Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Кесельман, Об изопериметрическом неравенстве на конформно-параболических многообразиях, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:51:01

Об изопериметрическом неравенстве на конформно-параболических многообразиях

В. М. Кесельман

Прежде чем анонсировать основной результат, напомним некоторые понятия и договоримся об обозначениях.

Всюду ниже (M^n, g) – n -мерное некомпактное риманово многообразие без края. Для области $D \subset M^n$ через $V_g(D)$ и $S_g(\partial D)$ обозначим соответственно ее объем и площадь ее границы ∂D в метрике g . Рассматриваемые области всегда будем предполагать предкомпактными и с гладкими границами.

Функция $P: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *изопериметрической функцией* многообразия (M^n, g) , если для любой области $D \subset M^n$ имеет место соотношение $P(V_g(D)) \leq S_g(\partial D)$, называемое *изопериметрическим неравенством*.

Разумеется, интересна лишь нетривиальная, т.е. отличная от нуля, изопериметрическая функция, если таковая существует. В этом случае есть и нетривиальная *максимальная изопериметрическая функция* (представляющая основной интерес)

$$P_{\max}(x) := \inf_{V_g(D)=x} \{S_g(\partial D)\},$$

называемая также *изопериметрическим профилем* многообразия.

Например, максимальная изопериметрическая функция (с точностью до постоянного положительного множителя c) для евклидова n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$ имеет вид $P_{\max}(x) = cx^{(n-1)/n}$, а для пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ – линейный вид $P_{\max}(x) = cx$.

Изопериметрическая функция многообразия, вообще говоря, зависит от его метрики.

Рассмотрим на многообразии (M^n, g) класс метрик $\tilde{g}$, *конформно эквивалентных* его исходной метрике g , т.е. $\tilde{g} = \lambda^2 g$, где $\lambda = \lambda(x)$ – положительная функция на многообразии M^n .

Нас интересует вопрос о том, к какому простейшему виду приводится максимальная изопериметрическая функция некомпактного риманова многообразия конформной заменой его исходной метрики.

Высказанная в [1] гипотеза состоит в следующем.

Некомпактные римановы многообразия разбиваются на два класса: *конформно-параболические* (если конформная емкость абсолюта многообразия равна нулю) и *конформно-гиперболические* (если указанная емкость положительна). Подробности см. в [1].

В первом классе лежит, например, пространство Евклида $\mathbb{R}^n$, во втором – пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$.

Утверждается, что для некомпактного многообразия найдется метрика $\tilde{g}$, конформно эквивалентная его исходной метрике, такая, что $\tilde{g}$ -объем многообразия бесконечен, а изопериметрическая функция в метрике $\tilde{g}$ имеет тот же вид (с точностью до постоянного положительного множителя), какой она имеет в пространстве Евклида или в пространстве Лобачевского, в зависимости от конформного типа данного многообразия.

Для многообразий конформно-гиперболического типа гипотеза была сначала доказана в работе [1] при дополнительном условии отграниченности от нуля объема рассматриваемых областей. Затем в работе [2] от этого ограничения удалось освободиться.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-01051).

Следующая теорема дает подтверждение гипотезы для конформно-параболических многообразий, но пока при том же, что и выше, дополнительном условии. Возможно, что и в рассматриваемом случае оно окажется излишним.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что многообразие (M^n, g) является конформно-параболическим. Фиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

i) *Существует конформно эквивалентная исходной метрике g полная риманова метрика $\tilde{g}$ на M^n , в которой объем многообразия M^n бесконечен и выполняется изопериметрическое неравенство евклидова вида:*

$$CV_{\tilde{g}}^{(n-1)/n}(D) \leq S_{\tilde{g}}(\partial D) \quad (1)$$

для всех областей $D \subset M^n$, объем $V_{\tilde{g}}(D)$ которых больше ε .

ii) *При этом неравенство (1) является асимптотически точным в том смысле, что неравенство*

$$S_{\tilde{g}}(\partial D) < (1 + \varepsilon) CV_{\tilde{g}}^{(n-1)/n}(D) \quad (2)$$

с той же, что и в неравенстве (1), постоянной $C = C(\varepsilon)$ выполняется для всех областей D некоторого исчерпания многообразия M^n .

Под исчерпанием многообразия M^n здесь понимается непрерывное семейство $\{D(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, областей $D(t) \subset M^n$ таких, что $D(t_1) \subseteq D(t_2)$ при любых $t_1 < t_2$ и $\bigcup_t D(t) = M^n$.

В отношении максимальной изопериметрической функции многообразия теорему можно переформулировать следующим образом.

Если многообразие (M^n, g) является конформно-параболическим, то для любого числа $\varepsilon > 0$ в классе метрик на M^n , конформно эквивалентных метрике g , найдется полная метрика $\tilde{g}$, в которой $V_{\tilde{g}}(M^n) = +\infty$ и максимальная изопериметрическая функция $P_{\max}$ многообразия M^n удовлетворяет неравенству

$$Cx^{(n-1)/n} \leq P_{\max}(x) < (1 + \varepsilon) Cx^{(n-1)/n}$$

при всех значениях $x \in (\varepsilon, +\infty)$.

Доказательства приведенных результатов в идейном плане близки к изложенным в [1] и [2] в том смысле, что тоже опираются на конформную инвариантность конформной емкости. Однако нам долго не удавалось преодолеть специфические трудности, возникающие в случае многообразий конформно-параболического типа.

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. А. Зоричу за научное общение, в результате которого и появилась эта работа.

Список литературы

- [1] В. А. Зорич, В. М. Кесельман, *Функц. анализ и его прил.*, **35:2** (2001), 12–23; англ. пер.: V. A. Zorich, V. M. Kesel'man, *Functional Analysis and Its Applications*, **35:2** (2001), 90–99.
[2] В. М. Кесельман, *Мат. сб.*, **194:4** (2003), 29–48; англ. пер.: V. M. Kesel'man, *Sb. Math.*, **194:4** (2003), 495–513.

В. М. Кесельман (V. M. Keselman)
Московский государственный
индустриальный университет
E-mail: kvm@glasnet.ru, kvlm@online.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
09.10.2007