Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Фарков, Биортогональные диадические вейвлеты
на $\mathbb{R}_+$, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:58:00

Биортогональные диадические вейвлеты на $\mathbb{R}_+$

Ю. А. Фарков

Функцию $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ будем называть *масштабирующей функцией*, если она имеет компактный носитель и удовлетворяет уравнению вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \varphi(2x \ominus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

где c_k – комплексные коэффициенты, $\ominus$ – двоичное вычитание на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ (об этой операции и некоторых других используемых ниже понятиях см. [1], [2]). Применяя преобразование Уолша–Фурье, можем записать уравнение (1) в виде $\hat{\varphi}(\omega) = m(\omega/2)\hat{\varphi}(\omega/2)$, где $m(\omega) = (1/2) \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega)$ – полином Уолша, называемый *маской* масштабирующей функции φ . Подмножество M интервала $[0, 1]$ называется *блокированным множеством* для маски m , если оно представимо в виде объединения диадических интервалов ранга $n-1$, не содержит интервала $[0, 2^{-n+1}]$ и таково, что всякая точка множества $(M/2) \cup (1/2 + M/2)$, не лежащая в M , является нулем полинома m . В работе [2] доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если масштабирующая функция φ удовлетворяет уравнению (1) и $\hat{\varphi}(0) = 1$, то $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1}]$ и $\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega)$. Кроме того, система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ линейно независима в том и только том случае, когда маска m не имеет блокированных множеств.

Пусть $\varphi, \tilde{\varphi}$ – масштабирующие функции в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с масками

$$m(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega), \quad \tilde{m}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^{\tilde{n}}-1} \tilde{c}_k w_k(\omega)$$

соответственно такие, что $\hat{\varphi}(0) = \hat{\tilde{\varphi}}(0) = 1$. Рассмотрим системы целых сдвигов функций φ и $\tilde{\varphi}$:

$$\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \{\tilde{\varphi}(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}. \quad (2)$$

Полином $m^*(\omega) = m(\omega) \overline{\tilde{m}(\omega)}$ является маской масштабирующей функции $\varphi^*(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t \ominus x) \overline{\tilde{\varphi}(t)} dt$. Аналогично предложению 2.5.2 из [3], если системы (2) биортонормированы в $L^2(\mathbb{R}_+)$, то

$$m^*(\omega) + m^*\left(\omega + \frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{для всех } \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (3)$$

Отсюда по предложению 1 следует, что если одна из масок $m, \tilde{m}, m^*$ имеет блокированное множество, то системы (2) не являются биортонормированными в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 1 (ср. [3; теорема 2.5.6]). Пусть маска m^* удовлетворяет условию (3). Тогда системы (2) являются биортонормированными в $L^2(\mathbb{R}_+)$ в том и только том случае, когда существует W -компактное множество E , конгруэнтное $[0, 1]$ по модулю $\mathbb{Z}_+$, содержащее окрестность нуля и такое, что

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |m(2^{-j}\omega)| > 0, \quad \inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |\tilde{m}(2^{-j}\omega)| > 0. \quad (4)$$

Отметим, что неравенства (4) выполнены для $E = [0, 1]$, если $m^*(\omega) \neq 0$ при всех $\omega \in [0, 1/2]$.

Кратномасштабным анализом (КМА) в $L^2(\mathbb{R}_+)$ называется последовательность замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(\mathbb{R}_+)$, $j \in \mathbb{Z}$, такая, что выполнены условия: (i) $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$; (ii) объединение $\bigcup V_j$ плотно в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и $\bigcap V_j = \{0\}$; (iii) $f(\cdot) \in V_j \iff f(2 \cdot) \in V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$; (iv) $f(\cdot) \in V_0 \implies f(\cdot \oplus k) \in V_0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$; (v) существует функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot \oplus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ является базисом Рисса в V_0 .

Для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ положим $f_{j,k}(x) = 2^{j/2} f(2^j x \oplus k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ порождает КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если, во-первых, функции $\varphi(\cdot \oplus k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, образуют систему Рисса в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, семейство подпространств $V_j = \text{span}\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$, $j \in \mathbb{Z}$, является КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Пусть даны два КМА $\{V_j\}$, $\{\tilde{V}_j\}$. Будем говорить, что функции $\psi \in V_1$, $\tilde{\psi} \in \tilde{V}_1$ образуют биортогональную пару вейвлетов, если, $\psi \perp \tilde{V}_0$, $\tilde{\psi} \perp V_0$ и $(\psi(\cdot \oplus k), \tilde{\psi}(\cdot \oplus l)) = \delta_{k,l}$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Как обычно, через $\mathcal{M}^*$ обозначается матрица, сопряженная к матрице $\mathcal{M}$, а через I – единичная матрица.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть КМА $\{V_j\}$, $\{\tilde{V}_j\}$ порождены масштабирующими функциями φ , $\tilde{\varphi}$ соответственно и системы (2) являются биортонормированными. Если матрицы

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m(\omega) & m(\omega \oplus 1/2) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega \oplus 1/2) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \tilde{m}(\omega) & \tilde{m}(\omega \oplus 1/2) \\ \tilde{m}_1(\omega) & \tilde{m}_1(\omega \oplus 1/2) \end{pmatrix}$$

для почти всех $\omega \in [0, 1)$ удовлетворяют условию $\mathcal{M} \tilde{\mathcal{M}}^* = I$, то функции ψ , $\tilde{\psi}$, определенные равенствами

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1(\omega/2) \hat{\varphi}(\omega/2), \quad \hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \tilde{m}_1(\omega/2) \hat{\tilde{\varphi}}(\omega/2), \quad (5)$$

образуют биортогональную пару вейвлетов. В частности, можно выбрать

$$m_1(\omega) = -w_1(\omega) \overline{m(\omega \oplus 1/2)}, \quad \tilde{m}_1(\omega) = -w_1(\omega) \overline{\tilde{m}(\omega \oplus 1/2)}. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 2 (ср. [3; теорема 2.7.5]). Пусть КМА $\{V_j\}$, $\{\tilde{V}_j\}$ порождены масштабирующими функциями φ , $\tilde{\varphi}$, маски которых удовлетворяют условию (3) и $m(1/2) = \tilde{m}(1/2) = 0$, а функции ψ , $\tilde{\psi}$ определены равенствами (5), (6). Тогда каждая из систем $\{\psi_{j,k}\}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ является фреймом в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Если при этом системы (2) являются биортонормированными, то функции ψ , $\tilde{\psi}$ образуют биортогональную пару вейвлетов и каждая из систем $\{\psi_{j,k}\}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ является базисом Рисса в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Аналогичные результаты могут быть доказаны для биортогональных систем вейвлетов на группах Кантора и Виленькина (ортогональный случай изучался в [4], [5]).

Список литературы

- [1] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series, An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990. [2] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160; англ. пер.: V. Yu. Protasov, Yu. A. Farkov, *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1529–1558. [3] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2006. [4] W. C. Lang, *Houston J. Math.*, **24**:3 (1998), 533–544. [5] Ю. А. Фарков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220; англ. пер.: Yu. A. Farkov, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 623–650.

Ю. А. Фарков (Yu. A. Farkov)
Российский государственный
геологоразведочный университет
E-mail: farkov@list.ru

Представлено В. М. Тихомировым
Принято редколлегией
09.10.2007