Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, Однородные коммутативные ортогональные разложения полупростых алгебр, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 08:12:51

Однородные коммутативные ортогональные разложения полупростых алгебр

Д. Н. Иванов

В статье доказывается теорема о строении алгебр, допускающих ортогональное разложение (ОР) в сумму полупростых d -мерных коммутативных подалгебр. Доказанная теорема – важный шаг на пути исследования гипотезы о делимости размерности таких алгебр на d^2 . В [1] эта гипотеза была доказана в случае $d = 2$. Также, формулируется гипотеза, обобщающая старую гипотезу о порядках конечных плоскостей и сравнительно недавние гипотезы об аффинных 2-схемах и простых алгебрах Ли типа A_n , допускающих ортогональные разложения в сумму картановских подалгебр.

Напомним основные определения. Пусть $\mathbf{A}$ – ассоциативная конечномерная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебра, через $\text{Tr}_{\mathbf{A}}$ обозначим след регулярного представления $\mathbf{A}$. Тогда $\text{Tr}_{\mathbf{A}} xy$ является симметричной инвариантной формой на $\mathbf{A}$, которую мы будем называть *формой следа*. Известно, что алгебра $\mathbf{A}$ полупроста тогда и только тогда, когда форма следа невырождена на $\mathbf{A}$. Далее будут рассматриваться полупростые алгебры и термин “алгебра” будет обозначать ассоциативную конечномерную над $\mathbb{C}$ полупростую алгебру. Таким образом, по теореме Веддербарна алгебра $\mathbf{A}$ изоморфна конечной прямой сумме матричных алгебр $M_n(\mathbb{C}) = M_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство неединичных собственных подалгебр $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_i, i = 1, \dots, r\}$ образует *ортогональное разложение* (ОР) алгебры $\mathbf{A}$, если все подалгебры $\mathbf{B}_i$ полупросты, содержат единичный элемент $\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$ и выполняется условие ортогональности: алгебра $\mathbf{A}$ является прямой суммой попарно ортогональных подпространств $\mathbf{A} = \langle \mathbf{1}_{\mathbf{A}} \rangle \oplus \mathbf{B}_1^{\circ} \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_r^{\circ}$, где $\mathbf{B}_i^{\circ} = \{x \in \mathbf{B}_i \mid \text{Tr}_{\mathbf{A}} x = 0\}$.

Если все подалгебры ОР $\mathcal{D}$ коммутативны, то $\mathcal{D}$ называется *коммутативным*. Если все подалгебры в $\mathcal{D}$ изоморфны алгебре $\mathbf{B}$, то $\mathcal{D}$ называется *однородным ОР типа $\mathbf{B}$* (или просто *ОР типа $\mathbf{B}$*). Через kM_n будем обозначать прямую сумму k экземпляров алгебры матриц M_n . Однородное ОР типа dM_1 называется *d -разложением*.

Отметим, что понятие однородного коммутативного ОР обобщает ряд известных понятий. Так, матрицы Адамара порядка n эквивалентны 2-разложениям алгебры nM_1 , конечные аффинные плоскости порядка n эквивалентны n -разложениям алгебры n^2M_1 , аффинные 2-схемы эквивалентны однородным ОР коммутативных алгебр, ортогональные разложения простых алгебр Ли типа A_{n-1} эквивалентны n -разложениям алгебры M_n . В [2] доказана следующая фундаментальная теорема.

ТЕОРЕМА 1. Алгебра $\mathbf{A}$ является свободным (левым, правым) модулем над каждой подалгеброй из семейства, образующего коммутативное ОР алгебры $\mathbf{A}$.

Применяя теорему 1 к d -разложениям, получаем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть подалгебры $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_r\}$ образуют d -разложение алгебры $\mathbf{A}$, $\dim \mathbf{A} = n$. Пусть $\text{Pr}(\mathbf{B}_s) = \{e_{1s}, \dots, e_{ds}\}$ – примитивные идемпотенты подалгебры $\mathbf{B}_s$, $s = 1, \dots, r$. Тогда

- 1) $\text{Tr}_{\mathbf{A}} e_{1s} = \dots = \text{Tr}_{\mathbf{A}} e_{ds} = n/d$ для любого $s = 1, \dots, r$, в частности, n кратно d ;
- 2) элементы $\mathbf{1}_{\mathbf{A}}, e_{js}, j = 1, \dots, d-1, s = 1, \dots, r$, образуют базис в $\mathbf{A}$, в частности, $r = (n-1)/(d-1)$;
- 3) для любого $X \in \mathbf{A}$

$$n \text{Tr}_{\mathbf{A}} X^2 = d \sum_{s=1}^r ((\text{Tr}_{\mathbf{A}} X e_{1s})^2 + \dots + (\text{Tr}_{\mathbf{A}} X e_{ds})^2) - (r-1)(\text{Tr}_{\mathbf{A}} X)^2. \quad (1)$$

Следующая теорема является основной.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00485-а).

ТЕОРЕМА 2. Если алгебра $\mathbf{A} = vM_1 \oplus M_{n_1} \oplus \dots \oplus M_{n_k}$, где $n_i > 1$ при $i = 1, \dots, k$, допускает d -разложение, содержащее r подалгебр, то

1) $n_1, \dots, n_k$ кратны d ,

2) v ратно d и существует разрешимая блок-схема на v точках, содержащая r классов параллельных блоков, так что каждые две точки встречаются вместе в $(r-1)/d$ блоках и мощности блоков сравнимы с v/d по модулю d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть tr – след матрицы, E_m – единичная матрица порядка m , $X = (X_0, X_1, \dots, X_k) \in \mathbf{A}$, где $X_0 = (x_1, \dots, x_v) \in vM_1$, $X_i \in M_{n_i}$, $i = 1, \dots, k$. Тогда $\text{Tr}_{\mathbf{A}} X = x_1 + \dots + x_v + n_1 \text{tr } X_1 + \dots + n_k \text{tr } X_k$. Пусть подалгебры $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_r\}$ образуют d -разложение алгебры $\mathbf{A}$, $\text{Pr}(\mathbf{B}_s) = \{e_{1s}, \dots, e_{ds}\}$. Будем отождествлять элементы алгебр $vM_1, M_{n_1}, \dots, M_{n_k}$ с их каноническими образами в алгебре $\mathbf{A}$. Положим $\dim \mathbf{A} = n$, тогда по лемме 1 имеем $r = (n-1)/(d-1)$.

1) Покажем, что $n_1, \dots, n_k$ кратны d . Подставив в (1) $X = (0, \dots, 0, E_{n_i}, 0, \dots, 0)$, где E_{n_i} – единичная матрица в M_{n_i} , получим

$$nn_i^2 = d \sum_{s=1}^r n_i^2 ((\text{tr } E_{n_i} e_{1s})^2 + \dots + (\text{tr } E_{n_i} e_{ds})^2) - (r-1)n_i^4. \quad (2)$$

Положим $\text{tr } E_{n_i} e_{js} = a_{js}$. Тогда $a_{1s} + \dots + a_{ds} = n_i$, и так как $E_{n_i} e_{js}$ является идемпотентом в M_{n_i} , то $a_{js} \in \mathbb{Z}$. В этом случае несложно показать, что либо $a_{1s}^2 + \dots + a_{ds}^2 \geq n_i^2/d + (d-1)/d$, либо $a_{1s} = \dots = a_{ds} = n_i/d$. Пусть не выполняется последнее условие. Тогда, после сокращения (2) на n_i^2 , выводим

$$n = d \sum_{s=1}^r (a_{1s}^2 + \dots + a_{ds}^2) - (r-1)n_i^2 \geq dr \left(\frac{n_i^2}{d} + \frac{d-1}{d} \right) - (r-1)n_i^2 = n + n_i^2 - 1.$$

Это противоречит тому, что $n_i > 1$. Значит, $a_{1s} = \dots = a_{ds} = n_i/d \in \mathbb{Z}$.

2) В силу леммы 1 n ратно d , и в силу пункта 1) n_i кратны d , значит, $v = n - n_1^2 - \dots - n_k^2$ ратно d . Обозначим через $(b_{js}^1, \dots, b_{js}^v)$ каноническую проекцию идемпотента e_{js} на подалгебру vM_1 . Подставим в (1) $X = ((x_1, \dots, x_v), 0, \dots, 0)$:

$$n(x_1^2 + \dots + x_v^2) = d \sum_{s=1}^r \sum_{j=1}^d (x_1 b_{js}^1 + \dots + x_v b_{js}^v)^2 - (r-1)(x_1 + \dots + x_v)^2. \quad (3)$$

Через N обозначим $(v \times rd)$ -матрицу, составленную из столбцов $(b_{js}^1, \dots, b_{js}^v)^t$. Из (3) получаем $dNN^t = nE_v + (r-1)J_v$, где J_v – матрица из одних единиц. Следовательно, N является матрицей инцидентности искомой блок-схемы. В силу п. 1) мощности блоков сравнимы с n/d , а значит, и с v/d по модулю d . Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если алгебра $\mathbf{A}$ коммутативна, т.е. $v = \dim \mathbf{A}$, то $\dim \mathbf{A}$ делится на d^2 , так как (в обозначениях теоремы 2) $e_{is_1} e_{js_2}$ есть идемпотент и, значит, при $s_1 \neq s_2$ $\dim \mathbf{A}/d^2 = \text{Tr}_{\mathbf{A}} e_{is_1} e_{js_2} \in \mathbb{Z}$.

2) Для некоторых значений $d \neq 2$ существуют разрешимые блок-схемы с указанными в теореме 2 свойствами, для которых v не делится на d^2 .

ГИПОТЕЗА 1. Если алгебра $\mathbf{A}$ допускает d -разложение, то $d = p^m$ для некоторого простого p и натурального n . При этом если $d \neq 2$, то $\dim \mathbf{A}$ является степенью d .

Автор благодарен М. В. Зайцеву и А. В. Михалёву за внимание к работе.

Список литературы

- [1] Д. Н. Иванов, УМН, 60:2 (2005), 163–164; англ. пер.: D. N. Ivanov, Russian Math. Surveys, 60:2 (2005), 357–358. [2] Д. Н. Иванов, Матем. сб., 189:12 (1998), 83–102; англ. пер.: D. N. Ivanov, Sb. Math., 189:12 (1998), 1819–1838.