Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Сабитова, Корни Артина абелевых многообразий,
УМН, 2007, том 62, выпуск 6, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:35:08

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Корни Артина абелевых многообразий

М. Н. Сабитова

Изучается корень Артина $W(A, \tau)$, ассоциированный с абелевым многообразием A размерности g над числовым полем F и непрерывным комплексным неприводимым (конечномерным) представлением τ группы Галуа $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ поля F с вещественнозначным характером. Корень $W(A, \tau) = \pm 1$ входит в гипотетическое уравнение для L -функции $L(A, \tau, s)$, ассоциированной с A и τ .

Получено следующее обобщение теоремы Д. Рорлика [1; с. 313, предложение E], доказанной для эллиптических кривых, на случай абелевых многообразий.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F — числовое поле, L — его конечное расширение Галуа, τ — комплексное неприводимое представление группы $\text{Gal}(L/F)$ с вещественнозначным характером и g — произвольное фиксированное натуральное число. Если подгруппы (группы $\text{Gal}(L/F)$) разложения всех простых дивизоров поля L , делящих все простые числа $\leq 2g + 1$, абелевы и индекс Шура $m_{\mathbb{Q}}(\tau)$ равен 2, то $W(A, \tau) = 1$ для всякого абелева многообразия A размерности g над F .

При доказательстве теоремы 1 используется формула

$$W(A, \tau) = \prod_v W(A_v, \tau_v),$$

где v пробегает все простые дивизоры поля F , $A_v = A \times_F F_v$, F_v обозначает пополнение поля F относительно v и τ_v — ограничение τ на $\text{Gal}(\bar{F}_v/F_v) \hookrightarrow \text{Gal}(\bar{F}/F)$.

В действительности справедливо следующее более сильное утверждение, из которого следует теорема 1.

ТЕОРЕМА 2. В предположениях теоремы 1 имеем: $W(A_v, \tau_v) = 1$ для всех v .

Доказательство теоремы 2 проводится в несколько этапов. Сначала дается описание локального корня $W(A_v, \tau_v)$. Если v конечно, то

$$W(A_v, \tau_v) = W(\sigma'_v \otimes \tau_v) = \frac{\varepsilon(\sigma'_v \otimes \tau_v, \psi_v, dx_v)}{|\varepsilon(\sigma'_v \otimes \tau_v, \psi_v, dx_v)|},$$

где ψ_v — нетривиальный аддитивный характер поля F_v , dx_v — мера Хаара на F_v и σ'_v — представление группы Вейля–Делиня $\mathcal{W}'(\bar{F}_v/F_v)$, ассоциированное с естественным представлением группы $\text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ в одномерной l -адической группе когомологий $H_l^1(A_v)$; здесь l — произвольное простое число, отличное от характеристики $\text{char}(k_v)$ поля вычетов k_v поля F_v , и τ_v рассматривается как представление группы $\mathcal{W}'(\bar{F}_v/F_v)$.

В случае, когда A_v – абелево многообразие с потенциально хорошей редукцией, по критерию Нерона–Огга–Шафаревича σ'_v является представлением группы Вейля $\mathscr{W}(\bar{F}_v/F_v)$. Если $\text{char}(k_v) > 2g + 1$, то, используя теорию Серра–Тэйта и теорию представлений для описания класса σ'_v в группе Гротендика виртуальных представлений группы $\mathscr{W}(\bar{F}_v/F_v)$, получим следующую формулу:

$$W(\sigma'_v \otimes \tau_v) = \det \tau_v(-1)^{l_1} \cdot \beta^{\dim \tau} \cdot \gamma^{l_2} \cdot (-1)^{\langle \nu_v, \tau_v \rangle}, \quad (1)$$

где $l_1 \in \mathbb{Z}$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = \pm 1$, $l_2 = \langle 1, \tau_v \rangle + \langle \eta_v, \tau_v \rangle$, η_v – неразветвленный квадратичный характер мультипликативной группы поля $F_v^\times$ и ν_v – представление группы $\text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$, реализуемое над $\mathbb{Q}$ (ср. [1; с. 318, теорема 1]).

В случае произвольного абелева многообразия A_v используется теория униформизации абелевых многообразий. В соответствии с этой теорией существуют такие полуабелево многообразие G_v над F_v и дискретная подгруппа Y_v группы G_v , что A_v изоморфно “фактору” G_v/Y_v . Здесь Y_v – этальный пучок свободных абелевых групп над $\text{Spec}(F_v)$ ранга r , а многообразие G_v является элементом точной последовательности $0 \rightarrow T_v \rightarrow G_v \rightarrow B_v \rightarrow 0$, где B_v – абелево многообразие над F_v с потенциально хорошей редукцией и T_v – тор над F_v размерности r . Для описания σ'_v используем формулу М. Рейно, описывающую действие группы инерции I_v на точках кручения порядка l^n абелева многообразия над неархимедовым локальным полем в случае, когда данные униформизации расщепляются. С помощью этой формулы можно показать, что

$$\sigma'_v \cong \kappa_v \oplus (\chi_v \otimes \omega_v^{-1} \otimes \text{sp}(2)), \quad (2)$$

где κ_v – представление группы $\mathscr{W}'(\bar{F}_v/F_v)$, ассоциированное с естественным представлением группы $\text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ в $H_l^1(B_v)$, $\chi_v: \text{Gal}(\bar{F}_v/F_v) \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{Z})$ – естественное представление группы $\text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ в $Y_v(\bar{F}_v)$ и $\text{sp}(2)$ обозначает специальное двумерное представление группы $\mathscr{W}'(\bar{F}_v/F_v)$. Так как корень Артина прямой суммы представлений группы $\mathscr{W}'(\bar{F}_v/F_v)$ равен произведению корней Артина этих представлений, из (2) получим

$$W(\sigma'_v \otimes \tau_v) = W(\kappa_v \otimes \tau_v) W(\chi_v \otimes \omega_v^{-1} \otimes \tau_v \otimes \text{sp}(2)). \quad (3)$$

Если, в частности, $\text{char}(k_v) > 2g + 1$, то к представлению κ_v может быть применена формула (1), и доказательство теоремы 2 может быть завершено аналогично доказательству Рорлика предложения E [1; с. 347].

В заключение заметим, что утверждение теоремы 1 косвенно подтверждает версию гипотезы Бэрча–Суиннертон-Дайера, согласно которой порядок $\text{ord}_{s=1} L(A, \tau, s)$ равен кратности $\langle \sigma_A, \tau \rangle$ представления τ в естественном представлении σ_A группы $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ в $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} A(\bar{F})$. Отсюда выводится равенство $W(A, \tau) = (-1)^{\langle \sigma_A, \tau \rangle}$. Так как σ_A реализуемо над $\mathbb{Q}$ и τ неприводимо, то $m_{\mathbb{Q}}(\tau)$ делит $\langle \sigma_A, \tau \rangle$. Таким образом, если $m_{\mathbb{Q}}(\tau) = 2$, то $W(A, \tau) = 1$ для всякого абелева многообразия A над F (ср. [1; с. 313]).

Список литературы

- [1] D. E. Rohrlich, *Compositio Math.*, **100**:3 (1996), 311–349.

М. Н. Сабитова (M. N. Sabitova)
University of Illinois at Urbana-Champaign, USA
E-mail: sabitova.07@mail.ru

Представлено Д. В. Трещёвым
Принято редколлегией
09.10.2007