Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Болдин, Знаковые тесты в простейшей авторегрессии с коэффициентом из $\mathbb{R}^1$, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:43:49

ЗНАКОВЫЕ ТЕСТЫ В ПРОСТЕЙШЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ИЗ $\mathbb{R}^1$

М. В. Болдин

1. Рассмотрим простейшую схему авторегрессии

$$(1) \quad u_i = \beta u_{i-1} + \varepsilon_i, \quad u_0 = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

в которой $\{\varepsilon_i\}$ — н.о.р. сл.в. с неизвестной функцией распределения $G(x)$, неизвестный параметр $\beta \in \mathbb{R}^1$.

Пусть наблюдения $u_1, \dots, u_n$, $n \geq 2$, порождаются соотношением (1). Цель работы — построить и изучить в схеме (1) локально наиболее мощные (ЛНМ) непараметрические знаковые тесты для проверки гипотезы $H_0: \beta = \beta_0$ при всех возможных β_0 . При гипотезе наши знаковые тесты будут свободны от $G(x)$ для конечных n при единственном условии

$$(i) \quad P(\varepsilon_1 < 0) = P(\varepsilon_1 > 0) = \frac{1}{2}.$$

Общепотребительные тесты, основанные на оценке наименьших квадратов, свободны от $G(x)$ лишь асимптотически при ограничениях $E\varepsilon_1^2 < \infty$, $|\beta_0| \leq 1$.

2. Для $\theta \in \mathbb{R}^1$ обозначим $S_k(\theta) = \text{sign}(u_k - \theta u_{k-1})$. Будем основывать знаковые тесты на векторе $\mathbf{S}^n(\beta_0) = (S_1(\beta_0), \dots, S_n(\beta_0))$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (i), $E\varepsilon_1 = 0$, $E|\varepsilon_1|^{1+\Delta} < \infty$ при некотором $\Delta > 0$, существует $G'(x) = g(x)$ и $\sup_x g(x) < \infty$, $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица в нуле. Тогда ЛНМ тест для проверки H_0 против односторонних альтернатив, основанный на векторе знаков $\mathbf{S}^n(\beta_0)$, при любом β_0 имеет статистикой $l_n(\beta_0)$, где

$$l_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n-1} \theta^{t-1} \sum_{k=t+1}^n S_{k-t}(\theta) S_k(\theta).$$

Введем величину $d_n(\beta)$, равную при $|\beta| < 1$, $|\beta| = 1$, $|\beta| > 1$ соответственно

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} n^{1/2}, \quad 2^{-1/2} \beta n, \quad (\beta^2 - 1)^{-1} \beta^n.$$

Последовательность $|d_n(\beta)|$ определяет такую репараметризацию статистического эксперимента, связанного со схемой (1), что репараметризованный эксперимент сходится к невырожденному предельному [1, Chapter 5]. Пусть дальше ν -стандартная гауссовская величина, и для $|\beta_0| > 1$ $\xi = \sum_{i \geq 1} \beta_0^{-(i-1)} \text{sign } \varepsilon_i$. Пусть ξ' не зависит от ξ и одинаково с ней распределена.

ТЕОРЕМА 2. Пусть справедлива гипотеза H_0 . Тогда распределение $l_n(\beta_0)$ при условии (i) свободно от $G(x)$ для любого n . При $n \rightarrow \infty$ и (i) для $|\beta_0| < 1$, $|\beta_0| = 1$, $|\beta_0| > 1$ $d_n^{-1}(\beta_0) l_n(\beta_0)$ слабо сходится соответственно к ν , $2^{-1/2}(\nu^2 - 1)$, $\beta_0^{-2}(\beta_0^2 - 1)\xi\xi'$.

Существенно, что знаковые тесты можно строить не только при больших, но умеренных и даже малых объемах выборок. Распределение тестовой статистики при гипотезе зависит от β_0 при конечных n , но его легко оценить методом статистических испытаний.

Рассмотрим близкие альтернативы $H_{1n}(a): \beta = \beta_0 + d_n^{-1}(\beta_0)a$, a — константа. Следующие теоремы доказаны без привлечения третьей леммы Ле Кама, прямое доказательство позволяет избежать излишних ограничений на $G(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $|\beta_0| < 1$ и верна альтернатива $H_{1n}(a)$. Тогда при условиях теоремы 1 имеет место слабая сходимость $d_n^{-1}(\beta_0)l_n(\beta_0)$ к $\nu + 2g(0)E|\varepsilon_1|(1 - \beta_0^2)^{-1/2}a$, $n \rightarrow \infty$.

Пусть β_{LS}^* — оценка наименьших квадратов для β . Если $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 < \infty$, $|\beta_0| < 1$, то $d_n^{-1}(\beta_0)(\beta_{LS}^* - \beta_0)$ сходится слабо к $\nu + (1 - \beta_0^2)^{-1/2}a$ при $H_{1n}(a)$. Отсюда асимптотическая относительная эффективность Питмена знакового теста относительно теста, основанного на оценке наименьших квадратов, равна $e_{S,LS} = (2g(0)E|\varepsilon_1|)^2$, она не зависит от β_0 и параметра масштаба $G(x)$. Для Гауссовской $G(x)$ $e_{S,LS} = (2/\pi)^2$, для Лапласовской $e_{S,LS} = 1$, для $G(x)$ с тяжелыми хвостами $e_{S,LS}$ может быть сколь угодно большой. Другие результаты для случая $|\beta_0| < 1$ см. в [2], обобщения на стационарную многопараметрическую авторегрессию — в [3].

Введем величину

$$\begin{aligned}\sigma^2(a) = & 1 + 2g(0)E|\varepsilon_1|(1 + (\sqrt{2}a)^{-1}(1 - e^{\sqrt{2}a})) \\ & + 4g^2(0)E\varepsilon_1^2(1 + 2(\sqrt{2}a)^{-1}(1 - e^{\sqrt{2}a}) - (2\sqrt{2}a)^{-1}(1 - e^{2\sqrt{2}a})).\end{aligned}$$

При $a = 0$ доопределим $\sigma^2(a)$ по непрерывности единиц.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $|\beta_0| = 1$ и верна альтернатива $H_{1n}(a)$. Тогда при условиях (i), $E\varepsilon_1 = 0$, $E|\varepsilon_1|^2 < \infty$, $\sup_x |g'(x)| < \infty$ имеет место слабая сходимость $d_n^{-1}(\beta_0)l_n(\beta_0)$ к $2^{-1/2}(\sigma^2(a)\nu^2 - 1)$, $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\{\varepsilon'_i\}$ — н.о.р. сл.в. с функцией распределения $G(x)$. Положим

$$\eta = \sum_{i \geq 1} \beta_0^{-(i-1)} \text{sign}(\varepsilon'_i + \beta_0^{-2}(\beta_0^2 - 1)au),$$

где $u = \sum_{i \geq 1} \beta_0^{-(i-1)}\varepsilon_i$. При $E \log^+ |\varepsilon_1| < \infty$ последний ряд сходится абсолютно с вероятностью единица.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $|\beta_0| > 1$, $G(x)$ непрерывна, $E \log^+ |\varepsilon_1| < \infty$. Тогда при альтернативе $H_{1n}(a)$ $d_n^{-1}(\beta_0)l_n(\beta_0)$ слабо сходится к $\beta_0^{-2}(\beta_0^2 - 1)\xi\eta$, $n \rightarrow \infty$.

Теоремы 3–5 позволяют вычислять нетривиальную асимптотическую мощность знаковых тестов при близких альтернативах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shiryaev A. N., Spokoiny V. G. Statistical Experiments and Decisions: Asymptotic Theory. Moscow: Math. Institute RAS (to appear). [2] Boldin M. V., Tyurin Yu. N. // Math. Methods Statist. 1994. V. 3. № 4. P. 279–305. [3] Boldin M. V. // Math. Methods Statist. 1995. V. 4. № 4. P. 435–448.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
23.04.1997