Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Реповш, М. Б. Скопенков, М. Ценцель, Гомотопический тип дополнения к погружению и классификация вложений торов, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:20:50

Гомотопический тип дополнения к погружению и классификация вложений торов

Д. Реповш, М. Б. Скопенков, М. Ценцель

Данная заметка посвящена классификации вложений многомерных многообразий. Это проблема активно изучалась в 1960-е годы [1], [2], в последнее время интерес к ней возобновился [3]–[5]. Исследование этой задачи началось с рассмотрения узлов $S^q \rightarrow S^m$, для которых была получена явная классификация в небольшом числе размерностей и полная *рациональная* классификация в коразмерности ≥ 3 :

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть $q+2 < m < 3q/2+2$. Тогда множество гладких вложений $S^q \rightarrow S^m$ с точностью до изотопии бесконечно, если и только если $q+1$ делится на 4.

Мы изучаем случай вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$. Вложения такого вида мы называем *заузленными торами*. Классическим частным случаем заузленных торов являются зацепления (см. рис. 1а). Изучение заузленных торов – следующий естественный шаг после узлов и зацеплений ввиду разбиения произвольного многообразия на ручки.

Рис. 1

Рис. 2

Множество заузленных торов в пространстве достаточно большой размерности, а именно при *метастабильном* ограничении $m \geq p + 3q/2 + 2$, $p \leq q$, было явно описано в [4]. Метастабильное ограничение является границей применимости классических методов теории вложений. Цель данной заметки – рассказать о подходе, который позволяет получить результаты для меньших размерностей:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p + 4q/3 + 2 < m < p + 3q/2 + 2$ и $m > 2p + q + 2$. Тогда множество гладких вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ с точностью до гладкой изотопии бесконечно, если и только если $q+1$ или $p+q+1$ делится на 4.

Наш подход к классификации основан на изучении погружений и гомотопического типа дополнений к ним.

Дадим необходимые определения. Зафиксируем точки $u \in S^p$, $v \in S^q$ и шар $B = B^{p+q} \subset S^p \times S^q$, не пересекающий меридиан $S^p \times v$ и параллель $u \times S^q$ нашего тора (рис. 1b). Кусочно гладкое отображение $F: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ называется *почти вложением*, если F является гладким вложением вне шара B и $FB \cap F(S^p \times S^q \setminus B) = \emptyset$. Аналогично определяется *почти изотопия*, только B заменяется на $B \times I$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество почти вложений $F: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ с точностью до почти изотопии. Как показано в [5], множество $\mathcal{M}$ обладает естественной структурой группы.

Первый и третий авторы поддержаны Агентством по науке Республики Словения (программа № 101-509). Второй автор поддержан программой “Ведущие научные школы” (грант НШ-4578.2006.1), программой Министерства образования и науки РФ (проект РНП-2.1.1.7988), грантами РФФИ № 02-01-00014, 05-01-00993, 06-01-72551, 07-01-00648 и грантом INTAS № 06-1000014-6277.

Описание группы $\mathcal{M}$ – существенно более простая задача, чем классификация вложений, и решается классическими методами. Тем самым, доказательство теоремы 2 сводится к такой задаче: *определить, когда данное почти вложение почти изотопно вложению*. Наша центральная лемма утверждает, что полное препятствие к этому лежит в конечной группе:

ЛЕММА 2.1. *Пусть $p+4q/3+2 < m < p+3q/2$ и $m > 2p+q+2$. Тогда существует гомоморфизм $\beta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$ в некоторую конечную группу $\mathcal{G}$, обладающий следующим свойством: если $\beta(F) = 0$, то F почти изотопно некоторому вложению (гладкому вне шара B).*

Приведем схему доказательства теоремы 2 в случае, когда $q+1$ делится на 4, в предположении, что лемма 2.1 доказана. Можно показать, что в этом случае группа $\mathcal{M}$ бесконечна (и конечно порождена). Тогда и группа $|\mathcal{G}| \cdot \mathcal{M}$ бесконечна. Для каждого $F \in |\mathcal{G}| \cdot \mathcal{M}$ имеем $\beta(F) = 0$, поэтому каждое такое F почти изотопно некоторому вложению (гладкому вне шара B). Сглаживая эти вложения, мы получим бесконечно много различных гладких вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2.1 основано на следующей трехшаговой конструкции (см. рис. 2).

Шаг 1. Построение паутины D^{p+1} . Пусть $F: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ – произвольное почти вложение. Заклеим меридиан $F(S^p \times v)$ диском $D^{p+1} \subset S^m$, не пересекающим остальную часть тора $F(S^p \times S^q)$. Это возможно по общему положению, так как $m > 2p+q+2$. Назовем такой диск D^{p+1} *паутиной*.

Шаг 2. Построение паутины D^{q+1} . Построить вторую паутину $D^{q+1} \subset S^m$, заклеивающую параллель $F(u \times S^q)$, по общему положению не удастся. Предположим вначале, что такая паутина существует.

Шаг 3. Коническая конструкция. Выбросим из сферы S^m окрестность объединения наших паутин. По общему положению паутины имеют единственную общую точку, поэтому в результате мы получим m -мерный шар D^m . Можно считать, что $D^m \cap F(S^p \times S^q) = FB$. Заменяя FB на конус над $F\partial B$ внутри шара D^m , мы превращаем F в искомое вложение.

Дальнейшая схема доказательства леммы 2.1 такова. Искомый гомоморфизм $\beta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$ является препятствием к существованию паутины $D^{q+1} \subset S^m$. Оно лежит в группе $\pi_q(D^m - \text{Im } F, \partial D^m - \text{Im } F)$, где D^m – дополнение к окрестности паутины D^{p+1} в S^m . Эта группа вычисляется методами статьи [3; § 4] и в интересующем нас случае оказывается конечной.

Список литературы

- [1] A. Haefliger, *Ann. of Math.* (2), **83**:3 (1966), 402–436. [2] A. Haefliger, *Comment. Math. Helv.*, **41**:1 (1966), 51–72. [3] N. Habegger, U. Kaiser, *Topology*, **37**:1 (1998), 75–94. [4] A. Skopenkov, *Comment. Math. Helv.*, **77**:1 (2002), 78–124. [5] A. Skopenkov, *Classification of embeddings below the metastable dimension*, [arXiv: math/0607422](https://arxiv.org/abs/math/0607422).

Д. Реповш (D. Repovš)
University of Ljubljana, Slovenia
E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
01.08.2007

М. Б. Скопенков (M. B. Skopenkov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: skopenkov@rambler.ru

М. Ценцель (M. Cencelj)
University of Ljubljana, Slovenia