $\sigma: L \xrightarrow{/k} F$ существует элемент $\alpha \in \mathbb{Q}[G]$ такой, что $\alpha \xi_j = 0$ для всех $1 \leq j \leq N$ и $\alpha \sigma - \sigma \in \mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F'' \mid F'' \in J\}]$;

– для любого неприводимого k -многообразия X , любого целого $N \geq 1$, любого набора доминантных и не конечных в общей точке k -морфизмов $f_j: X \rightarrow Y_j$, $0 \leq j \leq N$, таких, что f_0 не пропускается через f_j ни для какого $1 \leq j \leq N$, и любой общей точки $\sigma: k(Y_0) \xrightarrow{/k} F$ существует общий 0-цикл $\alpha \in X(F)$ такой, что $(f_j)_* \alpha = 0$ для всех $1 \leq j \leq N$ и $(f_0)_* \alpha - \sigma \in \mathbb{Q}[\{k(Y_0) \xrightarrow{/k} F'' \mid F'' \in J\}]$.

Условия леммы 4.4.5 выполняются для σ в общем положении относительно композита всех $\xi_j(L)$. Это и следующий факт дают основание ожидать, что функтор $(-)_v$ точен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4.6. Пусть H – алгебраическая k -группа, $N \geq 1$ – целое и H_i – k -подгруппа для каждого $0 \leq i \leq N$. Предположим, что H_j нормализует H_i для каждой пары $0 \leq i < j \leq N$ и H_i не содержится в H_0 ни для одного $1 \leq i \leq N$. Обозначим через $f_i: H \rightarrow H/H_i$ соответствующие проекции. Тогда существует 0-цикл $\alpha \in \mathbb{Q}[H(F)]$ такой, что $(f_i)_* \alpha = 0$ для любого $1 \leq i \leq N$ и $(f_0)_* \alpha \neq 0$. Более явно, почти все 0-циклы вида $(h_1 - 1) \cdots (h_N - 1)$, где $h_i \in H_i$ для всех $1 \leq i \leq N$, удовлетворяют этим условиям.

Обозначим через $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{/k} = \mathcal{I}_{F|k}: \mathcal{S}m_G \rightarrow \mathcal{I}_G$ левый сопряженный к функтору включения $\mathcal{I}_G \hookrightarrow \mathcal{S}m_G$, и положим $C_L := \mathcal{I}_{F|k} \mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}]$ для любого конечно порожденного расширения $L|k$, см. теорему 1.1.10, 4).

ЛЕММА 4.4.7. При $n = \infty$ и $r = 1$ проекция $\mathbb{Q}[\{k(X) \xrightarrow{/k} \mathcal{O}_v\}] \rightarrow C_{k(X)}$ сюръективна для любого гладкого полного неприводимого многообразия X над k . В частности, $(C_{k(X)})_v = C_{k(X)}$ и $W_v = W$ (а значит, $\Gamma(W) = W_v = W$) для всех $W \in \mathcal{I}_G$.

ЛЕММА 4.4.8. *Предположим, что $n = \infty$. Тогда $(W_1 \otimes W_2)_v \subseteq (W_1)_v \otimes (W_2)_v$ и $\Gamma(W_1 \otimes W_2) \subseteq \Gamma(W_1) \otimes \Gamma(W_2)$ для любых $W_1, W_2 \in \mathcal{S}m_G$. Однако $(W \otimes W)_v \neq W_v \otimes W_v$, если $W = \mathbb{Q}[F \setminus k]$. Если выполнено одно из условий: или W_1 – фактор $A(F)$ для некоторой коммутативной алгебраической k -группы A , или $W_1 \in \mathcal{I}_G$, то $(W_1 \otimes W_2)_v = (W_1)_v \otimes (W_2)_v$ для любого $W_2 \in \mathcal{S}m_G$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4.9. (i) Если W имеет структуру F -векторного пространства $F \otimes W \rightarrow W$, то, по лемме 4.4.8, W_v обладает структурой $\mathcal{O}_v$ -модуля: $(F \otimes W)_v = \mathcal{O}_v \otimes W_v \rightarrow W_v$. Ясно, что $F \otimes_{\mathcal{O}_v} W_v \rightarrow W$ инъективно, но не сюръективно, как показывает пример $W = F[\{L \xrightarrow{/k} F\}]$.

(ii) Ясно, что Γ_r сохраняет инъекции, но не сюръекции. А именно, пусть $W := \bigotimes_k^N F \rightarrow \Omega_{F|k}^{N-1}$ задано формулой $a_1 \otimes \cdots \otimes a_N \mapsto a_1 da_2 \wedge \cdots \wedge da_N$. Тогда $W_v = \bigotimes_k^N \mathcal{O}_v$, если $n \geq 2N$, так что $(\bigotimes_F^{N-1} \Omega_{F|k_0}^1)_v = \bigotimes_F^{N-1} \Omega_{\mathcal{O}_v|k_0}^1$ для любого $k_0 \subseteq k$; и $\Gamma(\bigotimes_k^N F) = k$, но $\Gamma_r(\Omega_{F|k}^\bullet) = \Omega_{F|k, \text{рег}}^\bullet$ для любого $r \geq 1$ (см. [19]), а в случае $n = \infty$ можно также воспользоваться леммой 4.4.8.

Для целого нормального k -многообразия X с $k(X) \subset F$ пусть $\mathfrak{V}(X)$ – множество всех таких дискретных нормирований поля F ранга один, тривиальных на k , что их ограничения на $k(X)$ или тривиальны, или соответствуют дивизорам на X .

Положим $\mathscr{W}(X) := W^{G_{F|k(X)}} \cap \bigcap_{v \in \mathfrak{V}(X)} W_v \subseteq \mathscr{W}$.

Ясно, что если доминантный морфизм $U \rightarrow X$ переводит дивизоры на U в дивизоры на X , то $\mathfrak{V}(U) \subseteq \mathfrak{V}(X)$, так что $\mathscr{W}(X) \subseteq \mathscr{W}(U)$.

Если $X = U_1 \cup U_2$, то $\mathfrak{V}(X) = \mathfrak{V}(U_1) \cup \mathfrak{V}(U_2)$, поскольку $X^1 = U_1^1 \cup U_2^1$, так что $\mathscr{W}(X) = \mathscr{W}(U_1) \cap \mathscr{W}(U_2)$, т.е. $U \mapsto \mathscr{W}(U)$ для открытых $U \subseteq X$ – пучок в топологии Зариского на X .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4.10. $W^{G_{F|k(X)}} \cap W_v$ зависит только от ограничения v на $k(X)$, поскольку множество $G_{F|k(X)}$ -орбит $G_{F|k(X)} \backslash G/G_v$ нормирований F совпадает, по предложению 2.4.3, с множеством дискретных нормирований $k(X)$ ранга $\leq r$. Например, если ограничение v на $k(X)$ тривиально, то $W^{G_{F|k(X)}} \subseteq W_v$.

ПРИМЕРЫ 4.4.11. (i) Если $V = \mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{/k} F\}]$ или $V = F[\{L \xrightarrow{/k} F\}]$, то $\mathscr{V}(U) = 0$ для любого нетривиального расширения полей $L|k$ конечного типа и любого гладкого U над k .

(ii) Если $V = \Omega_{F|k}^\bullet$, то $\mathscr{V}(U) = \Omega_{\mathcal{O}(U)|k}^\bullet$ для любого гладкого U над k .

(iii) Если $V = \text{Sym}_F^s \Omega_{F|k}^1$, то $\mathscr{V}(U) \subset \text{Sym}_{k(U)}^s \Omega_{k(U)|k}^1$ состоит из элементов с полюсами (по отношению к решетке $\text{Sym}_{\mathcal{O}(U)}^s \Omega_{\mathcal{O}(U)|k}^1$) порядка $< s$ для любой гладкой кривой U над k .

Заметим, что $\mathscr{V}$ функториально по отношению ко всем морфизмам гладких многообразий над k ; $\Gamma(V)$ “гомотопически инвариантно” тогда и только тогда, когда $s = 1$.

(iv) Если $V = W \otimes F$ для некоторого $W \in \mathcal{I}_G$, то $\mathscr{V}(U) = (W^{G_{F|\overline{k(U)}}} \otimes \overline{\mathcal{O}(U)})^{G_{\overline{k(U)}|k(U)}}$ для любого неприводимого гладкого аффинного U над k , где $\overline{\mathcal{O}(U)}$ – целое замыкание алгебры $\mathcal{O}(U)$ в F .

Рассмотрим следующий сайт $\mathfrak{H}$. Объекты $\mathfrak{H}$ – это гладкие многообразия над k . Морфизмы в $\mathfrak{H}$ – локально доминантные морфизмы, преобразующие не доминантные дивизоры в дивизоры. Покрытия – гладкие морфизмы, сюръективные над общей точкой каждого дивизора снизу. Обозначим через $\text{Shv}(\mathfrak{H})$ категорию пучков на $\mathfrak{H}$. Рассмотрим функтор $\Phi: \text{Shv}(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathcal{M}_G$, заданный формулой $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(F) := \lim_{A \rightarrow \text{Spec}(A)} \mathcal{F}(\text{Spec}(A)) \in \mathcal{M}_G$. Здесь A пробегает гладкие k -подалгебры F . (Пример: если $j \leq 1$, то $\mathcal{F}: X \mapsto Z^j(X_L)$ – пучок на $\mathfrak{H}$ и $\mathcal{F}(F) = Z^j(L \otimes_k F)$; в частности, Φ не строг, поскольку $\mathcal{F}(F) = 0$, если $j = 1$ и $L = k$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4.12. *Выбор вложений в F над k полей функций всех неприводимых k -многообразий определяет функтор $\mathcal{M}_G \rightarrow \text{Shv}(\mathfrak{H})$, $V \mapsto \mathcal{V}$.*

ВОПРОС: сопряжен ли он справа к Φ ?

Функтор “специализации”.

ЛЕММА 4.4.13. *Если $r = 1$ и $n = \infty$, то $H_0(G_v^\dagger, -)_v$ задает функторы $\mathcal{M}_G \rightarrow \mathcal{M}_{G_{\kappa(v)|k}}$ и $\mathcal{I}_G \rightarrow \mathcal{I}_{G_{\kappa(v)|k}}$. Естественные гомоморфизмы $G_{\kappa(v)|k}$ -модулей $W^{G_{F|F'}} \rightarrow H_0(G_v^\dagger, W_v)$ сюръективны для всех $W \in \mathcal{M}_G$. Они являются изоморфизмами, если функтор $(-)_v$ точен.*

СЛЕДСТВИЕ 4.4.14. *Для любого неприводимого дивизора D на любом неприводимом многообразии X над k имеется естественный морфизм $C_{k(D)} \rightarrow C_{k(X)}$, если $(-)_v$ точен при $r = 1$.*

Это было бы очевидно, если бы была верна первая часть гипотезы 1.1.11.

ЛЕММА 4.4.15. *Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый функтор на категории гладких многообразий над k (и всех их морфизмов). Предположим, что $\mathcal{F}(\mathcal{O}_v) = \mathcal{F}(F)_v$ (см. текст после предложения 3.4.7). Тогда $H_0(G_v^\dagger, \mathcal{F}(F)_v) = \mathcal{F}(\kappa(v))$.*

ПРИМЕРЫ 4.4.16. (i) Для гладкого полного k -многообразия X и $q \geq 0$ функтор $\mathcal{F}: Y \mapsto CH^q(X \times_k Y)$ удовлетворяет предположениям леммы 4.4.15 и имеет равенство $\mathcal{F}(F) = CH^q(X_F)$.

Изоморфизм $H_0(G_v^\dagger, CH^q(X_F)) = CH^q(X_{\kappa(v)})$ – не что иное, как гомоморфизм специализации $CH^q(X_F) \rightarrow CH^q(X_{\kappa(v)})$ (см. [44]), который $G_v^\dagger$ -инвариантен и потому пропускается через коинварианты $H_0(G_v^\dagger, CH^q(X_F))$.

(ii) Функтор $\mathcal{F}: Y \mapsto \Gamma(\bar{Y}, \Omega_{\bar{Y}|k}^\bullet)$, где $\bar{Y}$ – гладкая компактификация Y , также удовлетворяет условиям леммы 4.4.15 и $\mathcal{F}(F) = \mathcal{F}(F)_v = \Omega_{F|k, \text{per}}^\bullet$.

Редукция по модулю максимального идеала индуцирует сюръекцию $\Omega_{\mathcal{O}_v|k}^\bullet \rightarrow \Omega_{\kappa(v)|k}^\bullet$ и изоморфизм $H_0(G_v^\dagger, \Omega_{F|k, \text{per}}^\bullet) = \Omega_{\kappa(v)|k, \text{per}}^\bullet$.

(iii) $\mathcal{F}: Y \mapsto \mathbb{Q}[\mathcal{O}(Y)]$ – пример функтора с $\mathcal{F}(\mathcal{O}_v) = \mathbb{Q}[\mathcal{O}_v] \neq \mathcal{F}(F)_v = \mathbb{Q}[\mathcal{O}_v \setminus (k + \mathfrak{m}_v)] \oplus \mathbb{Q}[k]$. Однако и в этом случае $H_0(G_v^\dagger, \mathcal{F}(F)_v) = \mathcal{F}(\kappa(v)) = \mathbb{Q}[\kappa(v)]$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4.17. *Пусть X – неприводимое многообразие над k с полем функций, вложенным в F , и $Y \subset X$ – неприводимый дивизор. Дискретные нормирования $v: F^\times/k^\times \rightarrow \Gamma$ поля F ранга 1 такие, что $k(X) \cap \mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{X,Y}$*

(так что $\kappa(v|_{k(X)}) = k(Y)$), образуют единую $G_{F|k(X)}$ -орбиту. Тогда лобое вложение $k(Y) \xrightarrow{\ell^k} F$ индуцирует канонический изоморфизм $W^{G_{F|k(Y)}} \xrightarrow{\sim} H_0(G_v^\dagger, W_v)^{G_{F|k(X)} \cap G_v}$, если $(-)_v$ точен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.4.13, $W^{G_{F|F'}} \xrightarrow{\sim} H_0(G_v^\dagger, W_v)$. Можно показать, что последовательность $1 \rightarrow G_{F|L} \cap G_v^\dagger \rightarrow G_{F|L} \cap G_v \rightarrow G_{\kappa(v)|\kappa(v|_L)} \rightarrow 1$ точна, откуда следует, что

$$(W^{G_{F|F'}})^{G_{\kappa(v)|\kappa(v|_L)}} \xrightarrow{\sim} H_0(G_v^\dagger, W_v)^{G_{F|L} \cap G_v} = H_0(G_v^\dagger, W_v)^{G_{\kappa(v)|\kappa(v|_L)}}.$$

Ограничения на объекты $\mathcal{I}_G$ и на факторы объектов $\mathcal{I}_G \otimes F$. Допустим, что $n = \infty$.

Из леммы 1.2.6 получаются условия $V_v \otimes_{\mathcal{O}_v} F = V$ и $\Gamma(V) \otimes_k F \rightarrow V$ для любого $W \in \mathcal{I}_G$ и любого полулинейного фактора V объекта $W \otimes F$ (“интересные объекты категории $\mathcal{C}$ гладких полулинейных представлений группы G глобально порождены”), но нужно еще проверить, по крайней мере, что эти условия не пусты на множестве неприводимых объектов.

СЛЕДСТВИЕ 4.4.18. Пусть $\mathcal{I}'_G$ – полная подкатегория $\mathcal{I}_G$, для объектов W которой отображение $W^{G_{F|F'}} \rightarrow H_0(G_v^\dagger, W)$ – изоморфизм, где $v \in \mathcal{P}_F^1$ – дискретное нормирование ранга 1. Если $n = \infty$, то $\mathcal{I}'_G$ – абелева категория, замкнутая относительно перехода к подфакторам в $\mathcal{I}_G$.

Доказательство использует леммы 4.1.2 и 4.4.13. Из гипотезы 1.1.11 следует, что $\mathcal{I}'_G = \mathcal{I}_G$.

Пусть $\mathcal{I}_G^+$ (соответственно $\mathcal{C}_-$) – (максимальная) полная подкатегория $\mathcal{S}m_G$ (соответственно $\mathcal{C}$), для объектов W которой выполнено равенство $W = W_v$ (соответственно $W = F \otimes_{\mathcal{O}_v} W_v$). Ясно, что они замкнуты относительно взятия факторов и содержат $\mathcal{I}_G$ (соответственно $\mathcal{I}_G \otimes F$).

ЛЕММА 4.4.19. Допустим, что $(-)_v$ точен. Тогда $\mathcal{I}_G^+$ (соответственно $\mathcal{C}_-$) – подкатегория Серра в $\mathcal{S}m_G$ (соответственно в $\mathcal{C}$). Более того, $\mathcal{I}_G^+ \neq \mathcal{I}_G$.

Функторы включения $\mathcal{I}_G^+ \hookrightarrow \mathcal{S}m_G$ и $\mathcal{C}_- \hookrightarrow \mathcal{C}$ допускают правые сопряженные $W \mapsto \Gamma(W)$ и $V \mapsto \bigcap_v (F \otimes_{\mathcal{O}_v} V_v)$ соответственно, но не допускают левые сопряженные.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4.20. В предположении, что следствие 4.4.17 верно, следующая конструкция должна задавать вполне строгий функтор из $\mathcal{I}_G^+$ в категорию (бirationально инвариантных) функторов на гладких многообразиях над k со всеми, не обязательно гладкими, морфизмами, который является правым квазиобратным функтора $\Phi: \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(F)$ (см. текст перед предложением 4.4.12).

Мы, как обычно, считаем, что поля функций неприводимых многообразий $Y \subset X$ над k вложены в F . Для любого $W \in \mathcal{I}_G^+$ естественный гомоморфизм $W^{G_{F|k(X)}} \rightarrow H_0(G_v^\dagger, W)$ пропускается через $W^{G_{F|k(X)}} \rightarrow H_0(G_v^\dagger, W_v)^{G_v \cap G_{F|k(X)}}$. Согласно следствию 4.4.17, пространство $H_0(G_v^\dagger, W_v)^{G_v \cap G_{F|k(X)}}$ канонически изоморфно $W^{G_{F|k(Y)}}$, если $k(X) \cap \mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{X,Y}$.

4.5. Ограничения объектов $\mathcal{I}_G$ на специальные подгруппы Галуа и $\mathcal{I}$ -индукция. В духе Хоу–Бушнелла–Куцко и др., гладкие представления локально компактной группы можно изучать, ограничивая их на открытые компактные подгруппы.

В случае группы G и $n = \infty$ если ограничиться подкатегорией $\mathcal{I}_G$, то заменой открытых компактных подгрупп служат открытые компактные подгруппы $\mathfrak{G}$ (см. предложение 4.6.1). Зафиксируем подполе K в F , чисто трансцендентное над k , над которым F алгебраично.

Пусть Π – множество классов изоморфизма всех (ненулевых) гладких неприводимых представлений ρ группы $U := G_{F|K}$ над $\mathbb{Q}$ и W – гладкое представление G . Тогда, как U -модуль, W изоморфен прямой сумме всех представлений $\rho \in \Pi$ с некоторыми кратностями $m(\rho) \geq 0$. Пусть $\sigma \in G$ – такой элемент, что $\sigma(K) \subseteq K$. Скручивание ρ^σ представления ρ группы U и вложение $\text{Hom}_U(\rho, W) \hookrightarrow \text{Hom}_U(\rho^\sigma, W)$ были определены в замечании 3.0.7. Там отмечалось, что если $m(\rho) \neq 0$, то и $m(\rho^\sigma) \neq 0$. Кроме того, $m(\rho) = m(\rho^\sigma)$, если $\sigma(K) = K$. Как упоминалось в замечании 3.0.7, любая пара $\rho, \rho' \in \Pi$ сплетена.

Функтор $\mathcal{I}$ -индукции $\mathcal{S}m_U \rightarrow \mathcal{I}_G$ задается (при конечномерном ρ) формулой $\rho \mapsto W_\rho := \mathcal{I}(\mathbb{Q}[G] \otimes_{\mathbb{Q}[G_{F|L}]} \rho)$, где $F^{\ker \rho}$ унирационально над L , поле L конечно порождено над k и U -инвариантно. В общем случае функтор $\mathcal{I}$ -индукции определяется по аддитивности.

ГИПОТЕЗА 4.5.1. 1) Любое неприводимое гладкое представление группы $G_{F|K}$, где K чисто трансцендентно над k и F алгебраично над K , входит в не более чем конечное число неприводимых объектов $\mathcal{I}_G$.

2) Любой неприводимый объект $\mathcal{I}_G$ содержит неприводимое (гладкое) представление группы $G_{F|K}$, которое не входит ни в какой другой неприводимый объект $\mathcal{I}_G$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5.2. (i) Имеется много неприводимых гладких представлений группы $G_{F|K}$, которые не входят ни в один из объектов категории $\mathcal{I}_G$. Например, таковы все нетривиальные $\rho \in \Pi$ такие, что $F^{\ker \rho} \supseteq K$ унирационально (например, чисто трансцендентно) над k .

(ii) Примерами представлений $G_{F|K}$, входящих в единственный неприводимый объект $\mathcal{I}_G$, служат тривиальное одномерное и такие нетривиальные неприводимые $\rho \in \mathcal{S}m_{G_{F|K}}$, входящие хотя бы в один объект $\mathcal{I}_G$, что $F^{\ker \rho}$ – чисто трансцендентное расширение поля функций гладкой проективной кривой над k с простым (ненулевым!) якобианом.

(iii) Выведем часть 1) этой гипотезы из остальных гипотез настоящей работы.

Пусть ρ – неприводимое гладкое представление группы $G_{F|K}$ и $F^{\ker \rho}$ – конечное расширение поля K , т. е. чисто трансцендентное расширение поля L конечного типа над k . Если W содержит ρ , то $G_{F|L}$ имеет неподвижный вектор. Если W неприводим, то имеется сюръекция $C_L \rightarrow W$. В предположении, что верны “все гипотезы”, покажем, что C_L имеет лишь конечное число неприводимых факторов. Факторы уровня j – это факторы $\text{gr}_{\mathcal{F}}^j C_L$. Если C_L совпадает с группой Чжоу $CH_0(X_F)_{\mathbb{Q}}$ для любой гладкой проективной модели X расширения $L|k$, а фильтрация $\mathcal{F}^\bullet$ совпадает с мотивной, то $\text{gr}_{\mathcal{F}}^j C_L$ определяется

мотивом $H^{2 \dim X - j}(X, \mathbb{Q}(\dim X)) \cong H^j(X, \mathbb{Q}(j))$. Поэтому можно считать X j -мерным. В этом случае факторы уровня j – это слагаемые полупростого представления $\mathrm{gr}_j^N CH_0(X_F)_{\mathbb{Q}} = CH_0(k(X) \otimes_k F)_{\mathbb{Q}}$ конечной длины.

4.6. Альтернативные описания $\mathcal{I}_G$. Категорию $\mathcal{I}_G$ можно описать (по крайней мере) еще тремя способами: 1) как категорию невырожденных модулей над некоторой ассоциативной алгеброй с идемпотентами; 2) как полную подкатегорию в $\mathcal{S}m_{\mathfrak{G}}$; 3) как категорию гомотопически инвариантных пучков векторных пространств в доминантной топологии на k (см. п. 3.4).

“Гомотопически инвариантные” представления как невырожденные модули. При $n = \infty$ действие ассоциативной алгебры $\mathbb{D}_E := \varprojlim_U E[G/U]$ “осциллирующих” мер на G (для которых измеримы все открытые подгруппы и их сдвиги), см. замечание 3.0.6, на любом объекте $\mathcal{I}_G(E)$ пропускается через действие ее фактора $\mathbf{C}_E := \varprojlim_L C_L \otimes E$, поскольку морфизм $E[G/G_{F|L}] \otimes E^{G_{F|L}} \rightarrow W$ представлений группы G пропускается через $\mathcal{I}(E[G/G_{F|L}] \otimes E^{G_{F|L}}) = C_L \otimes W^{G_{F|L}} \rightarrow W$.

Для любой компактной подгруппы U в G действие алгебры Гекке $\mathcal{H}_E(U) := h_U * \mathbb{D}_E * h_U$ на W^U для любого $W \in \mathcal{I}_G(E)$ пропускается через действие ее фактора $\mathcal{C}_E(U) := h_U * \mathbf{C}_E * h_U$ в $\mathbf{C}_E$. Например, если F^U чисто трансцендентно над L , а L – конечного типа над k , то $\mathcal{C}_E(U) = C_L^U \otimes E = \mathrm{End}_{\mathcal{I}_G(E)}(C_L \otimes E)$.

Пусть $\mathcal{H}_{\mathcal{I}} := \varprojlim_K \varprojlim_L C_L^{G_{F|K}}$ – ассоциативная алгебра без единицы с идемпотентами. Образы h_K мер Хаара на $G_{F|K}$ для чисто трансцендентных расширений K подполей конечного типа над k в F , над которыми F алгебраично, являются проекторами в алгебре $\mathcal{H}_{\mathcal{I}}$.

Тогда категория $\mathcal{I}_G$ эквивалентна категории невырожденных модулей над $\mathcal{H}_{\mathcal{I}}$, т.е. таких W , что $W = \mathcal{H}_{\mathcal{I}}W$.

Алгебра $\mathcal{H}_{\mathcal{I}}$ не изоморфна алгебре Гекке (локально инвариантных мер с компактными носителями) никакой из локально компактных групп, поскольку любое, например конечномерное, подпространство в $\varprojlim_L C_L^G$ – левый идеал в $\mathcal{H}_{\mathcal{I}}$, чего не бывает в алгебрах Гекке. Действительно, если в алгебре Гекке локально компактной группы есть конечномерный ненулевой левый идеал, то объединение носителей мер из него компактно и левоинвариантно, а значит, группа компактна, и, следовательно, ее гладкие представления полупросты. Из миттаг-леффлеровости системы $(C_L^G)_L$ и теоремы 1.1.10, 5) вытекает, что $\varprojlim_L C_L^G \neq 0$.

Категории $\mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$ и $\mathcal{A}dm_{\mathfrak{G}}$. Категория $\mathcal{I}_G$ при $n = \infty$ допускает также описание в терминах локально компактной группы $\mathfrak{G}$ из п. 2.5. А именно, определим $\mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$ как полную подкатегорию в $\mathcal{S}m_{\mathfrak{G}}$, объекты W которой обладают свойством “гомотопической инвариантности”: $W^{G_{F|LL_m}} = W^{G_{F|LL_m(S)}}$ для любого $m \geq 1$, любого расширения $L|k$ в F конечного типа и любого базиса трансцендентности S поля F над LL_m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6.1. *Забывающий функтор в категорию $\mathfrak{G}$ -модулей индуцирует при $n = \infty$ эквивалентности категорий $\mathcal{I}_G \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$ и $\mathcal{A}dm_G \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\mathfrak{G}} \cap \mathcal{A}dm_{\mathfrak{G}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы построить квазиобратный функтор $\mathcal{I}_{\mathfrak{G}} \rightarrow \mathcal{I}_G$, требуется определить для заданных $W \in \mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$, $v \in W$ и $\sigma \in G$ выражение σv . Найдутся подполе $L \subset F$ конечного типа над k и целое число $m \geq 1$ такие, что стабилизатор v содержит $G_{F|LL_m}$. Пусть $LL_m = L'L_{m'}$, где $L' \subset F$ конечного типа над k , и L' и $L_{m'}$ алгебраически независимы над k .

Пусть $N > m'$ – такое целое число, что $L'\sigma(L')$ и L_N алгебраически независимы над k . Возьмем любой элемент $\sigma' \in G_{F|L_N}$ такой, что $\sigma'|_{L'} = \sigma|_{L'}$, и положим $\sigma v := \sigma'v$. Тогда σv не зависит от выбора N и элемента σ' , так как $v \in W^{G_{F|L'L_{m'}}} = W^{G_{F|L'L_N}}$.

Проверим независимость от L' . Предположим, что подгруппы $G_{F|L'L_{m'}}$ и $G_{F|L''L_{m''}}$ фиксируют $v \in W$. Поскольку $v \in W^{G_{F|L'L''L_{m'}+m''}}$, достаточно рассмотреть случай $L' \subseteq L''$. Как и выше, выберем такое целое $N > m''$, что $L''\sigma(L'')$ и L_N алгебраически независимы над k , и некоторый элемент $\sigma'' \in G_{F|L_N}$ такой, что $\sigma''|_{L''} = \sigma|_{L''}$. Тогда σ'' может также служить в качестве σ' , т.е. $\sigma''v = \sigma'v$.

Это задает отображение $G \times W \rightarrow W$. Ясно, что это – линейное действие и что стабилизатор v содержит открытую подгруппу $G_{F|L'}$, и, значит, W становится объектом $\mathcal{I}_G$.

Поскольку L_j чисто трансцендентно над L_{j+1} для любого $j \gg 1$ и допустимые представления G “гомотопически инвариантны”, забывающий функтор индуцирует $\mathcal{A}dm_G \rightarrow \mathcal{A}dm_{\mathfrak{G}}$, задавая тем самым вторую из эквивалентностей категорий.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6.2. (i) Существуют допустимые, но не “гомотопически инвариантные” представления $\mathfrak{G}$. Например, $\mathbb{Q}(\rho) \notin \mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$ для любого нетривиального характера ρ группы $\mathfrak{G}$.

(ii) $\mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$ замкнута относительно перехода к подфакторам и прямым произведениям (см. замечание 3.0.2, в)), но не относительно расширений в $\mathcal{S}m_{\mathfrak{G}}$. Поскольку любой морфизм из $W \in \mathcal{S}m_{\mathfrak{G}}$ в объект категории $\mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$ пропускается через каноническое отображение в прямое произведение по всем морфизмам из W в представителей всех классов изоморфизма в $\mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$, то существует функтор $\mathcal{I}: \mathcal{S}m_{\mathfrak{G}} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$, сопряженный слева к функтору включения $\mathcal{I}_{\mathfrak{G}} \hookrightarrow \mathcal{S}m_{\mathfrak{G}}$. Функтор $\mathcal{I}$ -индукции из п. 4.5 – это композиция коиндуцирования $\mathcal{S}m_U \rightarrow \mathcal{S}m_{\mathfrak{G}}$, $\mathcal{I}$ и эквивалентности из предложения 4.6.1.

Я благодарен Уве Яннсену за интерес к этой работе, многочисленные советы и обсуждения. Я признателен Институту Высших Научных Исследований (IHES) в Бюр-сюр-Иветт, Математическому институту им. Макса Планка в Бонне и Университету Регенсбурга за гостеприимство.

Список литературы

- [1] N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra. Vol. III: Theory of fields and Galois theory*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, NJ–Toronto, ON–London–New York, 1964.
- [2] И. И. Пятецкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич, “Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30** (1966), 671–704; англ. пер.: I. I. Pjatetskii-Šapiro, I. R. Šafarevič, “Galois theory of transcendental extensions and uniformization”, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **69** (1968), 111–145.

- [3] Г. Шимура, *Введение в арифметическую теорию автоморфных функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: G. Shimura, "Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions", *Kanô Memorial Lectures*, No. 1, Publications of the Mathematical Society of Japan, **11**, Iwanami Shoten, Publ., Tokyo; Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [4] Я. Ихара, "О задачах конгруэнц-монодромии", *Математика (сб. переводов)*, **14**:3 (1970), 40–98; **14**:4 (1970), 48–77; **14**:5 (1970), 62–101; пер. с англ.: Y. Ihara, *On congruence monodromy problems*, vol. 1, Lecture Notes, **1**, Tokyo, 1968.
- [5] W. Krull, "Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen", *Math. Ann.*, **100**:1 (1928), 687–698.
- [6] U. Jannsen, "Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity", *Invent. Math.*, **107**:3 (1992), 447–452.
- [7] M. Rovinsky, "Motives and admissible representations of automorphism groups of fields", *Math. Z.*, **249**:1 (2005), 163–221; *On certain representations of automorphism groups of an algebraically closed field*, [arXiv:math/0101170](https://arxiv.org/abs/math/0101170), 2001.
- [8] A. A. Beilinson, "Height pairing between algebraic cycles", *K-theory, arithmetic and geometry* (Moscow, 1984–1986), Lecture Notes in Math., **1289**, Springer, Berlin, 1987, 1–26.
- [9] S. Bloch, *Lectures on algebraic cycles*, Duke Univ. Math. Ser., **IV**, Duke University, Mathematics Department, Durham, NC, 1980.
- [10] A. Beilinson, "Remarks on n -motives and correspondences at generic point", *Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I* (Irvine, CA, 1998), Int. Press Lect. Ser., **3**, **I**, Int. Press, Somerville, MA, 2002, 35–46.
- [11] M. Rovinsky, *Generic cycles*, Preprint of the Max-Planck-Institut für Mathematik, MPIM1997-80; <http://www.mpim-bonn.mpg.de/preprints/send?bid=628>.
- [12] M. Rovinsky, "Semilinear representations of PGL", *Selecta Math.*, **11**:3–4 (2005), 491–522; [arXiv:math/0306333](https://arxiv.org/abs/math/0306333), 2003.
- [13] Д. Мамфорд, "Рациональная эквивалентность нульмерных циклов на поверхности", *Математика (сб. переводов)*, **16**:2 (1972), 3–10; пер. с англ.: D. Mumford, "Rational equivalence of 0-cycles on surfaces", *J. Math. Kyoto Univ.*, **9** (1969), 195–204.
- [14] А. А. Ройтман, "Рациональная эквивалентность нульмерных циклов", *Матем. сб.*, **89(131)**:4(12) (1972), 569–585; англ. пер.: A. A. Roĭtman, "Rational equivalence of zero-cycles", *Math. USSR-Sb.*, **18**:4 (1972), 571–588.
- [15] U. Jannsen, M. Rovinsky, *Smooth representations and sheaves*, [arXiv.org:0707.3914](https://arxiv.org/abs/0707.3914), 2007.
- [16] M. Rovinsky, "Admissible semi-linear representations", *J. Reine Angew. Math.*, **604** (2007), 159–186; [arXiv.org:math/0506043](https://arxiv.org/abs/math/0506043), 2005.
- [17] W. Krull, "Endomorphismenringe in der Galoisschen Theorie", *Aequationes Math.*, **2**:2–3 (1969), 269–273.
- [18] W. Krull, "Über den Galoisring", *Math. Ann.*, **185**:1 (1970), 25–37.
- [19] M. Rovinsky, *On maximal proper subgroups of field automorphism groups*, [arXiv.org:math/0601028](https://arxiv.org/abs/math/0601028), 2006.
- [20] D. Lascar, "The group of automorphisms of the field of complex numbers leaving fixed the algebraic numbers is simple", *Model theory of groups and automorphism groups* (Blaubeuren, 1995), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **244**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 110–114.
- [21] A. Robert, "Automorphism groups of transcendental field extensions", *J. Algebra*, **16**:2 (1970), 252–270.

- [22] C. J. Ash, J. W. Rosenthal, “Intersections of algebraically closed fields”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **30**:2 (1986), 103–119.
- [23] O. Ore, “Theory of non-commutative polynomials”, *Ann. of Math. (2)*, **34**:3 (1933), 480–508.
- [24] W. Krull, “Über eine Verallgemeinerung des Normalkörperbegriffs”, *J. Reine Angew. Math.*, **191** (1953), 54–63.
- [25] О. Зарисский, П. Самюэль, *Коммутативная алгебра*, т. 2, ИЛ, М., 1963; пер. с англ.: O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra*, vol. II, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Co., Princeton, NJ–Toronto–London–New York, 1960.
- [26] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA–London–Don Mills, ON, 1969.
- [27] Ф. А. Богомолов, “Абелевы подгруппы групп Галуа”, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **55**:1 (1991), 32–67; англ. пер.: F. A. Bogomolov, “Abelian subgroups of Galois groups”, *Math. USSR-Izv.*, **38**:1 (1992), 27–67.
- [28] F. A. Bogomolov, “On two conjectures in birational algebraic geometry”, *Algebraic geometry and analytic geometry* (Tokyo, 1990), ICM-90 Satell. Conf. Proc., Springer, Tokyo, 1991, 26–52.
- [29] F. Bogomolov, Yu. Tschinkel, “Commuting elements in Galois groups of function fields”, *Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I* (Irvine, CA, 1998), Int. Press Lect. Ser., **3**, I, Int. Press, Somerville, MA, 2002, 75–120.
- [30] M. Rovinsky, “On certain isomorphisms between absolute Galois groups”, *Compositio Math.*, **136**:1 (2003), 61–67; [arXiv.org:math/0011176](https://arxiv.org/abs/math/0011176), 2000.
- [31] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964, Lecture Notes in Math., **269**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1972.
- [32] П. Т. Джонстон, *Теория топосов*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: P. T. Johnstone, *Topos theory*, London Mathematical Society Monographs, **10**, Academic Press, London–New York–San Francisco, 1977.
- [33] И. Н. Бернштейн, А. В. Зелевинский, “Представления группы $GL(n, F)$, где F – локальное неархимедово поле”, *УМН*, **31**:3 (1976), 5–70; англ. пер.: J. H. Bernstein, A. V. Zelevinskii, “Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a non-Archimedean local field”, *Russian Math. Surveys*, **31**:3 (1976), 1–68.
- [34] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Ser., **33**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
- [35] U. Jannsen, “Motivic sheaves and filtrations on Chow groups”, *Motives* (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 245–302.
- [36] V. Voevodsky, “Triangulated categories of motives over a field”, *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., **143**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, 188–238.
- [37] M. Levine, “Mixed motives”, *Math. Surveys Monogr.*, **57**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [38] M. Hanamura, “Mixed motives and algebraic cycles. I”, *Math. Res. Lett.*, **2**:6 (1995), 811–821; “Mixed motives and algebraic cycles. III”, *Math. Res. Lett.*, **6**:1 (1999), 61–82.
- [39] U. Jannsen, *Mixed motives and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Math., **1400**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [40] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Физматлит, М., 2004; пер. с англ.: S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **5**, Springer-Verlag, New York, 1998.

- [41] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk, “Torification and factorization of birational maps”, *J. Amer. Math. Soc.*, **15** (2002), 531–572; [arXiv.org:math/9904135](https://arxiv.org/math/9904135), 1999.
- [42] J. Włodarczyk, *Toroidal varieties and the weak factorization theorem*, [arXiv.org:math/9904076](https://arxiv.org/math/9904076), 1999.
- [43] Ю. И. Манин, “Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования”, *Матем. сб.*, **77(119)**:4 (1968), 475–507; англ. пер.: Ju. I. Manin, “Correspondences, motifs and monoidal transformations”, *Math. USSR-Sb.*, **6**:4 (1968), 439–470.
- [44] P. Samuel, “Rational equivalence of arbitrary cycles”, *Amer. J. Math.*, **78**:2 (1956), 383–400.

М. З. Ровинский (M. Z. Rovinskii)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;

Независимый Московский университет

E-mail: marat@mccme.ru

Поступила в редакцию

04.08.2007