Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Ким, И. Б. Кожухов, О полугруппах изотонных преобразований частично упорядоченных множеств, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8526>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 02:24:09

О полугруппах изотонных преобразований частично упорядоченных множеств

В. И. Ким, И. Б. Кожухов

Обозначим через $T(X)$ полугруппу всех преобразований множества X , т.е. отображений $\alpha: X \rightarrow X$ с умножением, определенным по формуле $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$. Алгебраическое строение полугруппы $T(X)$ хорошо известно (см., например, [1]). Полугруппа $T(X)$ регулярна, т.е. для любого $\alpha \in T(X)$ существует $\beta \in T(X)$ такое, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Если X – множество, наделенное некоторой структурой, то естественно рассматривать такие преобразования, которые согласованы с этой структурой. Например, если X – топологическое пространство, то интерес представляет полугруппа $C(X)$ всех непрерывных отображений $X \rightarrow X$ (см. обзор [2]). Если X – универсальная алгебра, то полугруппа всех преобразований $X \rightarrow X$, сохраняющих операции, есть полугруппа эндоморфизмов $\text{End } X$, играющая важную роль в общей алгебре. Если X – частично упорядоченное множество, то пусть $O(X)$ обозначает полугруппу всех преобразований $\alpha: X \rightarrow X$ множества X , сохраняющих порядок, т.е. $x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha$ для всех $x, y \in X$. Назовем такие преобразования *изотонными*. Различные вопросы, связанные с полугруппами изотонных преобразований, были освещены в обзоре [3]. Полугруппа $O(X)$ содержит большую информацию о частично упорядоченном множестве X . Л. М. Глускиным было доказано (см. [4]), что изоморфизм $O(X) \cong O(Y)$ полугрупп преобразований двух частично упорядоченных множеств X и Y (даже квазиупорядоченных) влечет, что X изоморфно или антиизоморфно Y .

Полугруппа $O(X)$ регулярна далеко не всегда. Прежде чем формулировать условия регулярности этой полугруппы, введем некоторые определения и обозначения. Цепь – линейно упорядоченное множество; антицепь – частично упорядоченное множество X такое, что $x \not\leq y$ при любых $x, y \in X$. Пусть Y – произвольное непустое множество, x_0 и z_0 – любые элементы, не принадлежащие Y . Положим $L_Y = \{x_0, z_0\} \cup Y$ и определим порядок на L_Y следующим образом: $x_0 < y < z_0$ при всех $y \in Y$ (остальные пары элементов не связаны отношением “ $<$ ”). Далее, пусть Y и Z – произвольные непустые множества и $Y \cap Z = \emptyset$. Положим $F_{Y,Z} = Y \cup Z$ с введенным на этом множестве порядком $a < b \Leftrightarrow a \in Y \ \& \ b \in Z$. Для непустых непересекающихся множеств Y, Z с выделенными в них элементами $y_0 \in Y, z_0 \in Z$ положим $G_{Y,Z} = Y \cup Z$ с введенным на этом множестве порядком $a < b \Leftrightarrow (a = y_0 \ \& \ b \in Z) \vee (a \in Y \ \& \ b = z_0)$. Наконец, пусть $C_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ с порядком $1 < 4, 6, 2 < 4, 5, 3 < 5, 6$. Следующая теорема, принадлежащая А. Я. Айзенштат, дает условия регулярности полугруппы $O(X)$ для широкого класса частично упорядоченных множеств.

ТЕОРЕМА 1 [5]. Пусть X – частично упорядоченное множество, не являющееся цепью. Тогда полугруппа $O(X)$ регулярна в том и только том случае, если X – антицепь или X изоморфно одному из множеств $L_Y, F_{Y,Z}, G_{Y,Z}, C_6$.

Условия регулярности полугруппы $O(X)$ в случае, когда X – цепь, были даны в [5] в терминах некоторого бинарного отношения, определенного на множестве пар (X_1, α) , где $X_1 \subseteq X$, а α – изотонное вложение X_1 в X . Мы получили для счетных цепей X более прозрачные условия регулярности полугруппы $O(X)$. Формулировку результатов приведем после некоторых определений.

Пусть Γ – цепь (не обязательно счетная). Сечением (A, B) называется разбиение $\Gamma = A \cup B$ цепи Γ на два непустых подмножества A и B таких, что $a < b$ при всех $a \in A, b \in B$. Сечение (A, B) назовем дырой, если множество A не имеет точной верхней грани (а значит, множество B не имеет точной нижней грани). Цепь называется полной, если никакое ее сечение не является дырой. Для элемента $x \in \Gamma$ полагаем $x^\Delta = \{y \mid y \leq x\}$, $x^\nabla = \{y \mid y \geq x\}$.

ТЕОРЕМА 2 [6]. Пусть Γ – счетная цепь. Тогда полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий: 1) Γ – полная цепь,

имеющая минимальный и максимальный элементы; 2) Γ не имеет максимального, но имеет минимальный элемент и для любого $x \in \Gamma$ множество x^Δ удовлетворяет условию максимальнойности; 3) Γ не имеет минимального, но имеет максимальный элемент и для любого $x \in \Gamma$ множество x^∇ удовлетворяет условию минимальности; 4) $\Gamma \cong \mathbb{Z}$; 5) Γ имеет минимальный и максимальный элементы, $\Gamma = A \cup B$ и (A, B) – дыра, причем для любого $x \in A$ множество x^Δ удовлетворяет условию максимальнойности и для любого $x \in B$ множество x^∇ удовлетворяет условию минимальности.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Γ – счетная цепь, причем полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна. Если Γ имеет дыру, то эта дыра единственна.

Назовем элемент a полугруппы S слабо регулярным справа, если $a \in aSaS$, и слабо регулярным слева, если $a \in SaSa$. Полугруппа называется слабо регулярной справа (слева), если все ее элементы слабо регулярны справа (слева). Рассмотрение главных факторов полугрупп (см. [1]) показывает, что в конечных полугруппах понятия регулярного ($a \in aSa$) и слабо регулярного слева (справа) элемента совпадают. Естественно поставить вопрос об условиях слабой регулярности полугруппы изотонных преобразований частично упорядоченного множества. Оказывается, что ряд утверждений, на основе которых доказывается теорема 1, обобщается с регулярных на слабо регулярные полугруппы, как показывает приводимое ниже предложение. Частично упорядоченное множество X назовем связным, если наименьшее отношение эквивалентности на X , содержащее отношение $\leq$, совпадает с $X \times X$. Это равносильно тому, что граф отношения $\leq$ на X связан.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1) Пусть X – частично упорядоченное множество. Если полугруппа $O(X)$ слабо регулярна слева или справа, то либо X связно, либо X – антицепь. 2) Если X – связное частично упорядоченное множество и полугруппа $O(X)$ слабо регулярна слева или справа, то каждая цепь в X содержит не более трех элементов.

Утверждение 1) в этом предложении остается верным, если условие слабой регулярности полугруппы $O(X)$ заменить следующим условием: “каждый элемент полугруппы $O(X)$ слабо регулярен слева или справа”.

Образование $\alpha \in T(X)$ назовем конечным, если $|X\alpha| < \infty$, и коконечным, если $|X \setminus X\alpha| < \infty$. Множество $O_{\text{fin}}(X)$ всех конечных и множество $O_{\text{cofin}}(X)$ всех коконечных изотонных преобразований множества X – полугруппы, являющиеся подполугруппами полугруппы $O(X)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. 1) Для любой цепи Γ полугруппа $O_{\text{fin}}(\Gamma)$ регулярна. 2) Если Γ – бесконечная счетная цепь, то полугруппа $O_{\text{cofin}}(\Gamma)$ не регулярна.

Список литературы

- [1] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Т. 2, Мир, М., 1972.
 [2] K. D. Magill, Jr., *Semigroup Forum*, **11**:1 (1976), 189–282. [3] V. A. Molchanov, *Semigroup Forum*, **27**:1 (1983), 155–199. [4] Л. М. Глускин, *УМН*, **16**:5 (1961), 157–162. [5] А. Я. Айзенштат, *Уч. Записки Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена*, **387** (1968), 3–11. [6] В. И. Ким, И. Б. Кожухов, *Фундам. и прикл. матем.*, **12**:8 (2006), 97–104.

В. И. Ким (V. I. Kim)

Московский государственный институт
электронной техники (технический университет)
E-mail: victor-kim@mail.ru

Представлено А. В. Михалёвым

Принято редколлегией
01.08.2007

И. Б. Кожухов (I. B. Kozhukhov)

Московский государственный институт
электронной техники (технический университет)
E-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru