Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гайфуллин, Явное построение многообразий, реализующих заданные классы гомологий, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:59:41

Явное построение многообразий, реализующих заданные классы гомологий

А. А. Гайфуллин

Хорошо известна задача Н. Стиррода о реализации классов гомологий образами фундаментальных классов многообразий. В настоящей заметке мы даем явную комбинаторную конструкцию, которая по циклу строит кусочно линейное многообразие, реализующее с некоторой кратностью целочисленный класс гомологий этого цикла. Конструкция основана на процедуре локального разрешения особенностей цикла. Подход к проблеме Н. Стиррода, основанный на разрешении особенностей псевдомногообразий, был впервые предложен Д. Сулливаном [1]. Построенные им препятствия к разрешению особенностей псевдомногообразия являются элементами конечного порядка, поэтому из результатов [1] легко следует, что разрешение особенностей “с некоторой кратностью” возможно всегда. Наша задача заключается в том, чтобы дать явную конструкцию такого разрешения особенностей.

Нам будет удобно работать с псевдомногообразиями, разбитыми на *простые клетки*. Простая клетка – это замкнутый диск, граница которого наделена разбиением на грани, двойственным кусочно линейной триангуляции сферы. Строгие определения простой клетки и разбиения на простые клетки можно найти в [2]. Примерами разбиений на простые клетки служат симплициальные и кубические разбиения, а также клеточное разбиение, двойственное кусочно линейной триангуляции многообразия. Все многообразия и псевдомногообразия предполагаются замкнутыми.

Пусть Z – ориентированное n -мерное псевдомногообразие, разбитое на простые клетки. *Задача разрешения особенностей* псевдомногообразия Z : построить ориентированное кусочно линейное многообразие M и отображение $g: M \rightarrow Z$ такие, что над дополнением к $(n-2)$ -мерному остову разбиения Z отображение g является конечнолистным накрытием.

Центральная конструкция. Пусть каждой $(n-1)$ -мерной клетке разбиения Z сопоставлена метка из некоторого конечного множества. Множество меток $(n-1)$ -мерных клеток, содержащих клетку F , мы будем называть *меткой* клетки F и обозначать через $c(F)$. Разметку мы будем называть *хорошей*, если $|c(F)| = n - \dim F$ для любой клетки F , причем для каждой n -мерной клетки $G \supset F$ метки всех $(n-1)$ -мерных клеток H таких, что $F \subset H \subset G$, попарно различны.

ЛЕММА. *Для каждого псевдомногообразия Z , разбитого на простые клетки, имеется псевдомногообразие $\bar{Z}$ с разбиением на простые клетки, допускающим хорошую разметку, и отображение $\bar{Z} \rightarrow Z$, являющееся накрытием на дополнении к остову коразмерности 2 и отображающее каждую клетку разбиения $\bar{Z}$ изоморфно на некоторую клетку разбиения Z .*

Таким образом, в дальнейшем мы можем считать, что на разбиении Z задана хорошая разметка. Пусть F – клетка разбиения Z , $\dim F = k < n$. Обозначим через L_F множество n -мерных клеток, содержащих F . Из наличия хорошей разметки следует, что клетки $G \in L_F$ могут быть раскрашены в два цвета правильным образом, т.е. так, что никакие две клетки одного цвета не имеют общей гиперграни. При этом количество клеток первого цвета равно количеству клеток второго цвета. Обозначим через P_F множество инволюций на множестве L_F , изменяющих цвета всех клеток на противоположные. Обозначим через P декартово произведение множеств P_F по всем клеткам F разбиения Z .

Обозначим через U множество наборов $(F_0, F_1, \dots, F_n)$, где $F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_n$ – клетки разбиения Z и $\dim F_i = n - i$. Положим $V = U \times P \times \mathbb{Z}_2^n$.

Определим инволюции $\Phi_j^\varepsilon: V \rightarrow V$, $\varepsilon = 0, 1$, $j = 1, \dots, n$, по формулам

$$\begin{aligned}\Phi_j^0(F_0, F_1, \dots, F_n, (\Lambda_F), h) &= (F_0, F_1, \dots, F_{j-1}, F_j^*, F_{j+1}, \dots, F_n, (\Lambda_F), h), \\ \Phi_j^1(F_0, F_1, \dots, F_n, (\Lambda_F), h) &= (\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n, (\tilde{\Lambda}_F), h + e_j),\end{aligned}$$

где $\Lambda_F \in P_F$, $h \in \mathbb{Z}_2^n$, $(e_1, \dots, e_n)$ – базис группы $\mathbb{Z}_2^n$ и

- 1) F_j^* – единственная отличная от F_j клетка такая, что $F_{j-1} \subset F_j^* \subset F_{j+1}$;
- 2) $\tilde{F}_i = F_i$ при $i \geq j$; $\tilde{F}_0 = \Lambda_{F_j}(F_0)$; если $0 < i < j$, то $\tilde{F}_i$ – единственная клетка такая, что $\tilde{F}_j \subset \tilde{F}_i \subset \tilde{F}_0$ и $c(\tilde{F}_i) = c(F_i)$;
- 3) если $c(F) \not\supset c(F_j)$, то $\tilde{\Lambda}_F = \Lambda_F$;
- 4) если $c(F) \supset c(F_j)$ и $G \in L_F$, то $\tilde{\Lambda}_F(G) = (\Lambda_{H_2} \circ \Lambda_F \circ \Lambda_{H_1})(G)$, где H_1 – единственная клетка такая, что $F \subset H_1 \subset G$ и $c(H_1) = c(F_j)$, и H_2 – единственная клетка такая, что $F \subset H_2 \subset \Lambda_F(\Lambda_{H_1}(G))$ и $c(H_2) = c(F_j)$.

Положим $M = [0, 1]^n \times V / \sim$, где $\sim$ – отношение эквивалентности, порожденное отождествлениями $(t_1, \dots, t_n, \Phi_j^\varepsilon(v)) \sim (t_1, \dots, t_n, v)$, если $t_j = \varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$, $j = 1, \dots, n$. Непосредственно проверяется, что $\Phi_j^0 \Phi_k^1 = \Phi_k^1 \Phi_j^0$ при $j \neq k$ и $\Phi_j^1 \Phi_k^1 = \Phi_k^1 \Phi_j^1$. Из этого следует, что M – ориентированное кусочно линейное многообразие. Искомое отображение $g: M \rightarrow Z$ определяется по формуле

$$g(t_1, \dots, t_n, F_0, \dots, F_n, (\Lambda_F), h) = \left(\prod_{i=1}^n (1 - t_i) \right) b(F_0) + \sum_{j=1}^n \left(t_j \prod_{i=j+1}^n (1 - t_i) \right) b(F_j),$$

где $b(F)$ – барицентр клетки F .

Таким образом, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Центральная конструкция дает отображение $g: M \rightarrow Z$, решающее задачу разрешения особенностей псевдомногообразия Z . Пусть X – топологическое пространство и $f: Z \rightarrow X$ – сингулярный цикл. Тогда сквозное отображение $f \circ g: M \rightarrow X$ реализует класс гомологий, кратный классу гомологий цикла f .*

В качестве приложения теоремы 1 дадим решение следующей задачи: по заданному набору ориентированных симплицальных сфер $Y_1, \dots, Y_k$ построить ориентированное симплицальное многообразие, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором $Y_1, \dots, Y_k$. Для существования такого многообразия необходимо, чтобы вершины триангуляций $Y_1, \dots, Y_k$ могли быть разбиты на пары такие, что линки вершин в каждой паре изоморфны с обращением ориентации (условие сбалансированности).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $Y_1, \dots, Y_k$ – сбалансированный набор ориентированных симплицальных сфер. Имеется явная конструкция, дающая симплицальное многообразие, набор линков вершин которого с точностью до изоморфизма имеет вид*

$$\underbrace{Y_1, \dots, Y_1}_{r}, \dots, \underbrace{Y_k, \dots, Y_k}_{r}, K_1, \dots, K_l, -K_1, \dots, -K_l,$$

где $-K_i$ есть симплицальная сфера K_i с обращенной ориентацией.

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за постановки задач и внимание к работе.

Список литературы

- [1] D. Sullivan, *Lecture Notes in Math.*, **209**, 1971, 196–206. [2] А. А. Гайфуллин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68:5** (2004), 13–66.

А. А. Гайфуллин (А. А. Gaifullin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gaifull@mccme.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
08.10.2007