Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кругликов, Препятствия к построению псевдоголоморфных отображений,
УМН, 1997, том 52, выпуск 3, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:22:12

ПРЕПЯТСТВИЯ К ПОСТРОЕНИЮ ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Б. С. Кругликов

Пусть (L^{2l}, j_L) и (M^{2m}, j_M) – почти комплексные многообразия, т.е. многообразия, снабженные автоморфизмами j_L и j_M касательных пространств, удовлетворяющих $j_L^2 = -1_L: T^*L \rightarrow T^*L$, и $j_M^2 = -1_M$. Псевдоголоморфным отображением $u: L \rightarrow M$ называется такое отображение, что его дифференциал $u_*|_x = du_x: T_xL \rightarrow T_{u(x)}M$ коммутирует с почти комплексной структурой: $j_M \circ u_* = u_* \circ j_L$.

Обозначим через $\mu = \mu_x$ идеал в кольце гладких функций $C^\infty(L)$, обращающихся в точке x в нуль. Степень этого идеала μ^k является идеалом в кольце функций, обращающихся в нуль в точке x вместе со своими производными порядка $< k$: $\mu^k = \{f \mid \partial^\sigma f(x) = 0, |\sigma| < k\}$. Будем обозначать через $\mu^k = \mu^k T(p, q)$ подмодуль в модуле тензоров типа (p, q) , имеющих в точке x нуль порядка k . Обозначим символом $\mathcal{O}_L(x)$ росток окрестностей точки $x \in L$. Обозначим также $\mu = \mu_{x,y} = \{\Phi: T\mathcal{O}_L(x) \rightarrow T\mathcal{O}_M(y) \mid \text{Im } \Phi \subset \mu_y\}$ и, соответственно, $\mu^k = \mu_{x,y}^k$. Формальным псевдоголоморфным отображением называется отображение $u: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{O}_M(y)$ такое, что $j_M \circ u_* - u_* \circ j_L \in \mu_{x,y}^\infty$. Введем пространство струй J_{PH}^k как подмножество в $J^k(L, M)$:

$$J^k(L, M)_{x,y} \supset (J_{PH}^k)_{x,y} = \frac{\{u_*: T\mathcal{O}_L(x) \rightarrow T\mathcal{O}_M(y) \mid j_L \circ u_* - u_* \circ j_M \in \mu_{x,y}^k\}}{\{u_*: T\mathcal{O}_L \rightarrow T\mathcal{O}_M \mid u_* \in \mu_{x,y}^k\}}.$$

В отличие от J_{PH}^1 множество J_{PH}^k , $k \geq 2$, вообще говоря, не имеет структуры многообразия. Это связано с тем, что для отображения $\pi_{PH}^{r,s}$ ограничения проекции $\pi^{r,s}: J^r(L, M) \rightarrow J^s(L, M)$, $r \geq s$, прообраз точки может быть пуст. Обозначим через $\mathcal{E}^k$ образ проекции $\text{Im } \pi_{PH}^{k,1} \subset J_{PH}^1 \subset J^1(L, M)$. Уравнение $\mathcal{E}^1 = J_{PH}^1$ расслоено над $J^0 = L \times M$ со слоем

$$\mathcal{E}_{x,y}^1 = (\pi_{PH}^{1,0})^{-1}(x, y) = \{\Phi: T_xL \rightarrow T_yM \mid j_M \circ \Phi = \Phi \circ j_L\}.$$

Рассмотрим тензоры Ниемхейса N_{j_L} и N_{j_M} на многообразиях L и M :

$$N_j(\xi, \eta) = [j\xi, j\eta] - j[j\xi, \eta] - j[\xi, j\eta] - [\xi, \eta].$$

Непосредственно из определения следует, что если $u: L \rightarrow M$ – псевдоголоморфное отображение, то $N_{j_M} \circ u_*^{\wedge 2} = u_* \circ N_{j_L}$. Более того, это равенство выполнено в точке x , если u сохраняет почти комплексную структуру с точностью до второго порядка: $j_M \circ u_* - u_* \circ j_L \in \mu_{x,y}^2$.

ТЕОРЕМА 1. Ограничение проекции $\pi_{PH}^{1,0}$ на уравнение $\mathcal{E}^2 \subset J_{PH}^1$ имеет прообразы

$$\mathcal{E}_{x,y}^2 = \{\Phi: T_xL \rightarrow T_yM \mid j_M \circ \Phi = \Phi \circ j_L, N_{j_M} \circ \Phi^{\wedge 2} = \Phi \circ N_{j_L}\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображение $u: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{O}_M(y)$ таково, что

$$j_M \circ u_* = u_* \circ j_L \pmod{\mu_{x,y}^k}, \quad N_{j_M} \circ u_*^{\wedge 2} \equiv u_* \circ N_{j_L} \pmod{\mu_{x,y}^k}, \quad 1 \leq k \leq \infty.$$

В этом (и только в этом) случае существует отображение $\tilde{u}: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{O}_M(y)$ такое, что

$$j_M \circ \tilde{u}_* - \tilde{u}_* \circ j_L \in \mu_{x,y}^{k+1}, \quad u_* - \tilde{u}_* \in \mu_{x,y}^k.$$

В частности, если $(u_*)_x \neq 0$, то $(\tilde{u}_*)_x \neq 0$, а если $(u_*)_x$ – вложение или отображение “на”, то же верно и для $(\tilde{u}_*)_x$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-010710).

СЛЕДСТВИЕ (Формальная часть теоремы Ньюлендера–Ниренберга, см. [3], [4]). Пусть тензоры Ниеенхейса являются малыми порядка k в точках $x \in L$ и $y \in M$: $N_{j_L} \in \mu_x^k$, $N_{j_M} \in \mu_y^k$, $1 \leq k \leq \infty$. Тогда существует отображение $u: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{O}_M(y)$ такое, что $du_x \neq 0$ и

$$j_M \circ u_* - u_* \circ j_L \in \mu_{x,y}^{k+1}.$$

ТЕОРЕМА 3. Рассмотрим алгебру инвариантов $\mathcal{A}_j$ почти комплексной структуры j , определяющей “суженное” уравнение Коши–Римана $\mathcal{E}^\infty = \{\Phi: T^*L \rightarrow T^*M \mid \mathcal{A}_{j_M} \circ \Phi^{\wedge*} = \Phi \circ \mathcal{A}_{j_L}\}$. Рассмотрим алгебру Ниеенхейса $\mathcal{A}_j^{\mathcal{N}}$ – замыкание относительно скобки Ниеенхейса и коммутатора (см. [1], [2]) алгебры инвариантов $\mathcal{A}^1 = \langle j \rangle$, где j рассматривается как векторнозначная 1-форма. Эта алгебра не совпадает со всей алгеброй инвариантов, $\mathcal{A}_j^{\mathcal{N}} \neq \mathcal{A}_j$, т.е. существуют новые инварианты – высшие тензоры Ниеенхейса – такие, что $\mathcal{A}_j = \langle j, N_j, N_j^{(2)}, \dots \rangle$.

ТЕОРЕМА 4. Для любого тензора $N \in \wedge^2 T_x^*L \otimes T_xL$ на фиксированном касательном пространстве T_xL такого, что $N(\xi, \eta) = -N(\eta, \xi) = jN(j\xi, \eta)$, существует почти комплексная структура j в $\mathcal{O}_L(x)$ такая, что $N = (N_j)_x$.

Связность ∇ на L определяет отображение $d_{\nabla}^p: \Omega^q \otimes \mathcal{D} \rightarrow \Omega^q \otimes S^p \Omega^1 \otimes \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ – модуль векторных полей, а Ω^q – модуль внешних форм на L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что почти комплексная структура j на $\mathcal{O}_L$ имеет общий вид в точке x , если для соответствующего тензора Ниеенхейса справедливо следующее свойство отделимости: для почти любого вектора $\xi \in T_xL$ из $N_j(\xi, \eta) = 0$, $\eta \in T_xL$, следует $\eta \in \mathbb{C}\xi = \langle \xi, j\xi \rangle$. Более того, будем считать, что пара $(\mathcal{O}_L(x), j)$ не изоморфна $(\mathcal{O}_L(x), -j)$.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что тензоры Ниеенхейса почти комплексных структур j_L на $\mathcal{O}_L(x)$ и j_M на $\mathcal{O}_M(y)$ имеют общий вид. Предположим, что существует отображение $u: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{O}_M(y)$, сопрягающее N_{j_L} с N_{j_M} и являющееся диффеоморфизмом на образ. Тогда u является либо псевдоголоморфным, либо антипсевдоголоморфным отображением: $j_M \circ u_* = \pm u_* \circ j_L$. Если тензоры Ниеенхейса сопряжены формально, $N_{j_M} \circ u_*^{\wedge 2} \equiv u_* \circ N_{j_L} \pmod{\mu_{x,y}^\infty}$, и размерности многообразий L и M совпадают, $2l = 2m$, то почти комплексная структура j_L формально эквивалентна ровно одной из структур j_M или $(-j_M)$.

Рассмотрим почти комплексную структуру j и ее тензор Ниеенхейса N_j . Он определяет билинейное кососимметричное отображение $N_j: \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ на модуле $\mathcal{D}$ векторных полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем почти комплексную структуру j на L левой, если ее тензор Ниеенхейса N_j определяет структуру алгебры Ли на модуле $\mathcal{D}$.

ТЕОРЕМА 6. Левая почти комплексная структура j задает разрешимую алгебру Ли $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, N_j(\cdot, \cdot))$ с рангом разрешимости 2: $\mathcal{G}^{(2)} = 0$. Левые почти комплексные структуры общего вида эквивалентны или антиэквивалентны (формально или гладко), если эквивалентны соответствующие алгебры Ли $\mathcal{G}$ и связывающее сечение $\sigma \in \text{Hom}(\mathcal{G}/\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})$ равно нулю.

Автор благодарит профессора В. В. Лычагина за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Геометрия 1. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1988. [2] Frölicher A., Nijenhuis A. // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. 1956. V. 59. №3. P. 338–359. [3] Ньюлендер А., Ниренберг Л. // Математика. 1959. Т. 3. №6. С. 131–144. [4] Nijenhuis A., Wolf W. // Ann. Math. 1963. V. 77. P. 424–489.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: borkru@difgeo.math.msu.ru

Принято редколлегией
29.10.1996