Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Жгун, Д. В. Миронов, Разделяющие системы камер Вейля для системы корней D_l , *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:49:53

Разделяющие системы камер Вейля для системы корней D_l

В. С. Жгун, Д. В. Миронов

В работе [1], мотивированной задачей, поставленной в работе [2], авторами были получены оценки сверху на индекс разделения для неприводимых систем корней. Среди оценок, приведенных в работе [1] для неприводимых систем корней, асимптотически наилучшей (в зависимости от ранга) была оценка порядка 2^l для систем корней B_l и C_l . В этой работе мы предлагаем оценку асимптотически такого же порядка для индекса разделения системы корней типа D_l . Мы построим разделяющую систему камер Вейля с количеством камер, асимптотически эквивалентным 2^l .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. Подмножество S множества камер Вейля неприводимой системы корней Δ называется *разделяющей системой камер Вейля*, если выполняется следующее условие:

для всякой ненулевой линейной функции $l \in V^*$ существует камера Вейля C из S такая, что $l|_C \geq 0$, $C \cap \text{Ker } l = \{0\}$ (камеру Вейля C мы считаем замкнутой). Камеру C с таким свойством мы будем называть разделяющей для функции l .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2]. Индексом разделения $\text{sep}(\Delta)$ системы корней Δ называется минимум чисел элементов в разделяющих системах камер Вейля системы корней Δ .

Напомним, что система D_l состоит из корней $\{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}$, где ε_i образуют ортонормированный базис. Зафиксируем систему простых корней Π , состоящую из корней $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ для $i = 1, \dots, l-1$ и $\alpha_l = \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l$. Обозначим через C_0 доминантную камеру Вейля. Младшим корнем этой системы будет корень $\alpha_0 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Гиперплоскость, ортогональную α_0 , мы обозначим через H_0 . Рассмотрим корни, лежащие в этой гиперплоскости. Несложно проверить непосредственно (см. также [1]), что они образуют приводимую систему корней Δ_0 типа $A_1 \times D_{l-2}$. Будем считать, что $l \geq 6$. В этих предположениях подсистема корней D_{l-2} неприводима и не равна A_3 .

Подсистема A_1 порождена простым корнем α_1 . В системе корней D_{l-2} в качестве множества простых корней можно выбрать корни $\alpha_3, \dots, \alpha_l$. Обозначим через H_{01} линейную оболочку этих корней.

Группу, порожденную отражениями, соответствующими корням из системы D_{l-2} , мы обозначим через $W(D_{l-2})$ и будем считать ее подгруппой в $W(D_l)$.

Рассмотрим камеру Вейля C со стенками, перпендикулярными корням $\alpha_0, \dots, \alpha_{l-1}$ (эти корни образуют систему простых корней типа D_l , поэтому такая камера Вейля существует). Обозначим через π_i , где $i = 0, \dots, l-1$, примитивные веса, порождающие ребра камеры Вейля C . Заметим, что $(l-2)$ -мерная стенка этой камеры, натянутая на веса π_i для $2 \leq i \leq l-1$, содержится в H_{01} . Камера C определяет подсистему $\Delta^+(C)$ положительных корней в Δ , относительно которой эта камера доминантна. Тем самым определено множество положительных корней в системе D_{l-2} как пересечение $\Delta^+(C_{\alpha_0}) := \Delta^+(C) \cap H_{01}$. Определим следующую камеру: $C_{\alpha_0} := \{v \in \langle \Delta \rangle \mid \langle v, \alpha \rangle \geq 0 \text{ для } \alpha \in \Delta^+(C_{\alpha_0})\}$. Непосредственно видно, что в $C_{\alpha_0} \supset C$, причем $C_{\alpha_0} \cap H_{01}$ является камерой Вейля для D_{l-2} .

Будем строить разделяющую систему камер по индукции. Пусть $W^{\text{sep}}(D_{l-2}) \subset W(D_{l-2})$ – такое подмножество в группе Вейля, что множество камер $\{wC_{\alpha_0} \mid w \in W^{\text{sep}}(D_{l-2})\}$ является разделяющей системой камер для системы корней D_{l-2} .

Рассмотрим камеру C_0 , соответствующую системе простых корней $\Pi \subset \Delta$. Ее ребра натянуты на фундаментальные веса $\omega_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$ для $1 \leq i \leq l-2$, $\omega_{l-1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l)$, $\omega_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l)$. Камера C_0 пересекает плоскость, натянутую на корни $-\alpha_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (этот корень является ребром камеры C_0) и $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, по конусу с ребрами $-\alpha_0$ и ε_1 . Пусть s – элемент группы Вейля, переводящий вес ε_1 в $-\varepsilon_2$, вес ε_2 в ε_1 , а на остальных весах действующий произвольным образом.

Тогда камера sC_0 пересекает плоскость, натянутую на α_0 и α_1 , по конусу с ребрами α_1 , $-\varepsilon_2$.

ТЕОРЕМА 3. В качестве разделяющей системы камер Вейля для $\Delta = D_l$ при $l \geq 6$ можно взять следующие два множества камер: $S_1 = \{wC, s_{\alpha_0}wC, s_{\alpha_1}wC, s_{\alpha_0}s_{\alpha_1}wC\}$, где $w \in W^{\text{sep}}(D_{l-2})$, $S_2 = \{C_0, sC_0, s^2C_0, s^3C_0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем линейную функцию $l_\chi(\cdot) = \langle \chi, \cdot \rangle$ для некоторого вектора χ . Представим χ в виде суммы попарно ортогональных векторов: $\chi = a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \chi_\perp$. При этом $l_{\chi_\perp}(\cdot) = \langle \chi_\perp, \cdot \rangle$ можно рассматривать как функцию на H_{01} .

Если $\chi_\perp \neq 0$, то выберем разделяющую камеру из S_1 . Применением s_{α_0} и s_{α_1} к χ можно добиться, чтобы $a_0 \geq 0$, $a_1 \geq 0$. Так как множество камер S_1 инвариантно относительно отражений s_{α_0} и s_{α_1} , то достаточно рассмотреть лишь те χ , которые удовлетворяют этим условиям.

Для таких χ мы покажем, что разделяющую камеру можно найти среди множества камер wC , где $w \in W^{\text{sep}}(D_{l-2})$. Действительно, найдется $w \in W^{\text{sep}}(D_{l-2})$ такой, что камера Вейля $wC_{\alpha_0} \cap H_{01}$ является разделяющей для элемента $\chi_\perp$. Докажем, что $l_\chi > 0$ на камере wC . Применяя w^{-1} , замечаем, что достаточно проверить неравенство для камеры C и веса χ , для которого выполнены неравенства $a_0 \geq 0$, $a_1 \geq 0$, а функция $l_{\chi_\perp}$ строго положительна на камере C_{α_0} , за исключением точки нуля. Пусть $\lambda \in C$. Тогда λ можно представить в виде $\lambda = b_0\pi_0 + b_1\pi_1 + \lambda_\perp$, где $b_0 \geq 0$, $b_1 \geq 0$, а $\lambda_\perp \in C \cap H_{01}$. Докажем следующие неравенства: $\langle \chi_\perp, \lambda_\perp \rangle > 0$, $\langle \chi_\perp, \pi_0 \rangle > 0$, $\langle \chi_\perp, \pi_1 \rangle > 0$, где в первом неравенстве мы считаем, что $\lambda_\perp \neq 0$.

Для этого заметим, что $C \cap H_{01} \subset C_{\alpha_0}$. Так как $l_{\chi_\perp}$ строго положительна на камере C_{α_0} , то отсюда следует первое из неравенств. Далее заметим, что отсюда также следует, что $\chi_\perp$ принадлежит внутренности конуса, порожденного $\Delta^+(C_{\alpha_0})$, и, в частности, принадлежит внутренности конуса, порожденного положительными корнями $\Delta^+(C)$ системы Δ . Отсюда следует, что $\chi_\perp > 0$ на всей камере Вейля C , кроме нуля, что влечет последние два неравенства.

Докажем, что $l_\chi(\lambda) > 0$. Действительно, $l_\chi(\lambda) = \langle a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \chi_\perp, b_0\pi_0 + b_1\pi_1 + \lambda_\perp \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + b_0\langle \chi_\perp, \pi_0 \rangle + b_1\langle \chi_\perp, \pi_1 \rangle + \langle \chi_\perp, \lambda_\perp \rangle > 0$.

Когда $\chi_\perp = 0$, мы выберем разделяющую камеру из S_2 . Действием элемента s^{-k} для $0 < k < 4$ можно свести задачу к случаю $a_0 < 0$, $a_1 \geq 0$. Докажем, что тогда функция $l_\chi(\cdot)$ строго положительна на камере C_0 . Для ребер ω_i , учитывая, что α_0 — младший корень, имеем $l_\chi(\omega_i) = \langle a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1, \omega_i \rangle \geq a_0\langle \alpha_0, \omega_i \rangle > 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Выполнено равенство $\text{sep}(D_l) \leq 4\text{sep}(D_{l-2}) + 4$.

Из работы [1] для систем D_4 и D_5 известны следующие оценки индекса разделения: $\text{sep}(D_4) \leq 66$, $\text{sep}(D_5) \leq 482$. По индукции получаем следующие формулы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если l четно и не меньше 4, то $\text{sep}(D_l) \leq (101/3)2^{l-3} - 4/3$. Если l нечетно и не меньше 5, то $\text{sep}(D_l) \leq (725/3)2^{l-4} - 4/3$.

Авторы благодарят В. Л. Попова за постановку задачи и Э. Б. Винберга за обсуждение ряда вопросов. Э. Б. Винберг указал авторам на оценки $\text{sep}(A_l) \leq (l+1)2^{l+1}$ и $\text{sep}(D_l) \leq l \cdot 2^{l-1}$, которые позволяют улучшить константы в предложении 5.

Список литературы

- [1] В. С. Жгун, Д. В. Миронов, *Матем. заметки*, **82:2** (2007), 310–314. [2] V. L. Porov, *J. Algebra*, **313:1** (2007), 392–416; [arXiv:math/0609003](https://arxiv.org/abs/math/0609003), 2006.

В. С. Жгун (V. S. Zhgoon)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: zhgoon@mail.ru

Представлено Э. Б. Винбергом

Принято редколлегией
08.10.2007

Д. В. Миронов (D. V. Mironov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: mironovd@mccme.ru