Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Кожухов, О самоинъективных полугрупповых кольцах, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm853>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 09:53:53

О САМОИНЪЕКТИВНЫХ ПОЛУГРУППОВЫХ КОЛЬЦАХ

И. Б. Кожухов

Хорошо известная теорема Рено-Вудс [7], [8] утверждает, что групповое кольцо RG самоинъективно справа тогда и только тогда, когда кольцо R самоинъективно справа, а группа G конечна. Аналогичный результат получен автором в [2] для полугрупповых колец инверсных полугрупп. К настоящему времени неизвестно, влечет ли самоинъективность (односторонняя) полугруппового кольца RS конечность полугруппы S . В [6] доказано, что это действительно так в следующих случаях: а) RS самоинъективно слева и справа; б) S – полупростая полугруппа; в) R – поле, а S не более чем счетна. Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, S – полугруппа с единицей и нулем, RS – сжатое полугрупповое кольцо. Если RS самоинъективно справа, то S содержит лишь конечное число левых идеалов вида Se , где $e^2 = e$.

Необходимые сведения из теории полугрупп можно найти в [1], из теории колец – в [4], из теории полугрупповых колец – в [6]. Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными и имеющими единицу.

Доказательству теоремы предпослём ряд лемм. Напомним, что полугруппа S называется *исчезающей слева*, если для любой последовательности $a_1, a_2, \dots$ ее элементов найдется число n такое, что $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 = 0$.

ЛЕММА 1. Пусть R – кольцо с единицей, S – полугруппа с единицей и нулем, RS – сжатое полугрупповое кольцо. Если RS самоинъективно справа, то полугруппа S имеет ряд идеалов $0 \subset S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n = S$, факторы которого S_i/S_{i-1} являются вполне 0-простыми или исчезающими слева полугруппами, и все подгруппы полугруппы S конечны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как инъективные модули являются алгебраически компактными (см. [9, предложение 2.1]), то кольцо RS алгебраически компактно справа. Утверждение леммы следует теперь из теоремы 3.10 работы [5].

ЛЕММА 2. Если RS самоинъективно справа и S – бесконечная полугруппа, то RS совершенно справа, а R Σ -алгебраически компактно справа (определение см. в [10]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как RS – алгебраически компактный правый RS -модуль, то RS является также алгебраически компактным правым R -модулем. Но RS – свободный R -модуль бесконечного ранга. Следовательно (по определению) кольцо R Σ -алгебраически компактно справа, а значит (см. [9, предложение 2.5]) R совершенно справа. По лемме 1 существует ряд $0 \subset S_0 \subset \dots \subset S_n = S$ идеалов такой, что при каждом i либо S_i/S_{i-1} – исчезающая слева полугруппа, либо $S_i/S_{i-1} \cong M^0(G, i, \Lambda, P)$ – вполне 0-простая полугруппа, причем (ввиду теорем 3.20 и 4.4 из [5]) G – конечная группа, а сэндвич-матрица P имеет лишь конечное число попарно неравных строк. Тот факт, что RS совершенно справа, следует теперь из теоремы работы [3].

ЛЕММА 3. Если RS самоинъективно справа, $0 \subset S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n = S$ – ряд идеалов, описанный в лемме 1, G – максимальная подгруппа полугруппы S (а значит, $G \subseteq S_i \setminus S_{i-1}$ при некотором i) и u – минимальный идемпотент из RG , то u можно представить в виде $u = v + w$, где v – минимальный идемпотент из RS , а $w \in RS_{i-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предыдущей лемме RS совершенно справа, следовательно (см. [4, предложение 22.19]), RS – полулокальное SBI-кольцо. Лемма 22.28 из [4] показывает, что идемпотент u является суммой конечного числа попарно ортогональных минимальных идемпотентов кольца RS . Ясно, что найдется такой минимальный идемпотент $v \leq u$, что $\text{supp}(v) \cap (S_i \setminus S_{i-1}) \neq \emptyset$. Пусть e – единица группы G . Так как $v = ve = vve = ve$, аналогично, $v = ev$, то $v \in eRSe$. Это означает, что v представляется в виде $v = v' + v''$, где $v' \in RG$,

а $v'' \in RS_{i-1}$. Далее, $v = vu = v'u + v''u$, причем $v'u \in RG$, $v''u \in RS_{i-1}$. Отсюда следует, что $v' = v'u$. Аналогично получаем $v' = uv'$. Следовательно, $v' \leq u$. Так как $v' \neq 0$, то $v' = u$. Таким образом, $u = v' = v - v''$, где v — минимальный идемпотент из RS и $v'' \in RS_{i-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда регулярный D -класс $S_i \setminus S_{i-1}$ полугруппы S содержит бесконечно много L -классов. Отсюда следует, что существует бесконечное множество $\{e_\alpha\}$ идемпотентов из $S_i \setminus S_{i-1}$, которые лежат в разных L -классах. Пусть G_α — максимальные подгруппы с идемпотентами e_α . По лемме 1 $S_i/S_{i-1} \cong M^0(G, i, \Lambda, P)$, где G — конечная группа. Кроме того, R — совершенное кольцо. По теореме Рено-Вудс групповое кольцо RG совершенно, следовательно, в нем есть минимальные ненулевые идемпотенты. Пусть u_α — какие-либо минимальные ненулевые идемпотенты кольца RG_α . По лемме 3 $u_\alpha = v_\alpha + x_\alpha$, где v_α — минимальный идемпотент из RG_α , а $x_\alpha \in RS_{i-1}$. Согласно утверждениям 18.23.1 и 18.23.2 из [4] кольцо RS имеет конечный набор ортогональных неразложимых идемпотентов $f_1, \dots, f_m$, дающих в сумме 1, а ввиду 18.23.3 каждый правый идеал $v_\alpha RS$ изоморфен одному из $f_i RS$. Но идемпотентов v_α бесконечно много, поэтому $v_\alpha RS \cong v_\beta RS$ при некоторых α, β таких, что $\alpha \neq \beta$. Используя самоинъективность кольца RS и критерий Бэра, получим: $v_\beta = yv_\alpha$ при некотором $y \in RS$. Отсюда следует: $u_\beta - x_\beta = y(u_\alpha - x_\alpha)$. Так как $x_\alpha, x_\beta \in RS_{i-1}$, то $yx_\alpha \in RS_{i-1}$, следовательно, $u_\beta = yu_\alpha \pmod{RS_{i-1}}$, а значит, $b = sa$ для некоторых $a \in G_\alpha, b \in G_\beta, s \in S$. Это влечет включение $e_\beta \in Se_\alpha$, поэтому e_α и e_β лежат в одном L -классе полугруппы S , что противоречит предположению. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, 2. М.: Мир, 1972.
- [2] Кожухов И. Б. // Изв. вузов. Сер. матем. 1981. № 2 (225). С. 46–51. [3] Кожухов И. Б., Фinkelъштейн М. Я. // Изв. вузов. Сер. матем. 1987. № 12. С. 45–48. [4] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1, 2. М.: Мир, 1979. [5] Klyushin A. V., Kozhukhov I. B. // Semigroup Forum. 1989. V. 39. P. 215–248. [6] Okninski J. Semigroup algebras. New York: Marcel Dekker, 1991. [7] Renault G. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1971. V. 273. № 2. P. A84–A87. [8] Woods S. M. // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 27. № 1. P. 49–52. [9] Zimmermann W. // Comm. Algebra. 1977. V. 5. P. 1083–1117. [10] Zimmermann W. // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 23. P. 319–328.