Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 1, 111–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:23:29

УДК 517.927

Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач

Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров

Работа распространяет осцилляционную теорию Штурма–Лиувилля о распределении нулей собственных функций на случай задач с сильными особенностями (типа δ -функций) в коэффициентах (таковы, например, задачи, возникающие при изучении собственных колебаний упругого континуума с сосредоточенными массами и с локализованными взаимодействиями с окружающей средой). Расширение стандартного описания задачи осуществляется заменой привычной формы обыкновенного дифференциального уравнения

$$-(pu')' + qu = \lambda tu$$

на существенно более общую форму

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u \, dQ = \lambda \int_0^x u \, dM$$

с абсолютно непрерывными решениями, производные которых, как и коэффициенты p, Q, M , лежат в $BV[0, l]$. Интеграл понимается по Стильтьесу.

Библиография: 89 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

0. Предисловие.....	112
1. Базовые факты.....	118
1.1. Предварительные обстоятельства.....	119
1.2. Задача Коши. Теорема существования.....	123
2. Линейная теория.....	130
2.1. Однородное уравнение.....	130
2.2. Невырожденная краевая задача.....	132
2.3. Распределение нулей.....	137
3. Спектральная задача Штурма–Лиувилля.....	141
3.1. Структура спектра.....	142
3.2. Осцилляционные свойства собственных функций.....	144
4. Библиографические комментарии.....	148
Список литературы.....	149

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00397).

© Ю. В. ПОКОРНЫЙ, М. Б. ЗВЕРЕВА, С. А. ШАБРОВ, 2008

0. Предисловие

0.1. Настоящая работа основана на замене стандартной теории обыкновенного дифференциального уравнения

$$-(pu')' + qu = f \quad (0.1)$$

на аналогичную ей теорию существенно более общего уравнения

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = \int_0^x dF, \quad (A)$$

развиваемую в первой части (разделы 1 и 2) работы. Уравнение (A) удобно будет представлять (в дифференциалах Стильтеса) в виде

$$-d(pu') + u dQ = dF, \quad (dA)$$

что весьма условно можно интерпретировать как

$$-\left(p \frac{du}{dx}\right)' + Q'u = F', \quad (A')$$

где Q' , F' – обобщенные производные функций Q и F . В отличие от последних двух уравнений, понимаемых в смысле обобщенных функций, а точнее – функционалов, уравнение (A) имеет поточечный смысл, что придает ему коренное сходство с обыкновенными дифференциальными уравнениями и позволяет изучать такие качественные свойства решений, как распределение нулей и экстремумов, число нулей и перемен знака и проч., которые для обобщенных функций не поддаются даже точному определению. Если коэффициенты p , Q , F оказываются гладкими функциями, то уравнения (A), (dA) и (A') эквивалентны обыкновенному уравнению (0.1) при $q(x) = \frac{d}{dx}Q(x)$ и $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$.

Наряду с (A) мы будем рассматривать уравнение с параметром

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = \lambda \int_0^x u dM, \quad (A_\lambda)$$

обобщенная (в дифференциалах) форма которого имеет вид

$$-d(pu') + u dQ = \lambda u dM. \quad (dA_\lambda)$$

0.2. Что понимается под осцилляционной теорией Штурма? Классическая задача Штурма–Лиувилля в форме

$$-(pu')' = \lambda u, \quad (0.2)$$

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (0.3)$$

была поставлена и изучена Ш.-Ф. Штурмом в работе [1] почти два столетия назад при исследовании распространения тепла в неоднородном стержне (см. комментарии в [2]). Данное Штурмом описание осцилляционных свойств собственных функций (число нулей, их перемежаемость и проч.) на протяжении всего XIX в. поражало ученых глубиной математической проницательности в физические проблемы. Уже в начале XX в. эти свойства называли *знаменитыми*, а Гильберт – “*удивительными*” и “*замечательными*”.

К середине XX в. осцилляционные теоремы Штурма были распространены на уравнение более общего вида

$$-(pu')' + qu = \lambda tu \quad (0.4)$$

с непрерывными положительными коэффициентами. Однако сейчас в общеобразовательных курсах осцилляционные свойства забыты, несмотря на основополагающую в естествознании роль задачи Штурма–Лиувилля. О них можно прочитать лишь в специальных и труднодоступных изданиях таких, как [2]–[4]. А имя Штурма в первую очередь ассоциируется со следующей теоремой сравнения из стандартного университетского курса.

ТЕОРЕМА (Ш-1). *Для уравнений*

$$\begin{aligned} (pu')' + q_1 u &= 0, \\ (pv')' + q_2 v &= 0 \end{aligned}$$

с непрерывными на $[0, l]$ коэффициентами p, q_1, q_2 ($p > 0$) из неравенства $q_1(x) \leq q_2(x)$ следует, что для каждого нетривиального решения $u(x)$ первого уравнения между любыми двумя различными нулями этого решения находится не менее одного нуля каждого неколлинеарного с $u(x)$ решения второго уравнения.

Эта теорема даже в серьезных изданиях, подобных [5]–[7], остается невос требованной, как бы повисая в воздухе, вместе с вопросом о ее связи с задачей (0.2)–(0.3), и возникая лишь в весьма частных вопросах отдельных спецкурсов (как например, в [8]). И хотя уравнение вида (0.4) – одно из наиболее распространенных средств описания задач в самых разных вопросах естествознания и техники (достаточно вспомнить хотя бы об уравнении Шрёдингера), но по современной литературе трудно понять, чем до середины XX в. теоремы Штурма восхищали и удивляли ученых.

На самом деле теорема (Ш-1) была у Штурма орудием доказательства собственно осцилляционных свойств, которые мы приведем, чуть осовременив их формулировки, и для удобства – двумя слоями.

ТЕОРЕМА (Ш-2). *Спектр задачи (0.2)–(0.3) состоит из неограниченной последовательности положительных простых собственных значений. Если перенумеровать их в порядке возрастания ($0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$), то соответствующие собственные функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ обладают следующими свойствами:*

- (i) $\varphi_0(x)$ не имеет нулей внутри $(0, l)$;
- (ii) $\varphi_k(x)$ имеет в $(0, l)$ точно k нулей, каждый из которых является простым нулем (узлом);
- (iii) при каждом $k \in \{1, 2, \dots\}$ между соседними нулями функции $\varphi_{k+1}(x)$ находится точно один узел функции $\varphi_k(x)$;
- (iv) при каждом k и любых $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ обобщенный полином $\alpha_0 \varphi_0 + \dots + \alpha_k \varphi_k$ имеет в $(0, l)$ не более k нулей (т.е. $\{\varphi_i\}_0^k$ есть система Чебышёва порядка k на $(0, l)$).

Эта собственно осцилляционная теорема дополнялась следующей.

ТЕОРЕМА (Ш-3). Собственные функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ образуют ортогональный базис в пространстве истокорпредставимых функций.

0.3. Ниже эти теоремы Штурма практически без изменения формулировок переносятся на случай уравнения (A_λ) при условиях (0.3), т. е. на задачу

$$\begin{cases} -(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = \lambda \int_0^x u dM, \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

в классе E абсолютно непрерывных функций, производные которых лежат в $BV[0, l]$.

0.4. Эволюция осцилляционной теории. С момента своего возникновения задача Штурма–Лиувилля была даже в простейшей форме (0.2)–(0.3) непрерывно востребованной в инженерной и физической математике. Естественно, возникла необходимость развития и самой теории этой задачи. Но научная судьба теорем (Ш-2) и (Ш-3) оказалась кардинально различной.

Теорема (Ш-3), порожденная проблемой обоснования метода Фурье, уже к концу XIX в. была освоена в классе интегральных операторов с симметрическими ядрами и послужила базой для дальнейшего развития спектрального анализа (см., например, [9]) – ныне одного из разделов функционального анализа. Однако имя Штурма прославила отнюдь не эта теорема (Ш-3), роль которой казалась существенной в первую очередь для “чистой математики”.

На исследователей XIX в., прежде всего произвели впечатление осцилляционные свойства, в особенности – физичность терминов (например, таких, как распределение узлов). Для упругих колебаний, с которыми ассоциировалась задача Штурма–Лиувилля (0.2)–(0.3), свойства собственных гармоник являлись наблюдаемыми и полностью согласовывались с интуитивными представлениями о формах собственных (стоячих) волн колеблющейся струны.

Попытки распространения осцилляционных теорем Штурма на более сложные задачи начались уже в XIX в. Так, теорема (Ш-2) была перенесена Стильтесом (см. [2]) на случай упругой нити с бусинками – в современных терминах это значит, что в уравнении (0.4) (при $q \equiv 0$) распределение масс $m(x)$ совпадает с конечной комбинацией δ -функций.

Спустя почти полвека результат Стильтеса был расширен (также при $q \equiv 0$) Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейном [10] на случай произвольного распределения масс. Это было сделано в терминах задачи

$$u(x) = \lambda \int_0^l K(x, s) u(s) dM(s),$$

где M – неубывающая функция с бесконечным множеством точек роста, а $K(x, s)$ – функция влияния однородной струны (когда $p(x) \equiv \text{const}$). Этот результат базировался на весьма изощренной теории ядер Келлога, основанной на тензорном анализе. Функция $K(x, s)$ является ядром Келлога, если ассоциированные ядра

$$K \begin{pmatrix} \xi_1, \dots, \xi_m \\ \tau_1, \dots, \tau_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(\xi_1, \tau_1) & \dots & K(\xi_1, \tau_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(\xi_m, \tau_1) & \dots & K(\xi_m, \tau_m) \end{vmatrix}$$

неотрицательны на симплексе $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m$, $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$, становясь строго положительными на “диагонали” $\tau_i = \xi_i$ ($i = 1, \dots, m$). В дальнейшем эти результаты, связанные с кропотливым анализом функции Грина, стали основой обширной осцилляционной тематики для уравнений старших порядков (см. библиографию в работах [11]–[16]).

К 30-м годам XX в. возросла потребность анализа более общих по сравнению с (0.2) уравнений вида (0.4), где коэффициент q может оказаться, на физическом языке, комбинацией δ -функций. И хотя работы по уравнениям с обобщенными коэффициентами, начиная с 60-х годов XX в., образовали достаточно обширный фронт (см., например, [17]–[29]), но продвижение осцилляционных спектральных свойств на случай с импульсными особенностями как бы замерло.

Последнее можно понять. Возникший в то время аппарат теории обобщенных функций не позволял смотреть на уравнение (0.4) с δ -функциями в коэффициентах как на поточечное равенство функций скалярного аргумента [30]. А на язык теории обобщенных функций не могут быть перенесены ни формулировки, ни известные методы доказательства свойств (i)–(iv) теоремы (Ш-2). Максимальным продвижением осцилляционной теории в область распределений был результат А. Д. Мышкиса [31], давшего для уравнения $u'' + qu = 0$ с обобщенным коэффициентом q ослабленную версию теоремы (Ш-1) при $q_1 = q_2$.

Физически осмысленное распространение теоремы (Ш-2) на более общие задачи началось в самом конце XX в. Включение в коэффициенты δ -функций (как их понимают физики) с сохранением привычного поточечного взгляда на уравнение – именно на этом пути началось продвижение осцилляционной теории Штурма–Лиувилля на случай задач с особенностями, отчасти подытоживаемое настоящей работой (по результатам из [32]–[38]).

0.5. Итоговая картина настоящего исследования. Внешне она выглядит совсем просто: утверждения теорем (Ш-2) и (Ш-3) сохранены в точности для более общего, чем обыкновенное уравнение вида (0.4), объекта, а именно – для интегро-дифференциального уравнения (A _{λ}), где Q и M – неубывающие функции и интегралы понимаются по Стильтесу.

Уравнение (A _{λ}) получается, если формально проинтегрировать каноническое уравнение (0.4), полагая при этом $\int_a^x q(x) dx = Q(x)$, $\int_a^x m(x) dx = M(x)$. Задаче Стильтеса об упругой нити с бусинками соответствует уравнение (A _{λ}) при $p(x) \equiv 1$, $Q(x) \equiv \text{const}$ (т.е. $q(x) \equiv Q'(x) \equiv 0$), если $M(x)$ есть кусочно постоянная (ступенчатая) функция. Аналогично, кусочно постоянная $Q(x)$ будет соответствовать линейной комбинации δ -функций в $q(x)$. При этом уравнение (A _{λ}) является поточечным, т.е. в нем нет обобщенных функций (распределений) Шварца–Соболева.

Для строгого доказательства осцилляционной теоремы Штурма (Ш-2) естественно пришлось развить для (A _{λ}) (в первую очередь – для (A)) новую теорию, параллельную теории обыкновенных дифференциальных уравнений с обычными коэффициентами.

Ниже дается систематическое изложение осцилляционной теории для уравнения (A_λ) , развитой авторами за последние 10 лет. Подсказкой для использования интегро-дифференциальной формы (A_λ) была следующая математическая модель Ф. Аткинсона и М. Г. Крейна стилтесовской струны [2], [39]:

$$u'_+(x) = u'_-(0) - \lambda \int_0^{x+0} u \, dM,$$

где $u'_+(x)$ – правая производная, $u_-(0)$ – некое “продленное значение” производной. Внешним символом этого уравнения полагалось считать соотношение

$$-\frac{d}{dM}u'_+(x) = \lambda u(x).$$

Несколько раньше последнее уравнение возникло у Феллера (см. [2]) в задаче о диффузии [40]. Об осцилляционных свойствах в этих работах речь не шла.

0.6. Горизонты трудностей. Ретроспектива излагаемого исследования определяется следующей достаточно прозрачной схемой, восходящей к Штурму (и использованной, например, в [2], [4]).

Обозначим через $u(x, \lambda)$ решение уравнения $-(pu')' = \lambda u$ с начальными условиями $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. Если при некотором $\lambda = \lambda^*$ функция $u(x, \lambda^*)$ обращается в нуль на правом конце, т.е. при $x = l$, то значение $\lambda = \lambda^*$ является собственным, а $y(x) \equiv u(x, \lambda^*)$ – собственной функцией. При $\lambda = 0$ функция $u(x, 0)$, очевидно, не имеет нулей в $(0, l]$.

Далее следует разобраться в том, как число нулей $N(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} N(u(x, \lambda))$ функции $u(x, \lambda)$ на $(0, l]$ зависит от λ . Помогает в этом теорема сравнения (III-1).

Пусть при некотором λ функция $u(x, \lambda)$ имеет k нулей в $(0, l]$. Обозначим их в порядке возрастания через

$$(z_0 = 0) < z_1(\lambda) < z_2(\lambda) < \dots < z_k(\lambda) \leq l.$$

Из теоремы (III-1) следует, что при увеличении λ каждая нулевая точка $z_i(\lambda)$ сдвигается влево, т.е. число $N(u(x, \lambda))$ нулей функции $u(x, \lambda)$ в $(0, l]$ не убывает. При этом каждый дополнительный нуль может появиться в результате того, что влево сдвинется (при некотором увеличении λ) самый правый нуль, совпадавший с правым концом $x = l$. Таким образом, функция $N(\lambda) = N(u(x, \lambda))$ оказывается кусочно постоянной, возрастая на единицу каждый раз, когда λ проходит очередную точку спектра.

Проведенное рассуждение мы называем для рельефности “*накачкой нулей*”. Это рассуждение достаточно вразумительно и до определенного времени представлялось достаточно убедительным – вплоть до того, что без дополнительных комментариев приводилось в качестве доказательства осцилляционных свойств такими авторитетными авторами, как Б. М. Левитан [4], Ф. Атkinson [2] и др. Однако сравнительно недавно при анализе осцилляционных свойств (см. [41], [38]) задачи Штурма–Лиувилля на графе (пространственной сети [38]) обнаружили трудности, связанные с почти очевидными (как казалось ранее) обстоятельствами, имеющими на самом деле весьма нетривиальную природу.

Опишем эти обстоятельства, требующие достаточно корректного анализа даже для случая гладких коэффициентов p , q , m уравнения (0.4).

Гладкая зависимость от λ функции $u_\lambda(x) \equiv u(x, \lambda)$ обеспечена стандартными теоремами. Но как зависят от λ нули этой функции?! Здесь необходим детальный анализ серии вопросов.

Пусть при некотором $\lambda = \lambda^*$ имеет место равенство $u(l, \lambda^*) = 0$, т. е. λ есть точка спектра. Пусть собственная функция $u(x, \lambda^*)$ имеет m нулей в $(0, l)$ ($0 < z_1 < z_2 < \dots < z_m < (z_{m+1} = l)$). При увеличении λ эти нулевые точки сохраняются. Обозначим их зависимость от λ в виде функций $z_1(\lambda), z_2(\lambda), \dots, z_m(\lambda)$ и $z_{m+1}(\lambda)$. Как уже отмечалось, по теореме (III-1) эти функции являются неубывающими. Однако для строгого обоснования схемы “накачки нулей” необходимо иметь уверенность в том, что

- (а) каждая из этих функций $z_k(\lambda)$ непрерывна;
- (б) каждая из них строго монотонна;
- (в) соседние нули $z_k(\lambda)$ и $z_{k+1}(\lambda)$ не сливаются;
- (г) нули не пропадают (не исчезают) при неограниченном увеличении λ ;
- (д) нули не накапливаются возле какой-либо внутренней в $(0, l)$ точки, т. е. каждый нуль $z_k(\lambda)$ неотвратно приближается к точке $x = 0$ ($= z_0$), не “застывая” по дороге.

Наконец, необходимо понять, какой механизм “рождает” очередной дополнительный нуль у $u(x, \lambda)$ на правом конце. И почему не происходит появления дополнительных нулей внутри $(0, l)$ отпочковыванием от какого-либо внутреннего нуля.

Что известно для ответа на эти вопросы? Только то, что функции $z_k(\lambda)$ определяются тождествами

$$u(z_k(\lambda), \lambda) = 0,$$

т. е. являются неявными функциями, определяемыми уравнением

$$u(z, \lambda) = 0. \quad (0.5)$$

И об этих неявных функциях, определяемых всего лишь одним равенством (0.5), заранее известно, что их много, что каждая из них определена (это уже требует объяснения) на своей области $\{\lambda_k < \lambda < \infty\}$, где λ_k – точка спектра.

А для квалифицированной характеристики поведения каждой из ветвей этой многозначной неявной функции необходимо изучение производной $\frac{\partial u(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ в окрестности каждой точки λ^* спектра исходной задачи. При каждом таком $\lambda = \lambda^*$ соответствующая функция $h(x) \equiv \frac{\partial u(x, \lambda^*)}{\partial \lambda}$ оказывается решением уравнения

$$-(ph')' + qh = \lambda^* h + u(x, \lambda^*),$$

характерного для присоединенных функций. Анализ количества нулей решения такого уравнения при изложении осцилляционных теорем нигде и никем не производился даже для классического уравнения (0.4) на отрезке.

Реализуя схему “накачки нулей” для уравнения (A_λ), мы вынуждены будем искать ответ на все эти вопросы для случая задачи с импульсными особенностями. А для этого необходимо предварительно построить систему фактов, аналогичную теории линейных уравнений на отрезке с обычными коэффициентами.

1. Базовые факты

В этом разделе изучается уравнение

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0), \quad (\text{A})$$

в случае гладких p , Q , F адекватное обыкновенному

$$-(pu')' + qu = f \quad (1.1)$$

при $q = Q'$ и $f = F'$. Уравнение (A) наследует универсальность уравнения (1.1) для самых разнообразных задач естествознания и техники – от уравнения Шрёдингера в квантовой механике до процессов в электрических цепях, акустических системах, нейронных волокнах, разнообразных волноводах и проч.

Замена привычного обыкновенного дифференциального уравнения (1.1) на уравнение (A) расширяет класс допускаемых к анализу задач, требуя при этом учета чисто математической новизны этого объекта. В чем эта новизна?

Уравнение (A) содержит разрывные, вообще говоря, коэффициенты p , Q , F наряду с интегралом Стильтьеса. Сохраняя явное присутствие скалярного аргумента, уравнение (A) обнаруживает и его особые значения – это те точки, где производная $u'(x)$ и функции p , Q , F могут иметь разрыв, те значения верхнего предела в интеграле, когда этот интеграл может терять смысл. Последнее – самое коварное (с позиций привычных для элементарного анализа ассоциаций) обстоятельство, порождаемое в уравнении (A) интегралом Стильтьеса: если в (A) точка x совпадает с одной из точек ξ разрыва функции $Q(x)$ и если при этом $Q(\xi) \neq Q(\xi - 0)$, $Q(\xi) \neq Q(\xi + 0)$, то соответствующее значение $\int_0^\xi u(x) dQ(x)$ отлично как от $\int_0^{\xi-0} u(x) dQ(x)$, так и от $\int_0^{\xi+0} u(x) dQ(x)$, что приводит к абсурдности смысла $u'(\xi)$ в (A), ибо $u'(\xi)$ обозначает общее значение левой $u'_-(\xi)$ и правой $u'_+(\xi)$ производных. При этом каждый из символов $\int_0^{\xi-0} u dQ$ и $\int_0^{\xi+0} u dQ$, именно так обычно возникающих в работах (см., например, [2], [38], [37]), связанных с привлечением интеграла Стильтьеса в дифференциальные уравнения, требует на самом деле дополнительных разъяснений.

Например, то ли $\int_0^{\xi-0} u dQ$ обозначает интеграл по полусегменту $[0, \xi)$, то ли несобственный интеграл $\lim_{\delta \downarrow 0} \int_0^{\xi-\delta} u dQ$. Далее мы покажем, что если $u(x)$ абсолютно непрерывна и ее производная $u'(x)$ имеет ограниченную вариацию, то в любой точке $\xi \in [0, l]$ существуют правая и левая производные, совпадающие с соответствующим односторонними пределами $u'(x)$, т. е. $u'_+(\xi) = u'(\xi + 0)$ и $u'_-(\xi) = u'(\xi - 0)$. Это позволит нам отождествлять, например, несобственный интеграл $\int_0^{\xi-0} f d\mu = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{\xi-\varepsilon} f d\mu$ с собственным по полуинтервалу $[0, \xi)$, т. е. с $\int_{[0, \xi)} f d\mu$. При этом остается более глубокая проблема – о дифференцируемости по верхнему пределу. Но об этом – в свое время. Чтобы устранить отмеченные поводы для возможных недоразумений, мы заменяем каждую особую точку ξ парой символов $\{\xi - 0, \xi + 0\}$.

В настоящем разделе мы на фоне этих “нюансов” строим необходимую для дальнейшего систему фактов, аналогичную традиционной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Предварительно мы напоминаем вкратце необходимые понятия и обстоятельства из теории интеграла. Более подробное изложение приводимых ниже сведений можно найти, например, в [42]–[48].

Приводимое в п. 1.1.6 определение дифференциала Стильтьеса dG для функции $G(\cdot)$ из BV в известной авторам литературе отсутствует.

1.1. Предварительные обстоятельства.

1.1.1. *Интеграл Римана–Стилтьеса* $\int_0^l f(x) d\mu(x)$. Этот интеграл определяется для пары заданных на $[0, l]$ функций $f(x)$, $\mu(x)$ предельным переходом в интегральных суммах $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)]$ с точно теми же оговорками, что и для обычного интеграла Римана. Прямо из определения следует, что интегралы $\int_0^l f d\mu$ и $\int_0^l \mu df$ существуют одновременно, причем их сумма равна $f(l)\mu(l) - f(0)\mu(0)$. Интеграл Стильтьеса $\int_0^l f d\mu$ заведомо существует, если одна из функций $f(x)$, $\mu(x)$ непрерывна, а другая имеет ограниченную вариацию.

1.1.2. *Пространство $BV[0, l]$* . Это пространство определяется как множество функций, каждая из которых имеет ограниченную вариацию (конечное изменение) $\text{Var}_{[0, l]} u(x) = \sup_{0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_k \leq l} \sum_{i=0}^{k-1} |u(x_{i+1}) - u(x_i)|$. Для упрощения мы часто будем писать $V_0^l[u(x)]$ вместо $\text{Var}_{[0, l]} u(x)$. Каждая функция $u(x)$ из $BV[0, l]$ допускает разложение Жордана $u = u_1 - u_2$, где u_1 , u_2 – неубывающие функции.

1.1.3. *Скачки функций из BV* . Для любой $u(x)$ из $BV[0, l]$ в каждой точке $\xi \in (0, l]$ заведомо существует левый, а в каждой точке $\xi \in [0, l)$ – правый предел, т. е. $u(\xi + 0) = \lim_{x \rightarrow \xi, x > \xi} u(x)$, $u(\xi - 0) = \lim_{x \rightarrow \xi, x < \xi} u(x)$. Простым скачком $u(x)$ в точке $x = \xi$ мы называем величину $\Delta u(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} u(\xi + 0) - u(\xi - 0)$, полагая $u(0 - 0) = u(0)$ и $u(l + 0) = u(l)$. Говоря о простом скачке $\Delta u(\xi)$ при $0 < \xi < l$, мы игнорируем собственное значение $u(\xi)$ этой функции в точке $x = \xi$, учитывая только левое $u(\xi - 0)$ и правое $u(\xi + 0)$ предельные значения.

Всюду далее через S_u обозначается множество точек разрыва функции $u(x)$. Для $u(x) \in BV[0, l]$ множество S_u не более чем счетно. Функция скачков $u_s(x)$ для $u(x)$ из $BV[0, l]$ нами определяется так:

$$u_s(x) = \sum_{\xi \leq x} \Delta u(\xi). \quad (1.2)$$

Для любой $u(x)$ из $BV[0, l]$ разность $u_0(x) = u(x) - u_s(x)$ в каждой точке разрыва $\xi \in S_u$ имеет одинаковые левый и правый пределы: $u_0(\xi - 0) = u_0(\xi + 0)$, т. е. имеет устранимый разрыв. Переопределяя в этих точках $u_0(x)$ общим значением этих пределов, мы обозначим получающуюся непрерывную функцию через $\bar{u}_0(x)$.

Оказывается, для интеграла Стильтьеса при $\mu(x) \in BV[0, l]$

$$\begin{aligned} \int_0^l f(x) d\mu(x) &= \int_0^l f(x) d\mu_0(x) + \int_0^l f(x) d\mu_s(x) \\ &= \int_0^l f(x) d\bar{\mu}_0(x) + \sum_{\xi \in S_\mu} f(\xi) \Delta\mu(\xi), \end{aligned} \quad (1.3)$$

причем под знаком интеграла Стильтьеса $d\mu_0$ и $d\bar{\mu}_0$ равносильны.

Чтобы в дальнейшем не путаться в формулировках с несущественными для нас собственными значениями функций из $BV[0, l]$ в их точках разрыва, мы будем предполагать эти функции непрерывными слева, т. е. брать их из $BV_0[0, l]$.

1.1.4. Теорема Рисса. Интеграл Стильтьеса, долгое время математиками как бы и не замечавшийся, открыл свои фундаментальные возможности после доказательства Риссом следующего основополагающего факта.

Для каждого функционала $l(u(\cdot))$, линейного и непрерывного на пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций, существует функция $g(\cdot)$ из $BV[a, b]$ такая, что $l(u) = \int_a^b u(x) dg(x)$.

1.1.5. Теорема о преобразовании меры. Для любой функции $\sigma(x)$ из $BV[0, l]$ и произвольной функции $u(x)$ из $C[0, l]$ выполнено равенство

$$\int_0^l \varphi d\mu = \int_0^l \varphi u d\sigma, \quad (1.4)$$

где $\mu(x) = \int_0^x u d\sigma$.

1.1.6. Дифференциал Стильтьеса. Обращаясь к коренному смыслу дифференциала в понятии интеграла, назовем дифференциалом Стильтьеса от функции $g(x)$ из $BV[0, l]$ (и обозначим через dg) функционал из $C^*[0, l]$, определяемый равенством

$$(dg, \varphi) = \int_0^l \varphi dg \quad (\varphi \in C[0, l]).$$

Резонность использования символа dg для обозначения этого функционала будет видна из обсуждаемых ниже свойств.

Однородность и аддитивность такого дифференциала очевидны.

Норма dg в $C^*[0, l]$ не превосходит вариации $V_0^l[g(x)]$. Напрямую из определения интеграла Стильтьеса следует, что $\int_\alpha^\beta dg = g(\beta) - g(\alpha)$, причем $\int_{\xi-0}^{\xi+0} dg = g(\xi+0) - g(\xi-0)$.

Если $g(\cdot) \in C^1[0, l]$, то, очевидно, $dg = g'dx = \frac{dg}{dx}(x) dx$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Дифференциал Стильтьеса dg является нулевым функционалом в $C^*[0, l]$ (что мы обозначаем через $dg = 0$) тогда и только тогда, когда $g(x) = \text{const}$.

Теорема о преобразовании меры придает смысл формальному умножению непрерывной функции $u(x)$ на дифференциал dg , а именно, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Если $u(x) \in C[0, l]$ и $g(\cdot) \in BV[0, l]$, то существует функция $h(x)$ из $BV[0, l]$ такая, что $dh = u(x)dg$, т.е. $u(x)dg$ – тот же объект, что и dg .

Отсюда следует весьма полезное формальное соотношение

$$d \int_0^x \varphi dg = \varphi dg.$$

Сказанное дает точное объяснение тому, что исходное интегро-дифференциальное уравнение (A_λ) адекватно общему по форме равенству

$$-d(pu') + u dQ = \lambda u dM, \quad (dA_\lambda)$$

а неоднородная версия (A) адекватно равенству

$$-d(pu') + u dQ = dF. \quad (dA)$$

Далее будем иногда (для краткости) полагать

$$Du \equiv -d(pu') + u dQ.$$

Любопытное замечание: функционал $l(u) = u(\xi)$, где $\xi \in (0, l)$, в теории обобщенных функций отождествляется с дельта-функцией Дирака $\delta(x - \xi)$. Так как

$$u(\xi) = \int_0^l u(x) d\Theta(x),$$

где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда, т.е. $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$, то для нас этот функционал совпадает с $d\Theta$, т.е. $\delta(x) = d\Theta(x)$. При этом мы имеем возможность говорить и о δ -функции с носителем в одном из концов отрезка. Для $\delta(x - l)$ соответствующая функция, порождающая функционал, имеет вид $\Theta(x - l) = 0$ при $x < l$ и $\Theta(x - l) = 1$ при $x = l$.

1.1.7. Дифференциальные неравенства. Мы будем писать $dg \geq 0$ и называть дифференциал dg положительным, если соответствующий функционал неотрицателен, т.е. $(dg, \varphi) = \int_0^l \varphi dg \geq 0$ для любой неотрицательной непрерывной на $[0, l]$ функции $\varphi(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Для положительности dg необходимо и достаточно, чтобы функция $g(x)$ не убывала на $[0, l]$.

Это утверждение будет для нас важно при анализе решений, например, дифференциального неравенства вида $Du \geq 0$, т.е. $-d(pu') + u dQ \geq 0$, которое равносильно для нас тому, что функция $z(x) = -(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ$ не убывает на $[0, l]$. Аналогичное поточечное описание можно дать и символьному неравенству $v_0(x)Du \geq 0$.

Иногда нам будет удобно использовать обозначение

$$(Lu)(x) = -(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ,$$

которое связано с Du формальным равенством $Du = d(Lu)$.

ТЕОРЕМА 1.1 (о факторизации). Пусть однородное уравнение $Lu = 0$ имеет в E решение без нулей на $[0, l]$. Тогда существуют строго положительные функции $z_0(x)$, $z_1(x)$ такие, что для любой $u(x)$ из E

$$Du = -z_0 d(z_1(z_0 u)'),$$

$$\text{или } Lu(x) = - \int_0^x z_0 dg \text{ при } g(x) = z_1(x) \frac{d}{dx}(z_0(x)u(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(x)$ – решение ($\varphi \in E$) уравнения $Du = 0$, причем $\varphi(x) > 0$ на $[0, l]$. Обозначим $z_0(x) = 1/\varphi(x)$ и $z_1(x) = \varphi^2(x)p(x)$. Тогда требуемая факторизация на основе теоремы о преобразовании меры получается тривиальной выкладкой.

В классической теории неосцилляции аналогичный результат играет фундаментальную роль и связывается с именами Пойа и Фробениуса (см. [14], [49]).

Эффективность этой факторизации хорошо демонстрирует следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть уравнение $Lu = 0$ имеет в E решение $\varphi(x)$ без нулей на $[0, l]$. Тогда любое неотрицательное решение $u(x) \not\equiv 0$ неравенства $Du \geq 0$ не имеет нулей внутри $(0, l)$, причем $|u(0)| + |u'(0)| > 0$ и, аналогично, $|u(l)| + |u'(l)| > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x) \in E$ и $Du \geq 0$, причем $u(x) \not\equiv 0$ и $u(x) \geq 0$. Воспользуемся предыдущей теоремой, полагая $g(x) = z_1(x) \frac{d}{dx}(z_0(x)u(x))$. Так как $z_0 dg = -Du \leq 0$ и $z_0(x) > 0$, то $dg \leq 0$, т.е. функция $g(x)$ не возрастает на $[0, l]$. И если $g(x)$ меняет знак, то лишь однажды, причем с плюса на минус.

Рассмотрим множество $\Omega = \{x : u(x) > 0\}$. Оно относительно открыто в $[0, l]$. Нам нужно показать, что $\Omega \supset (0, l)$.

Предположим противное. Пусть (τ_0, τ_1) – один из интервалов, образующих Ω . Пусть $\tau_0 > 0$. Тогда $u(\tau_0) = 0$, и $u(x) > 0$ на (τ_0, τ_1) . То же будет верно и для $z_0(x)u(x)$. Поэтому в точке $x = \tau_0$ правая производная $(z_0 u)'_+(\tau_0)$ неотрицательна. Значит, $g(\tau_0 + 0) \geq 0$. Аналогично (поскольку $u(x) \geq 0$ слева от $x = \tau_0$) получается, что $g(\tau_0 - 0) \leq 0$. Последние два неравенства в силу невозрастания $g(x)$ в том числе в точке τ_0 , т.е. при переходе от $g(\tau_0 - 0)$ к $g(\tau_0 + 0)$, должны означать $0 \geq g(\tau_0 - 0) \geq g(\tau_0 + 0) \geq 0$, т.е. $g(\tau_0 - 0) = g(\tau_0 + 0) = 0$. Отсюда и из невозрастания $g(x)$ следует, что $g(x) \leq 0$ справа от τ_0 . Поэтому и $(z_0 u)' \leq 0$ правее τ_0 . Но тогда функция $(z_0 u)(x)$, не возрастая справа от τ_0 и имея в точке $x = \tau_0$ нулевое значение, должна удовлетворять неравенству $(z_0 u)(x) \leq 0$, что в сочетании с исходным предположением означает, что $u(x) \equiv 0$ справа от τ_0 , в том числе и на (τ_0, τ_1) .

Таким образом, случай $\tau_0 \neq 0$ невозможен. Пусть теперь $\tau_0 = 0$, т.е. $u(0) = 0$. Если $u'(0) = 0$, то $(z_0 u)'(0) = 0$ и $g(+0) = 0$. Но тогда в силу невозрастания $g(x)$ должно быть (как и выше) $g(x) \leq 0$ справа от τ_0 , т.е. $(z_0 u)'(x) \leq 0$, и $(z_0 u)(x)$ не возрастает, имея нуль при $x = 0$. Поэтому $z_0 u \leq 0$, а это в сочетании с исходным условием $u(x) \geq 0$ означает, что $u(x) \equiv 0$. Свойство $|u(l)| + |u'(l)| > 0$ доказывается аналогично. Теорема 1.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Условие существования решения без нулей, как будет показано далее, заведомо выполнено, если $dQ \geq 0$. Однако обсуждать такие условия (“существует такое решение, что...”) мы сможем, лишь располагая какой-либо теоремой существования. Мы ее получим в следующем разделе.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В доказательстве мы фактически отождествляем у функции $(z_0 u)$ правую производную $(z_0 u)'_+(\tau_0)$ с правым пределом:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (z_0 u)'(\tau_0 + \varepsilon) = (z_0 u)'(\tau_0 + 0).$$

То же и слева от τ_0 . Это – одно из самых скользких мест в нашей тематике. Правомочность подобного отождествления нами будет показана в теореме 1.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Важность последней теоремы определяется уже тем, что дифференциальному неравенству вида $Du \geq 0$ будет заведомо удовлетворять функция влияния (и функция Грина).

1.2. Задача Коши. Теорема существования. Мы начинаем более тщательный анализ основного уравнения (A), т. е.

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = \int_0^x dF.$$

Всюду далее предполагается, что функции $p(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ непрерывны в точках $x = 0$, $x = l$ и имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$, причем $\inf_{[0, l]} p > 0$. Интегральное слагаемое слева в (A) по теореме о преобразовании меры должно лежать в $BV[0, l]$. Но тогда пространству $BV[0, l]$ должна принадлежать вместе с $u'(x)$ и функция $(pu')(x)$.

1.2.1. Пространство допустимых решений. В множестве E абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций с производными из $BV[0, l]$ введем норму

$$\|u\| = \sup_{[0, l]} |u(x)| + V_0^l[u'(x)]. \quad (1.5)$$

ТЕОРЕМА 1.3. Пространство E полно по норме (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{u_n(x)\}$ – фундаментальная по норме (1.5) последовательность. Тогда она фундаментальна и в $C[0, l]$ и, следовательно, равномерно сходится к некоторой функции $u_*(x) \in C[0, l]$. Покажем, что $u_*(\cdot) \in E$.

Рассмотрим последовательность $z_n(x) = u'_n(x)$. Из ограниченности $\{u_n\}$ в E следует, что для некоторого фиксированного конечного числа C справедливо

$$V_0^l[z_n] \leq C. \quad (1.6)$$

Так как для любой $z(\cdot)$ из $BV[0, l]$ и любых $\alpha, \beta \in [0, l]$ выполнено неравенство $|z(\beta) - z(\alpha)| \leq V_\alpha^\beta[z]$, то

$$|u'_n(x)| \leq |u'_n(l)| + V_0^l[u'_n]$$

и, согласно (1.6),

$$|u'_n(x)| \leq |u'_n(l)| + C \quad (0 \leq x \leq l). \quad (1.7)$$

С другой стороны,

$$u_n(l) = u_n(0) + \int_0^l u'_n(s) dx = u_n(0) + u'_n(l)l - \int_0^l x du'_n,$$

откуда

$$lu'_n(l) = \int_0^l x du'_n + u_n(l) - u_n(0).$$

Поэтому

$$l|u'_n(l)| \leq lV_0^l[u'_n] + |u_n(l)| + |u_n(0)|.$$

Последние два слагаемых равномерно по n ограничены в силу фундаментальности $\{u_n\}$ по метрике $C[0, l]$, а первое – в силу (1.6). Отсюда следует, что $\sup_n |u'_n(l)| < \infty$, что в сочетании с (1.7) означает существование константы c_2 такой, что $|u'_n| \leq c_2$. Тем самым последовательность $z_n(x) = u'_n(x)$ равномерно ограничена, что в сочетании с (1.6) означает выполнение условий второй теоремы Хелли (см. [45; гл. VI, § 6, п. 5, с. 360]), в силу которой $\{z_n\}$ оказывается компактной в смысле слабой топологии (поточечной сходимости). Поэтому существует подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой функции $z^*(x)$. Тогда по первой теореме Хелли [45; гл. VI, § 6, п. 5, с. 358] $z^*(x) \in BV[0, l]$.

Сходимость всей последовательности $\{z_n\}$ к z^* следует теперь из ее фундаментальности по полуметрике $\rho(z, z^*) = V_0^l[z - z^*]$, что обеспечивает поточечную сходимость z_n к z^* . Поэтому $u'_* = z^*$. Окончательный вывод о сходимости $u_n(x)$ к $u_*(x)$ по норме (1.5) следует из равенства $u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u'_n(s) ds$. Теорема 1.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Введенное нами банахово пространство E содержится (в теоретико-множественном плане) в соболевском пространстве $W_1^1[0, l]$.

1.2.2. Смысл уравнения (A) в особых точках. Если ξ – одна из точек разрыва либо p , либо Q , либо F , то неизбежны скачки в этой точке у производной $u'(x)$ и у интегрального слагаемого, как функции верхнего предела.

ТЕОРЕМА 1.4. Для любой функции $g \in E$ при $\xi < l$ имеют место соотношения

$$g'(\xi + 0) = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} g'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0 + 0} \frac{g(\xi + \varepsilon) - g(\xi)}{\varepsilon} = g'_+(\xi).$$

Аналогично слева вблизи любой точки $\xi > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi < l$. Покажем сначала, что в точке ξ существует правая производная $g'_+(\xi)$. Так как $g \in E$, то производная $g'(x)$ принадлежит $BV[0, l]$ и, значит, существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow \xi + 0} g'(t) = g'(\xi + 0)$. Покажем, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{g(\xi + \varepsilon) - g(\xi)}{\varepsilon} = g'(\xi + 0)$. В силу абсолютной непрерывности $g(x)$ справедливо равенство $g(\xi + \varepsilon) = g(\xi) + \int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} g'(t) dt$. Поэтому

выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varepsilon} (g(\xi + \varepsilon) - g(\xi)) - g'(\xi + 0) \right| &= \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} g'(t) dt - g'(\xi + 0) \right| \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} (g'(t) - g'(\xi + 0)) dt \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} |g'(t) - g'(\xi + 0)| dt, \end{aligned}$$

что и требовалось. Для левых производных рассуждения аналогичны. Теорема 1.4 доказана.

Таким образом, в любой из проблемных точек, где одна из функций p , Q , F может иметь скачок, уравнение (A) имеет смысл при $x = \xi - 0$ и при $x = \xi + 0$, причем справедливо равенство

$$-\Delta(pu')(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi).$$

Придание x в (A) собственного значения $x = \xi$ приводит (A) к нелепому смыслу.

1.2.3. *Раздвинутая область аргумента уравнения (A).* Обозначим через S_A множество всех точек, где $p(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ имеют ненулевые простые скачки, т.е. имеют не совпадающие левые и правые пределы. Выбросив S_A из $[0, l]$, заменим каждую точку $\xi \in S_A$ парой символов $\{\xi - 0, \xi + 0\}$. Будем считать, что $\xi - 0 > x$ для всех $x < \xi$ и $\xi + 0 < x$ для всех $x > \xi$. Множество, полученное из $[0, l]$ заменой точек $\xi \in S_A$ на соответствующие пары $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $[0, l]_A$.

Множеству $[0, l]_A$ можно дать следующее корректное определение как одномерному метрическому пространству.

Взяв жорданово представление исходных коэффициентов p , Q , F в виде $p = p^+ - p^-$, $Q = Q^+ - Q^-$ и $F = F^+ - F^-$, обозначим через $\sigma_A(x)$ следующую сумму неубывающих функций:

$$\sigma_A(x) = x + p^+(x) + p^-(x) + Q^+(x) + Q^-(x) + F^+(x) + F^-(x).$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\sigma(x)$ имеет разрывы (полные скачки) только в точках множества S_A .

Введем на множестве $[0, l] \setminus S_A$ метрику $\rho(x, y) = |\sigma_A(x) - \sigma_A(y)|$. Если $S_A \neq \emptyset$, то это метрическое пространство, очевидно, не полно. Его стандартное метрическое пополнение с точностью до изоморфизма совпадает с $[0, l]_A$, индуцируя в нем топологию.

Очевидна разрывность этого пространства. Равно как и его компактность.

Мы рассматриваем уравнение (A) на множестве значений x из $[0, l]_A$, не допуская тем самым в (A) значения x из S_A . На $[0, l]_A$ функции $p(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $F(\cdot)$ становятся непрерывными, поскольку их значения $p(\xi + 0)$, $p(\xi - 0)$, $Q(\xi + 0)$, $Q(\xi - 0)$, $F(\xi + 0)$, $F(\xi - 0)$, бывшие в $[0, l]$ предельными, теперь оказываются собственными значениями в соответствующих точках из $[0, l]_A$.

Непрерывность рассматриваемых функций $u(\cdot)$ позволяет сохранять обычный смысл Римана–Стилтьеса для интегрального слагаемого в (A) при $x = \xi - 0$ и $x = \xi + 0$, беря в качестве собственных значения, бывшие ранее предельными.

Таким образом, уравнение (A) нами рассматривается как бы двухслойно: нижний уровень – для значений $x \in [0, l]$ при разговоре о самих решениях $u(x)$

(под знаком интеграла) и второй уровень – для значений x в тождестве (A), где x принимается из $\overline{[0, l]}_A$. Это скажется уже на определении задачи Коши, когда при $x \notin S_A$ она звучит обычно, т. е. считаются наперед заданными значения решения $u(\xi)$ и его производной $u'(\xi)$, а при $\xi \in S_A$ наряду со значением $u(\xi)$ может быть заранее задана одна из односторонних производных $u'(\xi - 0)$ или $u'(\xi + 0)$.

1.2.4. Теорема существования и единственности.

ТЕОРЕМА 1.5. *Для любых $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ и для любой точки $x_0 \in \overline{[0, l]}_A$ существует единственное решение $u(x)$ уравнения (A) такое, что*

$$u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = v_0. \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом начальных условий уравнение (A) принимает вид

$$(p'u')(x) = \int_{x_0}^x u(s) dQ(s) - F(x) + p(x_0)v_0 + F(x_0), \quad (1.9)$$

что можно переписать как $u = Au + z$, где

$$(Au)(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} \left(\int_{x_0}^t u(s) dQ(s) \right) dt, \quad (1.10)$$

$$z(x) = u_0 + \int_{x_0}^x (p(x_0)v_0 - F(t) + F(x_0)) \frac{dt}{p(t)}. \quad (1.11)$$

Оператор A , определяемый формулой (1.10), действует из $C[0, l]$ в $C[0, l]$. Очевидно, что $z(x) \in C[0, l]$. Покажем, что оператор $I - A$ имеет обратный. Для этого достаточно показать, что спектральный радиус $\rho(A)$ меньше 1. Тогда резольвентный оператор $(I - A)^{-1}$ может быть представлен в виде ряда Неймана $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$, который вследствие неравенства $\rho(A) < 1$ будет сходиться по операторной норме. Покажем, что в нашей ситуации $\rho(A) = 0$. Опираясь на формулу $\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$, мы докажем, что

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \leq C^* \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (1.12)$$

с некоторой константой C^* . С этой целью покажем, что для любого натурального n и произвольной $\varphi(x)$ из $C[0, l]$

$$|(A^n(\varphi))(x)| \leq C^n \|\varphi\| \frac{|x - x_0|^n}{n!}, \quad (1.13)$$

где $C = V_0^l[Q]/c_0$, $c_0 = \min_{\overline{[0, l]}_A} p(x)$, $\|\varphi\|$ – норма φ в $C[0, l]$.

Доказательство неравенства (1.13) проведем по индукции. При $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned} |(A(\varphi))(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} \int_{x_0}^t dQ(s) dt \right| \|\varphi\| \\ &\leq \frac{1}{c_0} \left| \int_{x_0}^x |Q(t) - Q(x_0)| dt \right| \|\varphi\| \leq C |x - x_0| \|\varphi\|, \end{aligned}$$

что и требуется. Предположив справедливость (1.13) при $n = k$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} |A(A^k \varphi)(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} \int_{x_0}^t (A^k \varphi)(s) dQ(s) dt \right| \\ &\leq \frac{\|\varphi\|}{c_0} \left| \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t \frac{|s - x_0|^k}{k!} C^k dQ(s) dt \right| \\ &\leq \frac{\|\varphi\|}{c_0} \frac{C^k}{k!} V_0^l[Q] \left| \int_{x_0}^x |t - x_0|^k dt \right| = \frac{C^{k+1}}{(k+1)!} \|\varphi\| |x - x_0|^{k+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось для (1.13).

Принадлежность функции $u(x)$ пространству E , связанная с включением производной $u'(\cdot)$ в пространство $BV[0, l]$, в силу теоремы о преобразовании меры непосредственно следует из (1.9). Теорема 1.5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. В традиционных учебниках аналогичное по сути доказательство упускает необходимость пояснения права на предельный переход в равенстве типа $u_n = Au_n + z$. По существу это право в классической ситуации определяется полнотой $C^1[0, l]$, а в нашем случае – полнотой E .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. В пространстве E следующие нормы, очевидно, эквивалентны:

$$\begin{aligned} \|u\|_E &= \max_{[0, l]} |u| + V_0^l[u'], \\ \|u\|_1 &= \max_{[0, l]} |u| + V_0^l[pu'], \\ \|u\|_2 &= \max \left\{ \max_{[0, l]} |u|, V_0^l[u'] \right\}. \end{aligned}$$

1.2.5. Непрерывная зависимость решения от параметров.

ТЕОРЕМА 1.6. В условиях теоремы 1.5 решение задачи (A), (1.8) непрерывно зависит от начальных данных u_0, v_0 и от вариаций функций $p(\cdot), Q(\cdot), F(\cdot)$ на $[0, l]$.

Доказательство напрямую следует из непрерывности $(I - A)^{-1}$ и из явного представления для $z(x)$.

Изучим вопрос о непрерывной зависимости от параметра λ решения прежнего уравнения (A), т. е.

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0),$$

с зависящими от λ начальными условиями при некотором $x_0 \in \overline{[0, l]}_A$:

$$u(x_0) = \psi_1(\lambda), \quad u'(x_0) = \psi_2(\lambda). \quad (1.14)$$

ТЕОРЕМА 1.7. Если функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ непрерывны по λ , то соответствующее начальным условиям (1.14) решение $u(x, \lambda)$ уравнения (A) зависит от λ непрерывно по норме (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(x)$ – решение уравнения (A) с условиями $v(x_0) = v'(x_0) = 0$. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – решения однородного уравнения $Lu = 0$, т. е.

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = 0,$$

с условиями

$$u(x_0) = 1, \quad u'(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad u(x_0) = 0, \quad u'(x_0) = 1$$

соответственно. Тогда решение задачи (A), (1.14) может быть записано в виде

$$u(x, \lambda) = v(x) + \psi_1(\lambda)\varphi_1(x) + \psi_2(\lambda)\varphi_2(x).$$

Значит, разность

$$u(x, \lambda) - u(x, \lambda_0) = \varphi_1(x)(\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)) + \varphi_2(x)(\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0))$$

может быть оценена следующим образом:

$$\|u(x, \lambda) - u(x, \lambda_0)\| \leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \|\varphi_1\| + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \|\varphi_2\|,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $C[0, l]$. Так как

$$u'(x, \lambda) - u'(x, \lambda_0) = \varphi_1'(x)(\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)) + \varphi_2'(x)(\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)),$$

то

$$V_0^l[u'(x, \lambda) - u'(x, \lambda_0)] \leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| V_0^l[\varphi_1'] + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| V_0^l[\varphi_2'].$$

Поэтому

$$\|u(x, \lambda) - u(x, \lambda_0)\|_E \leq |\psi_1(\lambda) - \psi_1(\lambda_0)| \|\varphi_1\|_E + |\psi_2(\lambda) - \psi_2(\lambda_0)| \|\varphi_2\|_E.$$

Теорема 1.7 доказана.

Рассмотрим теперь уравнение

$$-d(pu') + u dQ(\lambda, x) = dF(\lambda, x) \quad (1.15)$$

при $Q(\lambda, x) = Q_0(x) + \psi_1(\lambda)Q_1(x)$ и $F(\lambda, x) = F_0(x) + \psi_2(\lambda)F_1(x)$, где Q_0, Q_1, F_0, F_1 – функции ограниченной вариации, причем $Q_1 \neq \text{const}$.

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть $u(x, \lambda)$ – решение уравнения (1.15), удовлетворяющее условиям $u(x_0) = u_0, u'(x_0) = v_0$ при некотором $x_0 \in [0, l]_A$. Тогда $u(x, \lambda)$ следом за $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$ непрерывно зависит от λ по норме (1.5) и дифференцируема по λ столько раз, сколько раз дифференцируемы $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$.

Доказательство вполне аналогично предшествующим рассуждениям и ввиду его рутинной громоздкости нами опускается.

1.2.6. Краевая задача. Рассмотрим однородное уравнение

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u \, dQ = 0. \quad (A_0)$$

Ясно, что множество решений $\mathfrak{M}_0 \subset E$ этого уравнения есть линейное подпространство в E .

ЛЕММА 1.1. $\dim \mathfrak{M}_0 = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО тривиально следует из теоремы 1.5.

Следуя традициям теории обыкновенных дифференциальных уравнений, мы будем называть любой базис из $\mathfrak{M}_0$ фундаментальной системой решений однородного уравнения (A_0) .

ЛЕММА 1.2. Пусть $u(x)$, $v(x)$ – какая-либо фундаментальная система решений однородного уравнения (A_0) , и пусть $z(x)$ – какое-либо решение неоднородного уравнения (A) . Тогда любое другое решение $h(x)$ неоднородного уравнения будет иметь вид $h(x) = \alpha_1 u(x) + \alpha_2 v(x) + z(x)$ при некоторых α_1, α_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО тривиально, так как $h - z$ принадлежит $\mathfrak{M}_0$.

Назовем краевой задачей уравнение (A) ($Du = dF$) при условиях

$$l_1(u) = c_1, \quad l_2(u) = c_2,$$

где l_1, l_2 – какие-либо линейные функционалы на E .

Назовем эту задачу невырожденной, если она однозначно разрешима при любых c_1, c_2 и для каждой $F(x) \in BV[0, l]$.

ТЕОРЕМА 1.9. Для невырожденности краевой задачи необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача

$$Du = 0, \quad l_1(u) = 0, \quad l_2(u) = 0$$

имела только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предыдущей лемме, если $u(x)$ – решение неоднородной задачи, то оно имеет вид $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + z$, где z – какое-либо решение неоднородного уравнения (A) (заведомо существующее в силу теоремы 1.5 при произвольных, но зафиксированных начальных условиях). Соответствующие значения коэффициентов α_1, α_2 могут быть найдены из условий $l_1(u) = c_1, l_2(u) = c_2$. А это – система алгебраических (относительно α_1, α_2) уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 l_1(\varphi_1) + \alpha_2 l_1(\varphi_2) &= c_1 - l_1(z), \\ \alpha_1 l_2(\varphi_1) + \alpha_2 l_2(\varphi_2) &= c_2 - l_2(z). \end{aligned}$$

Для однозначной разрешимости последней системы необходимо и достаточно, чтобы ее детерминант

$$\begin{vmatrix} l_1(\varphi_1) & l_1(\varphi_2) \\ l_2(\varphi_1) & l_2(\varphi_2) \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Но последнее условие эквивалентно тому, что возникающая аналогичным способом из однородной задачи $Du = 0, l_1(u) = 0, l_2(u) = 0$ система имеет только тривиальное решение. Теорема 1.9 доказана.

В дальнейшем нас интересует следующий частный случай краевых условий:

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0.$$

Для невырожденности подобной задачи достаточно, чтобы любое нетривиальное решение однородного уравнения $Lu = 0$ имело не более одного нуля в $[0, l]$. Именно это условие станет основой дальнейшего разговора.

2. Линейная теория

2.1. Однородное уравнение. Рассмотрим однородное уравнение (A_0) , т. е.

$$Du = 0 \Leftrightarrow -pu'(x) + pu'(0) + \int_0^x u dQ = 0.$$

Заметим, что если в какой-либо точке ξ одна из функций p , Q разрывна, то в этой точке

$$-pu'(\xi + 0) + pu'(\xi - 0) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = 0. \quad (2.1)$$

2.1.1. Вронскиан. Для пары функций φ_1, φ_2 из E рассмотрим на $\overline{[0, l]}_A$ определитель

$$W[\varphi_1, \varphi_2](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Если из контекста ясно, о какой паре функций φ_1, φ_2 идет речь, мы будем писать $W(x)$ вместо $W[\varphi_1, \varphi_2](x)$. В особых точках мы различаем $W(\xi - 0)$ и $W(\xi + 0)$.

ЛЕММА 2.1. Для любых двух решений φ_1, φ_2 однородного уравнения (A_0) следующие свойства эквивалентны:

- (а) Определитель $W[\varphi_1, \varphi_2](x)$ отличен от нуля в каждой точке из $\overline{[0, l]}_A$;
- (б) $W(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке из $\overline{[0, l]}_A$;
- (в) функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем цепочку импликаций $(а) \Rightarrow (б) \Rightarrow (в) \Rightarrow (а)$.

Заключение $(а) \Rightarrow (б)$ очевидно. Пусть верно свойство $(б)$, и пусть x^* – точка из $\overline{[0, l]}_A$, для которой $W(x^*) \neq 0$. Если бы функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ были линейно зависимыми, то при каждом $x \in \overline{[0, l]}_A$ обе строки детерминанта были бы пропорциональны, т. е. было бы выполнено равенство $W(x) = 0$ для всех x из $\overline{[0, l]}_A$, тогда как $W(x^*) \neq 0$.

Если верно свойство $(в)$ и $W(x^*) = 0$ при некотором x^* из $\overline{[0, l]}_A$, то функция $v(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x^*) - \varphi_2(x)\varphi_1(x^*)$ удовлетворяет условиям $v(x^*) = v'(x^*) = 0$ и уравнению $Lv = 0$, а потому в силу теоремы 1.5 должно быть $v(x) \equiv 0$, т. е. функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно зависимы. Лемма 2.1 доказана.

Мы будем называть функцию $G(x) \in BV[0, l]$ непрерывной на $[0, l]$, если ее левые и правые пределы совпадают (доопределяя в таких точках функцию $G(x)$ общим значением этих пределов).

ЛЕММА 2.2. Для любых двух решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ однородного уравнения (A_0) функция $p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)$ непрерывна на $[0, l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = s - 0$, где s – точка из S_A . В силу равенств $p(s+0)\varphi'_i(s+0) - p(s-0)\varphi'_i(s-0) = \varphi_i(s)\Delta Q(s)$ ($i = 1, 2$) имеем

$$\begin{aligned} p(s+0)W(s+0) - p(s-0)W(s-0) \\ = -\varphi_1(s+0)\varphi_2(s+0)\Delta Q(s) + \varphi_1(s+0)\varphi_2(s+0)\Delta Q(s) = 0. \end{aligned}$$

Случай $x = s + 0$ рассматривается аналогично.

Если в точке x функции p, Q непрерывны, то $\varphi'_1(x), \varphi'_2(x)$ также непрерывны в этой точке (следует из уравнения (A₀) с учетом того, что $p > 0$), а значит, и функция pW непрерывна в точке x . Лемма 2.2 доказана.

2.1.2. Главное свойство вронскиана.

ТЕОРЕМА 2.1. Для любой пары решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ уравнения (A₀) имеет место $p(x)W(x) \equiv \text{const}$ на $[0, l]_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на следующую лемму.

ЛЕММА 2.3. Пусть $h(x) \in BV[0, l]$, и пусть $\varphi(x) = V_0^x[h]$. Тогда для любой $\xi < l$ имеют место соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} V_{\xi+0}^{\xi+\varepsilon}[h] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\varphi(\xi + \varepsilon) - \varphi(\xi + 0)) = 0, \quad (2.2)$$

а для любой $\xi > 0$ верно $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\varphi(\xi - 0) - \varphi(\xi - \varepsilon)) = 0$. Другими словами, функция $\varphi(x) = V_0^x[h]$ в каждой “точке” $\xi + 0$ непрерывна справа, а в каждой “точке” $\xi - 0$ – непрерывна слева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $h(\xi - 0) = h(\xi + 0)$, то утверждение очевидно. Если точка разрыва ξ функции $h(x)$ лежит слева от l , то доказательство (2.2) легко следует из просто проверяемого равенства $V_0^x[h] = V_0^{\xi+0}[h] + V_{\xi+0}^x[h]$ при $\xi < x$. Аналогично для точки $\xi > 0$.

Перейдем к доказательству теоремы. Доопределим функцию $pW(x)$ по непрерывности на отрезок $[0, l]$. Докажем сначала, что $(pW)'(x+0) \equiv 0$. Для произвольной функции $h(x)$ введем обозначение $\Delta_\varepsilon h(x) = h(x+\varepsilon) - h(x)$ при $\varepsilon > 0$. Так как φ_1 и φ_2 принадлежат $\mathfrak{M}_0$, то

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_\varepsilon(pW)(x)}{\varepsilon} &= \frac{\Delta_\varepsilon\varphi_1(x)}{\varepsilon} \int_0^{x+\varepsilon} \varphi_2 dQ + \frac{p(0)\varphi_2'(0)\Delta_\varepsilon\varphi_1(x)}{\varepsilon} \\ &\quad - \frac{\Delta_\varepsilon\varphi_2(x)}{\varepsilon} \int_0^{x+\varepsilon} \varphi_1 dQ - \frac{p(0)\varphi_1'(0)\Delta_\varepsilon\varphi_2(x)}{\varepsilon} \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \left(\varphi_1(x) \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \varphi_2 dQ - \varphi_2(x) \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \varphi_1 dQ \right). \end{aligned}$$

Покажем, что предел последнего слагаемого при $\varepsilon \rightarrow +0$ равен нулю. Обозначая переменную интегрирования (по dQ) через s , имеем

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)) dQ(s) \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\max_{x \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)| \right) V_{x+0}^{x+\varepsilon}[Q]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)| &\leq \|\varphi_1\| \cdot |\varphi_2(s) - \varphi_2(x)| + \|\varphi_2\| \cdot |\varphi_1(x) - \varphi_1(s)| \\ &\leq \|\varphi_1\| \cdot \left| \int_s^x |\varphi_2'(\tau)| d\tau \right| + \|\varphi_2\| \cdot \left| \int_s^x |\varphi_1'(\tau)| d\tau \right|. \end{aligned}$$

Так как $\varphi_1, \varphi_2 \in E$, то вариации функций φ_1', φ_2' конечны и, значит, существует такая константа c_0 , что $|\varphi_2'(\tau)| \leq c_0$ и $|\varphi_1'(\tau)| \leq c_0$. Тогда

$$|\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)| \leq (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)c_0\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\varepsilon} \max_{x \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)| \leq (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)c_0.$$

Так как $V_{x+0}^{x+\varepsilon}[Q] \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, то мы получаем требуемое. Тогда

$$\begin{aligned} (pW)'(x+0) &= \varphi_1'(x+0) \int_0^{x+0} \varphi_2 dQ + p(0)\varphi_2'(0)\varphi_1'(x+0) \\ &\quad - \varphi_2'(x+0) \int_0^{x+0} \varphi_1 dQ - p(0)\varphi_1'(0)\varphi_2'(x+0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая теперь, что для каждой из функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ должно быть выполнено равенство

$$p(x+0)\varphi'(x+0) - p(0)\varphi'(0) = \int_0^{x+0} \varphi dQ,$$

имеем, согласно (2.3), что $(pW)'(x+0) \equiv 0$.

Рассуждения для левой производной $(pW)'(x-0)$ аналогичны. Теорема 2.1 доказана.

2.2. Невырожденная краевая задача. Обозначим через E_0 множество функций из E , удовлетворяющих условиям $u(0) = u(l) = 0$. Рассмотрим задачу

$$Du = dF, \quad u(0) = u(l) = 0. \quad (2.4)$$

В стандартной теории краевых задач возможность интегрального представления решения осуществляется с помощью построения функции Грина, определяемой системой аксиом – как в [6], [50]–[52]. Однако, как обнаружено недавно [53], этот подход некорректен. А для нашей задачи и невозможен. Поэтому мы идем более физическим путем.

2.2.1. Функция влияния. Строгое определение. Точное описание функции влияния мы даем, исходя из физической, точнее вариационной, мотивации уравнения (A). На физическом уровне функция влияния $K(x, s)$ определяется как деформация исходной системы под воздействием единичной силы, приложенной в точке $x = s$.

Напомним, что потенциальная энергия упругого континуума, соответствующая виртуальной (воображаемой) форме $u(x)$, возникающей под влиянием внешней силы $f(x) dx = dF(x)$, выражается функционалом

$$\Phi(u) = \int_0^l p \frac{(u')^2}{2} dx + \int_0^l \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^l u dF.$$

Если внешняя нагрузка имеет единичную величину и приложена только в точке $x = s$, то работа этой силы равна $u(s)$ и последнее слагаемое в записи Φ принимает вид $u(s) = \int_0^l u d\theta(x - s)$, где $\theta(x)$ – классическая функция Хевисайда.

Согласно вариационным принципам, функция $K(x, s)$ есть минималь функционала $\varphi(u) = \int_0^l p \frac{u'^2}{2} dx + \int_0^l \frac{u^2}{2} dQ - u(s)$. Легко проверить, что функция $u_0(x)$ дает минимум этому функционалу в том и только том случае, когда для любой допустимой (т. е. из E_0) функции $h(x)$ верно

$$\int_0^l p u'_0 h' dx + \int_0^l u_0 h dQ - h(s) = 0.$$

Полагая здесь $z(x) = \int_0^x u dQ$, $h(s) = \int_0^l h(x) d\theta(x - s)$, имеем после интегрирования по частям первых двух слагаемых

$$\int_0^l h d(-(pu')(x) + z(x) - \theta(x - s)) = 0;$$

откуда следует, что соответствующий дифференциал Стильтеса, будучи нулевым, должен порождаться константой, т. е. $-(pu')(x) + z(x) - \theta(x - s) \equiv \text{const}$, а это означает, по определению $z(x)$, что

$$-(pu')(x) + \int_0^x u dQ = \theta(x - s) - (pu')(0). \quad (2.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функцией влияния $K(x, s)$ исходной задачи (2.4) мы называем решение при каждом $s \in (0, l)$ уравнения (2.5) при условиях $u(0) = u(l) = 0$.

2.2.2. Основные свойства функции влияния. Приводимые ниже свойства получаются напрямую из (2.5).

1. При каждом $s_0 \in (0, l)$ функция $g(x) = K(x, s_0)$ удовлетворяет на интервалах $(0, s_0)$ и (s_0, l) однородному уравнению $Lu = 0$.

2. При каждом $s_0 \in (0, l)$ функция $g(x) = K(x, s_0)$ удовлетворяет на диагонали $x = s_0$ следующим равенствам:

- (α) если ξ не есть точка разрыва Q , то $-\Delta(pg')(s_0) = 1$,
- (β) если ξ – точка разрыва Q , то $-\Delta(pg')(s_0) + g(s_0)\Delta Q(s_0) = 1$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть уравнение $Lu = 0$ имеет решение без нулей на $[0, l]$. Тогда $K(x, s) > 0$ для всех x, s , отличных от 0 и l . Если при этом функция $Q(x)$ не убывает, то $\max_{x \in [0, l]} K(x, s) = K(s, s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\varphi(x)$ положительное решение уравнения $Lu = 0$, не имеющее нулей на отрезке $[0, l]$. Покажем, что при любом $s_0 \in (0, l)$ функция $g(x) = K(x, s_0)$ неотрицательна. Согласно теореме о факторизации (теорема 1.1),

$$d\left(\varphi^2 p \frac{d}{dx}\left(\frac{g}{\varphi}\right)\right) = -\varphi d\theta(x - s) \leq 0,$$

т. е. функция $\varphi^2 p \frac{d}{dx}\left(\frac{g}{\varphi}\right)$ не возрастает на $[0, l]$. Значит, функция $\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{\varphi}\right)$ может менять знак не более одного раза, причем с плюса на минус. Из условий $g(0) = g(l) = 0$ и положительности $\varphi(x)$ следует, что $g(x) \geq 0$ на $[0, l]$.

Так как функция $g(x)$ удовлетворяет неравенству $Du \geq 0$, то из теоремы 1.2 следует, что $g(x) > 0$ на $(0, l)$. При $x < s_0$ верно

$$(pg')(x) = (pg')(0) + \int_0^x g(s) dQ(s)$$

и, очевидно, $(pg')(0) \geq 0$, поэтому $(pg')(x) > 0$ на $(0, s_0)$, откуда $g'(x) > 0$ при тех же x , что означает возрастание $g(x)$ на $(0, s_0)$. Аналогично, на (s_0, l) функция $g(x)$ строго убывает. Таким образом, $g(x)$ имеет единственный максимум при $x = s_0$. Теорема 2.2 доказана.

2.2.3. *Однопарное представление функции влияния.* Пусть задача (2.4) невырождена. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – решения однородного уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1'(0) = 1, \quad (2.6)$$

$$\varphi_2(l) = 0, \quad \varphi_2'(l) = -1. \quad (2.7)$$

ТЕОРЕМА 2.3. *Функция влияния $K(x, s)$ задачи (2.4) существует и может быть представлена в виде*

$$K(x, s) = \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \begin{cases} \varphi_1(s)\varphi_2(x) & \text{при } 0 \leq s \leq x \leq l, \\ \varphi_2(s)\varphi_1(x) & \text{при } 0 \leq x \leq s \leq l. \end{cases} \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из невырожденности задачи следует, что $\varphi_2(0) \neq 0$ и $\varphi_1(l) \neq 0$. Легко видеть, что система $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ – базис в $\mathfrak{M}_0$.

Функция $K(x, s)$ как решение удовлетворяет по x (при $x \neq s$) уравнению $Lu = 0$. Поэтому

$$K(x, s) = \begin{cases} c_1(s)\varphi_1(x), & 0 \leq x < s, \\ c_2(s)\varphi_2(x), & s < x \leq l, \end{cases} \quad (2.9)$$

для некоторых функций $c_1(s)$, $c_2(s)$. Так как функция $g(x) = K(x, s_0)$ должна быть непрерывной при $x = s_0$, то

$$c_1(s_0)\varphi_1(s_0) = c_2(s_0)\varphi_2(s_0). \quad (2.10)$$

Функция $g(x) = K(x, s_0)$ должна удовлетворять уравнению $Du = dF$ при $F(x) = \Theta(x - s_0)$, откуда $\Delta(pg')(s_0) = g(s_0)\Delta Q(s_0) - 1$. Последнее должно означать, что

$$c_2(s_0)(p\varphi_2')(s_0 + 0) - c_1(s_0)(p\varphi_1')(s_0 - 0) = K(s_0, s_0)\Delta Q(s_0) - 1.$$

Заменяя здесь в силу (2.10) $c_2(s_0)$ на $c_1(s_0)\varphi_1(s_0)/\varphi_2(s_0)$, получим

$$c_1(s_0) \frac{\varphi_1(s_0)(p\varphi_2)'(s_0+0)}{\varphi_2(s_0)} - c_1(s_0)(p\varphi_1')(s_0-0) + 1 = K(s_0, s_0)\Delta Q(s_0). \quad (2.11)$$

Так как $\varphi_1(x)$ удовлетворяет однородному уравнению, то

$$(p\varphi_1')(s_0-0) = (p\varphi_1)'(s_0+0) - \varphi_1(s_0)\Delta Q(s_0).$$

Подставляя полученное выражение в (2.11) и учитывая равенство

$$c_1(s_0)\varphi_1(s_0) = K(s_0, s_0),$$

будем иметь

$$c_1(s_0)\varphi_1(s_0) \frac{(p\varphi_2)'(s_0+0)}{\varphi_2(s_0)} - c_1(s_0)(p\varphi_1')(s_0+0) + 1 = 0,$$

т.е. у нас пропало слагаемое со скачком $\Delta Q(s_0)$ и, главное, все предельные значения остались только справа.

Отсюда уже можно элементарно получить

$$c_1(s_0)p(s_0+0)W[\varphi_1, \varphi_2](s_0+0) + \varphi_2(s_0) = 0,$$

откуда

$$c_1(s_0) = -\frac{1}{(pW)(s_0+0)} \varphi_2(s_0).$$

Знаменатель в последнем выражении, т.е. функция $(pW)(x)$, есть константа (теорема 2.1), равная

$$(pW)(s_0+0) = (pW)(l) = (pW)(0) = -p(l)\varphi_1(l) = -p(0)\varphi_2(0).$$

Поэтому

$$c_1(s_0) = \frac{\varphi_2(s_0)}{p(0)\varphi_2(0)} = \frac{\varphi_2(s_0)}{p(l)\varphi_1(l)}.$$

Совершенно аналогично получается, что $c_2(s) = \frac{\varphi_1(s)}{p(0)\varphi_2(0)}$ при всех s . Теорема 2.3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Функция влияния симметрична, т.е. $K(x, s) = K(s, x)$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Функция влияния непрерывна по совокупности переменных на квадрате $[0, l] \times [0, l]$.*

2.2.4. Интегральная обратимость невырожденной задачи.

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть задача (2.4) невырождена и $K(x, s)$ – ее функция влияния. Тогда для любой $F(x)$ из $BV[0, l]$ соответствующее решение $u(x)$ задачи (2.4) представимо в виде*

$$u(x) = \int_0^l K(x, s) dF(s). \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть (2.12) через $v(x)$, т. е.

$$v(x) = \frac{\varphi_2(x)}{p(0)\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_1 dF + \frac{\varphi_1(x)}{p(0)\varphi_2(0)} \int_x^1 \varphi_2 dF.$$

Равенства $v(0) = v(l) = 0$ очевидны. Для доказательства равенства $Dv = dF$ покажем сначала, что $v(\cdot) \in E$. Для произвольных $\alpha \leq \beta$ справедливо

$$\begin{aligned} v(\beta) - v(\alpha) &= \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \left((\varphi_2(\beta) - \varphi_2(\alpha)) \int_0^\beta \varphi_1 dF + (\varphi_1(\beta) - \varphi_1(\alpha)) \int_\beta^1 \varphi_2 dF \right) \\ &+ \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \int_\alpha^\beta ((\varphi_2(\alpha) - \varphi_2(s))\varphi_1(s) + (\varphi_1(s) - \varphi_1(\alpha))\varphi_2(s)) dF(s), \end{aligned}$$

откуда следует абсолютная непрерывность функции $v(x)$.

Покажем, что производная $v'(x)$ функции $v(x)$ определяется равенством

$$v'(x) = \frac{\varphi_2'(x)}{p(0)\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_1 dF + \frac{\varphi_1'(x)}{p(0)\varphi_2(0)} \int_x^1 \varphi_2 dF. \quad (2.13)$$

Обозначим $\Delta_\varepsilon h(x) = h(x + \varepsilon) - h(x)$, где $\varepsilon > 0$. Проведем доказательство для правой производной (для левой рассуждения аналогичны). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_\varepsilon v}{\varepsilon} &= \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_2}{\varepsilon} \int_0^{x+\varepsilon} \varphi_1 dF + \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1}{\varepsilon} \int_{x+\varepsilon}^1 \varphi_2 dF \\ &+ \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \int_{x+\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_2(x+0)\varphi_1(s) - \varphi_1(x+0)\varphi_2(s)}{\varepsilon} dF(s). \end{aligned}$$

Аналогично теореме 2.1 можно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{x+0}^{x+\varepsilon} (\varphi_2(x+0)\varphi_1(s) - \varphi_1(x+0)\varphi_2(s)) dF(s) \right) = 0,$$

откуда вытекает (2.13). Из (2.13) следует, что $v' \in \text{BV}[0, l]$, и, значит, $v \in E$.

Покажем теперь, что $Dv = dF$. Заметим сначала, что

$$\begin{aligned} \int_0^x v dQ &= \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_2(s) \int_0^s \varphi_1 dF dQ \\ &+ \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_1(s) \int_s^1 \varphi_2 dF dQ. \end{aligned}$$

Оба повторных интеграла здесь применяются к непрерывной функции $\varphi_1\varphi_2$, и поэтому, в силу теоремы Фубини (см., например, [45]), мы можем менять пределы интегрирования. Пользуясь при этом равенствами $D\varphi_1 = 0$, $D\varphi_2 = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_2(s) \int_0^s \varphi_1 dF dQ \\ &= \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_1(t) ((p\varphi_2')(x) - (p\varphi_2')(t)) dF(t). \end{aligned}$$

Аналогично, с учетом тождества

$$p(0)\varphi_1'(0) + \int_0^x \varphi_1 dQ = p(x)\varphi_1'(x)$$

и условий (2.6), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_1(s) \int_s^l \varphi_2 dF dQ \\ &= \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_2(t)(p(t)\varphi_1'(t) - p(0)) dF(t) \\ & \quad + \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \int_x^l \varphi_2(t)(p(x)\varphi_1'(x) - p(0)) dF(t) \\ &= \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_2 p \varphi_1' dF - \frac{1}{\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_2 dF \\ & \quad + \frac{p(x)\varphi_1'(x)}{p(0)\varphi_2(0)} \int_x^l \varphi_2 dF - \frac{1}{\varphi_2(0)} \int_x^l \varphi_2 dF. \end{aligned}$$

Подставив полученное представление для $\int_0^x v dQ$ в (2.4) и учитывая, что (согласно теореме 2.1)

$$p(t)(\varphi_2(t)\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)\varphi_2'(t)) = -p(0)\varphi_2(0),$$

т. е. $(pW)(t) = -p(0)\varphi_2(0)$, получим верное равенство. Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи (2.4).

2.3. Распределение нулей. Рассмотрим однородное уравнение $Lu = 0$, т. е.

$$Du = 0 \Leftrightarrow -(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Всякое нетривиальное решение из E уравнения $Lu = 0$ может иметь на отрезке $[0, l]$ лишь конечное число нулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u(\xi_n) = 0$ и $u(x)$ – нетривиальное решение однородного уравнения, то в точке ξ^* сгущения $\{\xi_n\}$ должны быть выполнены равенства $u(\xi^*) = u'(\xi^*) = 0$, что невозможно.

2.3.1. Перемежаемость нулей. Рассмотрим два уравнения

$$d(pu') = u dQ_1, \tag{2.14}$$

$$d(pv') = v dQ_2. \tag{2.15}$$

ТЕОРЕМА 2.5 (теорема сравнения). *Пусть $dQ_1 \geq dQ_2$, т. е. функция $Q_1 - Q_2$ не убывает на $[0, l]$. Пусть $\xi_1 < \xi_2$ – соседние нули нетривиального решения $u(x)$ уравнения (2.14). Тогда для любого решения $v(x)$ уравнения (2.15), неколлинеарного с $u(x)$, между ξ_1 и ξ_2 найдется его нуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x) > 0$ для всех $x \in (\xi_1, \xi_2)$. Предположим, что $v(x) > 0$ при всех $x \in [\xi_1, \xi_2]$. Рассмотрим случай, когда в точке ξ_1 все функции p , Q_1 , Q_2 являются непрерывными, а в точке ξ_2 одна из них терпит разрыв (все остальные случаи рассматриваются аналогично). Так как $pu'(x) - pu'(0) = \int_0^x u dQ_1$, то для любой непрерывной $\varphi(x)$ в силу теоремы

о преобразовании меры имеем $\int_{\xi_1}^{\xi_2-0} \varphi d(pu') = \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} \varphi u dQ_1$, что при $\varphi = v$ дает $\int_{\xi_1}^{\xi_2-0} v d(pu') = \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} uv dQ_1$. Аналогично, $\int_{\xi_1}^{\xi_2-0} u d(pv') = \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} uv dQ_2$.

Поэтому после преобразования интегралов $\int_{\xi_1}^{\xi_2-0} u d(pv')$, $\int_{\xi_1}^{\xi_2-0} v d(pu')$ интегрированием по частям получим для их разности

$$v(\xi_2)p(\xi_2-0)u'(\xi_2-0) = v(\xi_1)p(\xi_1)u'(\xi_1) + \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} uv d(Q_1 - Q_2). \quad (2.16)$$

Так как $u'(\xi_1) > 0$, то правая часть (2.16) строго положительна. С другой стороны, $u'(\xi_2-0) < 0$. Противоречие очевидно. Значит, $v(x)$ имеет нуль внутри интервала (ξ_1, ξ_2) .

При $dQ_1 = dQ_2$ получаем следствие.

ТЕОРЕМА 2.6 (теорема о перемежаемости). Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения (A₀). Тогда между двумя соседними нулями функции $\varphi_1(x)$ находится по крайней мере один нуль функции $\varphi_2(x)$ и наоборот.

2.3.2. Неосцилляция однородного уравнения. Любое нетривиальное решение из E уравнения (A₀), как мы видели, может иметь не более конечного числа нулей. Важнейшим оказывается случай, когда таких нулей не более одного.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Назовем уравнение $Du = 0$ ($Lu = 0$) неосциллирующим на отрезке $[0, l]$, если любое его нетривиальное решение имеет на $[0, l]$ не более одного нуля.

Простейший пример такого уравнения: $-d(pu') = 0$, т.е. (A₀) при $dQ = 0$. Для любого его решения $\varphi(x)$ должно быть выполнено равенство $(p\varphi') = \text{const}$, и, очевидно, $\varphi(x)$ строго монотонна. Отсюда в силу теоремы сравнения 2.5 получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для неосцилляции на $[0, l]$ уравнения $-d(pu') + u dQ = 0$ достаточно, чтобы $dQ \geq 0$, т.е. чтобы функция $Q(x)$ не убывала.

В вариационном исчислении широко употребляется так называемое условие Якоби, определяемое с помощью понятия сопряженной точки. Напомним, что для уравнения $-(pu') + qu = 0$ точка ξ называется сопряженной к точке η , если существует нетривиальное решение с нулями в точках $x = \eta$ и $x = \xi$. Условие Якоби требует, чтобы на отрезке $[a, b]$ не было точек (отличных от a), сопряженных к a .

ТЕОРЕМА 2.7. Следующие свойства эквивалентны:

- (а) однородное уравнение $Du = 0$ не осциллирует на $[0, l]$;
- (б) на $[0, l]$ нет сопряженных к $x = 0$ точек, отличных от $x = 0$, аналогично, нет отличных от $x = l$ точек, сопряженных к $x = l$;
- (в) существует неотрицательное на $[0, l]$ решение уравнения $Du = 0$ такое, что $u(0) > 0$ (или $u(l) > 0$);
- (г) существует строго положительное на $[0, l]$ решение уравнения $Du = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость цепочки импликаций (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в) $\Rightarrow$ (г) $\Rightarrow$ (а). Нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 2.4. Любое нетривиальное и знакопостоянное на $[0, l]$ решение однородного уравнения (A_0) не имеет нулей на интервале $(0, l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (A_0) и $u(x) \geq 0$ на $[0, l]$. Пусть $0 < \xi < l$ – точка, в которой $u(\xi) = 0$. Это значит, что в точке $x = \xi$ функция $u(x)$ имеет минимум, и поэтому производная $u'(x)$ должна вместе с $(pu')(x)$ менять знак в этой точке. Если $\xi \notin S_A$, то pu' непрерывна в этой точке, и потому $(pu')(\xi) = 0$, т.е. $u'(\xi) = 0$, что одновременно с равенством $u(\xi) = 0$ по теореме 1.5 влечет тождество $u(x) \equiv 0$, чего не может быть. Пусть теперь $\xi \in S_A$, т.е. $u'(\xi - 0) \neq u'(\xi + 0)$. Тогда $u'(\xi - 0) \leq 0$ и $u'(\xi + 0) \geq 0$. С другой стороны, из равенства (2.1) следует (в силу $u(\xi) = 0$), что $(pu')(\xi + 0) - (pu')(\xi - 0) = 0$, и поэтому $(pu')(\xi - 0) = (pu')(\xi + 0)$. По предыдущему $u'(\xi - 0) = u'(\xi + 0) = 0$, и вместе с равенством $u(\xi) = 0$ мы имеем нулевую задачу Коши, откуда $u(x) \equiv 0$. Лемма 2.4 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) тривиальна. Пусть верно (б). Беря решение $u(x)$ с условиями $u(l) = 0$, $u'(l) = -1$, мы видим, что в силу (б) оно не может иметь отличных от $x = l$ нулей в $[0, l]$, а потому $u(x) > 0$ на $[0, l)$. Значит, заключение (б) $\Rightarrow$ (в) истинно.

Пусть выполняется (в). Пусть $u(x)$ – неотрицательное решение с условием $u(0) > 0$. Из неравенства $u(x) \geq 0$ в силу доказанной выше леммы следует, что $u(x)$ не может иметь нулей внутри $[0, l]$, т.е. $u(x) > 0$ на $[0, l)$. Пусть $v(x)$ – аналогичное решение, ненулевое при $x = l$. Сумма $u(x) + v(x)$ есть решение, строго положительное на всем $[0, l]$, т.е. заключение (в) $\Rightarrow$ (г) истинно.

Покажем истинность заключения (г) $\Rightarrow$ (а). Пусть $u(x)$ – строго положительное на $[0, l]$ решение. Если бы какое-либо другое решение $v(x)$ имело на $[0, l]$ два нуля, то между этими нулями по теореме о перемежаемости нулей функция $u(x)$ должна была бы иметь хотя бы один ноль, что невозможно. Теорема 2.7 доказана.

Следующий результат для гладких p и Q адекватен классической теореме Валле–Пуссена.

ТЕОРЕМА 2.8. Для неосцилляции уравнения $Du = 0$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторой неубывающей функции $H(x)$ уравнение $Du = u dH$ имело строго положительное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует при $dH = 0$ из предыдущей теоремы. Пусть $\varphi \in E$ и $D\varphi = \varphi dH$ при $dH \geq 0$. Тогда уравнение $Du - u dH = 0$,

т. е. $-d(pu') + u dQ_1 = 0$ при $Q_1 \equiv Q - H$, имея строго положительное на $[0, l]$ решение, не осциллирует на $[0, l]$. А так как $dQ \leq dQ_1$, то неосцилляция исходного уравнения следует из аналога теоремы сравнения Штурма 2.5.

2.3.3. Неосцилляция дифференциальных неравенств. Будем называть однородное уравнение $Du = 0$ *критически неосциллирующим* на отрезке $[0, l]$, если оно не осциллирует на любом отличном от $[0, l]$ промежутке $[a, b] \subset [0, l]$, но осциллирует на $[0, l]$.

Это значит, что точка $x = l$ является сопряженной к точке $x = 0$, но внутри $(0, l)$ подобных точек нет. Другими словами, $[0, l]$ является промежутком критической неосцилляции, если однородное уравнение $Lu = 0$ имеет нетривиальное строго положительное на $(0, l)$ решение с нулями на концах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть однородное уравнение $Du = 0$ критически не осциллирует на $[0, l]$. Тогда любое неотрицательное на отрезке $[0, l]$ решение $u(x) \not\equiv 0$ дифференциального неравенства $Du \geq 0$ не имеет нулей на интервале $(0, l)$. При этом $u'(0) \neq 0$ ($u'(l) \neq 0$), если $u(0) = 0$ ($u(l) = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как уравнение $Du = 0$ не осциллирует на $[\varepsilon, l]$ и $[0, l - \varepsilon]$ при $\varepsilon > 0$, то наше утверждение следует из теоремы 1.2.

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть уравнение $Du = 0$ критически не осциллирует на $[0, l]$. Тогда любое нетривиальное решение $z(x)$ неравенства $Du \geq 0$ при условиях

$$u(0) \geq 0, \quad u(l) \geq 0 \quad (2.17)$$

превращает все эти неравенства в равенства, т. е. является решением задачи

$$Dz = 0, \quad z(0) = 0, \quad z(l) = 0. \quad (2.18)$$

Следующий пример показывает, насколько обсуждаемый круг вопросов углубляет привычные качественные свойства, изучаемые в традиционной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Согласно последней теореме, любая функция $u(x)$, удовлетворяющая неравенствам

$$-u'' \geq u, \quad u(0) \geq 0, \quad u(\pi) \geq 0,$$

не может быть ни чем иным, как $u(x) \equiv C \sin x$ при $C = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(x)$ – положительное на интервале $(0, l)$ решение задачи (2.18). Пусть $u(x)$ – нетривиальное решение неравенства $Du \geq 0$, удовлетворяющее (2.17). Рассмотрим непрерывную на $(0, l)$ функцию $\varphi = u/v$. Пусть $\varphi \neq \text{const}$. Если нижняя грань $\lambda_0 = \inf_{(0, l)} \varphi$ достигается в одной из внутренних точек $x_0 \in (0, l)$, то функция $h = u - \lambda_0 v$ будет являться неотрицательным решением неравенства $Du \geq 0$, обращаясь в нуль в точке $x_0 \in (0, l)$ и тем самым противореча предыдущей теореме. Пусть $\inf_{(0, l)} \varphi$ достигается в одной из граничных точек $(0, l)$, например в точке $x = 0$. Если $\lambda_0 > -\infty$, то из равенства $v(0) = 0$ следует, что $u(0) = 0$. Но тогда $\lambda_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (u(x)/v(x)) = u'(0)/v'(0)$, и неотрицательная на $[0, l]$ функция $h = u - \lambda_0 v$, удовлетворяя дифференциальному неравенству $Du \geq 0$, имела бы в точке $x = 0$ нулевое значение и нулевую производную, что противоречило бы предыдущей теореме.

Предположим теперь, что $\lambda_0 = \inf_{(0,l)} \varphi = -\infty$. В силу неравенства $u(0) \geq 0$ это возможно лишь в случае, когда $u'(0) = 0$. А так как $v'(0) > 0$ и предел $\varphi = u/v$ при $x \rightarrow 0$ равен $u'(0)/v'(0)$, то равенство $\lambda_0 = -\infty$ невозможно. Значит, функция $\varphi = u/v$ есть константа. Теорема 2.9 доказана.

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть $v_0(x)$ – нетривиальное решение задачи (2.18), т.е.

$$Du = 0, \quad u(0) = u(l) = 0,$$

а функция $u(x)$ является решением неравенства

$$v_0(x)Du \geq 0 \quad (x \in (0, l)), \quad (2.19)$$

причем во всякой нулевой точке ξ функции $v_0(x)$ выполняется равенство $p(\xi - 0)u'(\xi - 0) = p(\xi + 0)u'(\xi + 0)$. Пусть $u(0) = 0$, $v'_0(l - 0)u(l) \leq 0$. Тогда функции $v_0(x)$ и $u(x)$ коллинеарны, т.е. для некоторой константы C верно тождество $u(x) = Cv_0(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по количеству нулей функции $v_0(x)$ в $(0, l)$. При $k = 0$, когда $v_0(x)$ сохраняет знак в $(0, l)$, утверждение следует из предыдущей теоремы.

Предположим, что теорема верна для любой $v_0(x)$ с k нулями в $(0, l)$. Если $\{\xi_i\}_1^{k+1}$ – нули некоторого решения $z_0(x)$ задачи (2.18), то на интервале $(0, \xi_1)$ выполнены все условия предыдущей теоремы, что влечет $u(x) \equiv C_0 z_0(x)$ на $(0, \xi_1)$ при некотором C_0 . Теперь на (ξ_1, l) выполняются все предпосылки доказываемой теоремы, и у $z_0(x)$ k нулей. Тогда по предположению индукции существует C_1 , для которой $u(x) \equiv C_1 z_0(x)$ на (ξ_1, l) . Покажем теперь, что $C_0 = C_1$. Для этого сначала заметим, что pz'_0 в точке ξ_1 непрерывна. Если ξ_1 принадлежит S_A , то мы имеем равенство $(pz'_0)(\xi_1 + 0) - (pz'_0)(\xi_1 - 0) = 0$, которое и означает непрерывность $pz'_0(x)$ в точке ξ_1 . Если же $\xi_1 \notin S_A$, то непрерывность $pz'_0(x)$ очевидна. Равенство $C_0 = C_1$ теперь легко следует из непрерывности функций pu' и pz'_0 в точке ξ_1 . Значит, $u(x) \equiv C_0 z_0(x)$ на всем $(0, l)$. Теорема 2.10 доказана.

3. Спектральная задача Штурма–Лиувилля

Пусть функция $Q(x)$ не убывает, а функция $M(x)$ строго возрастает на $[0, l]$, причем все функции $p(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ непрерывны в точках $x = 0$, $x = l$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -d(pu') + u dQ = \lambda u dM, \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

в прежнем классе E абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций с производными из $BV[0, l]$. Все функции предполагаются вещественными.

Будем называть число $\lambda = \lambda^*$ (возможно, комплексное) точкой спектра задачи (3.1), если при этом λ задача оказывается вырожденной, т.е. имеет нетривиальное решение $u^*(x)$. Такое решение называют собственной функцией, а соответствующую точку спектра λ – собственным значением.

3.1. Структура спектра. Покажем, что спектр задачи (3.1) не пуст и состоит из простых (в смысле алгебраической и геометрической кратности) положительных собственных значений.

3.1.1. Дискретность и простота спектра. Пусть функция $Q(x)$ не убывает на отрезке $[0, l]$, т. е. $dQ \geq 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} -d(pu') + u dQ = dF, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Так как эта задача невырождена (в силу $dQ \geq 0$), то у нее существует функция влияния $K(x, s)$.

Если λ^* – какая-либо точка спектра исходной задачи и $u^*(x)$ – соответствующая собственная функция, то, полагая $dF = \lambda^* u^* dM$, т. е. $F(x) = \lambda^* \int_0^x u^* dM$, мы можем с помощью функции влияния обратить соответствующую краевую задачу $Du = dF$, $u(0) = u(l) = 0$, получив равенство

$$u^*(x) = \lambda^* \int_0^l K(x, s) u^*(s) dM(s). \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Оператор*

$$Au(x) = \int_0^l K(x, s) u(s) dM(s)$$

действует и вполне непрерывен в пространстве $C[0, l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно стандартным образом (см. [45]) следует из непрерывности по совокупности переменных ядра $K(x, s)$ этого оператора.

Таким образом, уравнение (3.3) оказывается в области применимости общей теории Рисса–Шаудера, что позволяет сразу установить следующее свойство.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Спектр оператора A состоит из собственных значений, не более чем счетен, причем точкой сгущения собственных значений оператора A может быть только $\lambda = 0$.*

Отметим, что термин спектр здесь начинает раздваиваться. Выражаясь корректно, точки спектра краевой задачи являются не собственными, а характеристическими значениями оператора A . Точнее, если λ – собственное значение краевой задачи, то для оператора A собственным будет значение $\mu = 1/\lambda$, и наоборот. Поэтому, например, у интегрального оператора спектр может сгущаться только возле нуля, а для краевой задачи – “в окрестности бесконечности”.

Таким образом, спектр задачи (3.1) состоит из собственных значений, не более чем счетен, причем единственно возможная точка сгущения собственных значений есть бесконечность.

ТЕОРЕМА 3.2. *Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений равны единице.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – две собственные функции, отвечающие собственному значению λ_0 . Тогда $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, и, следовательно, вронскиан $W[\varphi_1, \varphi_2](0)$ равен нулю, т. е. система функций φ_1, φ_2 линейно зависима. Значит, $\varphi_1(x) = c\varphi_2(x)$.

Покажем отсутствие присоединенных функций. Предположим, что $u(x)$ – присоединенная функция. Тогда $u(x)$ является решением уравнения

$$Du = \lambda_0 u dM + \varphi dM$$

при условиях $u(0) = u(l) = 0$, где $\varphi(x)$ – собственная функция исходной задачи, отвечающая собственному значению λ_0 . Значит, для функции $u(x)$ верно равенство $D_1 u = \varphi dM$ при $D_1 u = Du - \lambda_0 u dM$, откуда следует, что u удовлетворяет уравнению $\varphi D_1 u = \varphi^2 dM \geq 0$, и мы оказываемся в условиях теоремы 2.10, согласно которой $\varphi \equiv 0$.

3.1.2. Вещественность и положительность спектра.

ТЕОРЕМА 3.3. Каждое собственное значение задачи (3.1) положительно. Соответствующие собственные функции можно выбрать вещественными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вещественность спектра следует из симметричности функции влияния. Докажем положительность собственных значений. Пусть $u(x)$ – вещественная собственная функция, отвечающая собственному значению λ . Тогда справедливо

$$-d(pu') + u dQ = \lambda u dM,$$

и в силу теоремы о преобразовании меры

$$-\int_0^l u d(pu') + \int_0^l u^2 dQ = \lambda \int_0^l u^2 dM.$$

Следовательно,

$$\int_0^l p(u')^2 dx + \int_0^l u^2 dQ = \lambda \int_0^l u^2 dM,$$

откуда видно, что $\lambda > 0$.

3.1.3. Непустота спектра. Покажем теперь, что спектр задачи (3.1) непуст.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\xi \in (0, l)$ – нуль нетривиального решения $u_0(x)$ уравнения $Du = \lambda u dM$. Тогда при переходе через точку ξ функция $u_0(x)$ меняет знак, т. е. точка ξ является узлом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_0(\xi) = 0$. Предположим, что функция $u_0(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки ξ . Тогда производные $u'_0(\xi - 0)$, $u'_0(\xi + 0)$ (доказательство как в лемме 2.4) равны нулю, что влечет за собой равенство $u_0(x) \equiv 0$, которое невозможно.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть функция $Q(x)$ не убывает на отрезке $[0, l]$, а функция $M(x)$ строго возрастает на $[0, l]$. Тогда найдется положительное конечное число λ^* такое, что задача (3.1) при $\lambda = \lambda^*$ имеет нетривиальное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегральный оператор Au , порождаемый функцией влияния, имеет непрерывное на квадрате $0 \leq x, s \leq l$ ядро, строго положительное внутри. Поэтому, согласно теореме М. Г. Крейна [54], он имеет строго положительную внутри $(0, l)$ собственную функцию, соответствующую собственному значению λ_0 , причем все точки спектра этого оператора удовлетворяют неравенству $|\lambda| < \lambda_0$.

3.2. Осцилляционные свойства собственных функций. Цель настоящего пункта – завершение доказательства основной осцилляционной теоремы для задачи

$$Du = \lambda u dM, \quad u(0) = u(l) = 0. \quad (3.4)$$

Для этого мы введем в рассмотрение функцию $u(x, \lambda)$, удовлетворяющую уравнению

$$-d(pu') + u d(Q - \lambda M) = 0$$

и условиям

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Ясно, что если $u(x, \lambda)$ при некотором $\lambda = \lambda^*$ обращается в нуль на правом конце $x = l$, то это значение λ^* является собственным, так же как и функция $z(x) = u(x, \lambda^*)$ будет собственной функцией, соответствующей этому собственному значению. Значит, множество решений уравнения

$$u(l, \lambda) = 0$$

относительно λ содержит спектр исходной задачи. Мы будем изучать решения этого уравнения, анализируя зависимость от λ решений $x(\lambda)$ более общего уравнения

$$u(x, \lambda) = 0$$

и фиксируя те значения λ , при которых $x(\lambda) = l$.

3.2.1. Метод накачки нулей. Продолжим вправо от точки $x = l$, т. е. на множество $[l, \infty)$, коэффициенты p , Q , M исходного уравнения так, чтобы они были непрерывными в точке $x = l$ и чтобы p , Q были константами вправо от l , а M была линейной возрастающей функцией ($M(x) = m_0 x + c$ при $m_0 > 0$). Решения этого продолженного уравнения будут определены на $[0, \infty)$, причем на $[0, l]$ они будут совпадать с решениями исходного уравнения. Сохраним за продолженными коэффициентами исходное обозначение. На $[l, \infty)$ это уравнение примет вид

$$-d(p_0 u') = \lambda m_0 u dx,$$

т. е. $-p_0 u'' = \lambda m_0 u$ (здесь $p_0 = p(l)$). Распространяя на $[l, \infty)$ соответствующее решение $u(x, \lambda)$ задачи $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, замечаем, что при $\lambda > 0$ эта функция имеет бесконечное число нулей в $[l, \infty)$ и, значит, в $[0, \infty)$.

Обозначим нули $u(x, \lambda)$ на $(0, \infty)$ в порядке их возрастания через $z_0(\lambda)$, $z_1(\lambda), \dots, z_k(\lambda), \dots$. Все они – простые нули $u(x, \lambda)$, непрерывно зависящие от λ . В силу теоремы 2.5 каждая из функций $z_k(\lambda)$ строго убывает по λ , когда ее значение принадлежит лучу $(0, \infty)$.

При λ , совпадающем с ведущим собственным значением λ_0 , очевидно, выполнено равенство $z_0(\lambda_0) = l$. При $\lambda = 0$ функция $u(x, 0)$ не имеет нулей в $(0, l]$, так как уравнение $-d(pu') + u dQ = 0$ не осциллирует на $[0, l]$, ибо $dQ \geq 0$. Поэтому $\lambda_0 > l$. Если λ непрерывно увеличивать, то все нулевые точки $z_i(\lambda)$ будут непрерывно, нигде не останавливаясь, двигаться влево (это предстоит доказать). Когда очередная из них, $z_k(\lambda)$, совпадет с l , соответствующее решение $u(x, \lambda)$, обнулившись в точке $x = l$, окажется собственной функцией задачи (3.4), а значение λ , для которого $z_k(\lambda) = l$, – собственным значением. Поскольку попаданию $z_k(\lambda)$ в точку l должно было предшествовать прохождение через эту точку предыдущих нулей $z_0(\lambda), z_1(\lambda), \dots, z_{k-1}(\lambda)$, то равенство $z_k(\lambda) = l$ определяет λ_k , т. е. k -е собственное значение.

Характер предстоящих трудностей легко предвидеть с помощью той же функции $u(x, \lambda)$. Связь нулей этой функции с параметром λ и их эволюцией при изменении λ определяется уравнением $u(x, \lambda) = 0$ в виде неявной функции $x(\lambda)$. Эта функция заведомо многозначна (при каждом λ функция $u(x, \lambda)$ может иметь по x много нулей, и количество их на $[0, l]$ возрастает с возрастанием λ). В этой многозначности удобно разобраться, выделяя непрерывные ветви.

3.2.2. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть функция $Q(x)$ не убывает, а $M(x)$ строго возрастает на $[0, l]$. Тогда спектр Λ задачи (3.4) состоит из неограниченной последовательности вещественных строго положительных простых собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$. При этом соответствующая λ_k собственная функция $\varphi_k(x)$ имеет в $(0, l)$ точно k нулей, в каждом из которых она меняет знак; нули $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ перемежаются.

Доказательство вещественности, строгой положительности и простоты всех точек спектра Λ осуществлено ранее.

Обозначим через $Z(\lambda)$ множество нулей $u_\lambda(x)$ на $[0, l]$, где через $u_\lambda(x)$ обозначена функция $u(x, \lambda)$, удовлетворяющая

$$Du = \lambda u dM, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

ЛЕММА 3.2. В условиях теоремы существует счетный набор непрерывных и строго убывающих функций $\{\zeta_k(\lambda)\}_{k=1}^\infty$, каждая из которых определена на $(\lambda_{k-1}, +\infty)$ и принимает значения в $(0, l)$, причем $\zeta_k(\lambda_{k-1} + 0) = l$, и при $\lambda \in \mathbb{R}$ множество нулей $Z(\lambda)$ функции u_λ совпадает с $\{\zeta_1(\lambda), \dots, \zeta_k(\lambda)\}$.

Эта лемма влечет утверждение теоремы о количестве нулей собственных функций изучаемой задачи.

Доказательство этой центральной леммы основано на серии вспомогательных рассуждений.

Обозначим через $U_\delta(x_0, \lambda_0)$ множество точек $(x; \lambda)$ из $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, для которых $|x - x_0| < \delta$ и $|\lambda - \lambda_0| < \delta$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $u(x_0, \lambda_0) = 0$, причем $u(x, \lambda)$ непрерывна в некоторой окрестности $U_\delta(x_0, \lambda_0)$ точки (x_0, λ_0) и имеет непрерывную частную производную u'_λ с конечным изменением при фиксированном $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$,

а производная u'_x (которая, вообще говоря, может иметь разрывы) имеет конечное изменение на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ при каждом фиксированном $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$. Если производная $u'_x(\tau, \lambda)$ отлична от нуля и сохраняет знак при всех $\tau \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]_A$ и $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$, то существует прямоугольник $\{x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1, \lambda_0 - \delta_2 < \lambda < \lambda_0 + \delta_2\}$, внутри которого уравнение $u(x, \lambda) = 0$ определяет x как однозначную функцию от λ для $\lambda_0 - \delta_2 < \lambda < \lambda_0 + \delta_2$, принимающую значение x_0 при $\lambda = \lambda_0$ и обладающую производной, определенной на $I_{(A)} = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]_A$ и имеющей на этом множестве конечное изменение.

Доказательство вполне естественно, но весьма рутинно, и мы его опускаем ввиду громоздкости.

ЛЕММА 3.4. Каково бы ни было число $\lambda_* > 0$, найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для каждого нуля z функции $u(x, \lambda)$, т. е. $z \in Z(\lambda_*) = \{x \in (0, l) \mid u_{\lambda_*}(x) = 0\}$, существует и единственная функция $\zeta: U_\delta(\lambda_*) \rightarrow U_\varepsilon(z)$, удовлетворяющая условиям

- 1) $\zeta(\lambda_*) = z$,
- 2) $w_\lambda(\zeta(\lambda)) \equiv 0$;

при этом ζ убывает и непрерывна на $U_\delta(\lambda_*)$. Если к тому же $\lambda_* \in \Lambda$, то $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно считать такими, что функция $\zeta_1: (\lambda_*, \lambda_* + \delta) \rightarrow U_\varepsilon(l)$, удовлетворяющая условиям

- 1) $\zeta_1(\lambda_* + 0) = l$,
- 2) $u_\lambda(\zeta_1(\lambda)) \equiv 0$,

существует и единственна; при этом ζ_1 убывает и непрерывна на $(\lambda_*, \lambda_* + \delta)$.

Здесь, как и ранее, $U_\delta(\xi)$ обозначает δ -окрестность точки ξ , т. е. $(\xi - \delta, \xi + \delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $D_\lambda u = Du - \lambda u dM$. Пусть $z \in Z(\lambda_*)$. Функцию $u(x, \lambda)$ подставим в уравнение $Du = \lambda u dM$ и полученное тождество продифференцируем по λ (возможность дифференцирования следует из теоремы 1.8):

$$D(u'_\lambda) = \lambda u'_\lambda dM + u dM,$$

после подстановки λ_* будем иметь

$$D_{\lambda_*} h \equiv Dh - \lambda_* h dM = u dM, \quad (3.5)$$

где $h(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} u(x, \lambda_*)$. Умножив равенство (3.5) на $u_{\lambda_*}(x)$, получим

$$u_{\lambda_*} D_{\lambda_*} h = u_{\lambda_*}^2 dM \geq 0,$$

причем $h(0) = 0$. Если справедливо неравенство $h(z)u'(z - 0, \lambda_*) \leq 0$, то на $(0, z)$ применима теорема 2.10, согласно которой неравенство влечет выполнение на $(0, z)$ тождества $D_{\lambda_*} h \equiv 0$, которое в сочетании с $D_{\lambda_*} h = u_{\lambda_*} dM$ означает тривиальность u_{λ_*} на $(0, z)$, противоречащую конечности множества нулей u_{λ_*} . Стало быть, $h(z)u'(z - 0, \lambda_*) > 0$, что после применения теоремы о неявной функции и влечет (с учетом конечности $Z(\lambda_*)$) первую часть утверждения леммы.

Вторая часть леммы, касающаяся случая $\lambda_* \in \Lambda$, устанавливается такими же рассуждениями, с той лишь разницей, что теорема о неявной функции – “односторонняя”. Лемма 3.4 доказана.

ЛЕММА 3.5. *На любом интервале (ν_1, ν_2) , не содержащем точек спектра, число нулей постоянно, т. е. $|Z(\lambda)| \equiv \text{const}$ на (ν_1, ν_2) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равномерной непрерывности u_λ по λ вытекает замкнутость множества $G_Z = \{(\lambda; x) \in \mathbb{R} \times [0, l] \mid u_\lambda(x) = 0\}$. В самом деле, если $(\lambda_k; x_k) \in G_Z$ и $(\lambda_k; x_k) \rightarrow (\lambda_0; x_0)$, то $x_0 \in [0, l]$ и

$$|u_{\lambda_0}(x_0)| = |u_{\lambda_k}(x_k) - u_{\lambda_0}(x_0)| \leq |u_{\lambda_k}(x_k) - u_{\lambda_0}(x_k)| + |u_{\lambda_0}(x_k) - u_{\lambda_0}(x_0)|.$$

Остается воспользоваться равномерной сходимостью u_{λ_k} к u_{λ_0} и непрерывностью u_{λ_0} .

Пусть $\sigma \in (\nu_1, \nu_2)$. В силу леммы 3.4 $|Z(\lambda)| \geq |Z(\sigma)|$ в некоторой окрестности σ ; поэтому если $|Z(\lambda)| \neq \text{const}$ в любой достаточно малой окрестности σ , то существует последовательность $\sigma_k \rightarrow \sigma$ такая, что $|Z(\sigma_k)| > |Z(\sigma)|$. Стало быть, существует не менее $|Z(\sigma)| + 1$ почленно различных последовательностей $\{z_k^i\}_{k=1}^\infty \subset (0, 1)$ ($i = 1, \dots, |Z(\sigma)| + 1$; $z_k^i \neq z_k^j$ при $i \neq j$) таких, что $u_{\sigma_k}(z_k^i) = 0$ для всех i и k , при этом никакие две из них не могут, в силу леммы 3.4, сходиться к одной точке из $Z(\sigma) \cup \{l\}$ (последовательности $\{z_k^i\}_{k=1}^\infty$ можно считать сходящимися ввиду компактности $[0, l]$). Как следствие, существует i_0 такое, что $z_k^{i_0}$ сходится к 0. Но этот факт, с учетом конечности $Z(\sigma_k)$, противоречит тому, что $u_{\sigma_k}(x)$ не может иметь нулей в интервале неосцилляции, например, уравнения $L_{\sigma+1}u = 0$ (а такой интервал, примыкающий к $x = 0$, наверняка существует).

Тем самым установлено, что $|Z(\lambda)| \equiv |Z(\sigma)|$ в некоторой окрестности точки σ . Ввиду произвольности σ отсюда следует, что существует покрытие интервала (ν_1, ν_2) интервалами постоянства $|Z(\lambda)|$. По лемме Гейне–Бореля для всякого отрезка, содержащегося в (ν_1, ν_2) , существует конечное подпокрытие этого покрытия, что влечет постоянство $|Z(\lambda)|$ на любом отрезке из (ν_1, ν_2) . Лемма 3.5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Совершенно аналогично доказывается, что если в условиях предыдущей леммы $\nu_2 \in \Lambda$, то $|Z(\lambda)| = |Z(\nu_2)|$ для всех $\lambda \in (\nu_1, \nu_2]$; разница лишь в том, что в случае $\sigma = \nu_2$ нужно рассматривать левостороннюю окрестность точки ν .

ЛЕММА 3.6. *Если $\lambda_* \in \Lambda$, то $|Z(\lambda_* - 0)| = |Z(\lambda_*)| = |Z(\lambda_* + 0)| - 1$, т. е. при переходе λ через точку спектра задачи (3.1) количество нулей $w_\lambda(x)$ увеличивается ровно на 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $|Z(\lambda_* - 0)| = |Z(\lambda_*)|$ следует из последнего замечания. В силу второй части леммы 3.4 $|Z(\lambda_* + 0)| > |Z(\lambda_*)|$, поэтому если $|Z(\lambda_*)| \neq |Z(\lambda_* + 0)| - 1$, то $|Z(\lambda_* + 0)| \geq |Z(\lambda_*)| + 2$, что вместе с неравенством $|Z(\lambda_*) \cup \{l\}| < |Z(\lambda_* + 0)|$ приводит к противоречию с леммой 3.4.

4. Библиографические комментарии

Настоящая работа, как отмечалось в предисловии, посвящена изложению теории, распространяющей осцилляционные теоремы Штурма на случай уравнений с импульсными коэффициентами.

Сформированная Штурмом, осцилляционная теория вполне отвечала запросам научно-технического прогресса XIX века, соответствовала проблемам теории колебаний, теории критических напряжений колонн, балок и прочим важнейшим вопросам бурного научно-технического роста. В условиях, когда структура спектра была очевидно простой (дискретность, вещественность), наибольшую значимость имели качественные свойства собственных (амплитудных) функций, отражающие явные свойства гармонических колебаний, стоячих волн, форм потери устойчивости (типа числа узлов, числа точек экстремума, их взаиморасположение и проч.), которым и посвящена собственно осцилляционная теория Штурма.

На случай негладких систем (нерегулярно нагруженных упругих континуумов) эти результаты о форме собственных колебаний начали переноситься в начале XX века. Работы Стилтгеса о нити с бусинками, М. Г. Крейна и Ф. Р. Гантамахера о произвольно нагруженных стержнях, работы О. Келлога обозначили направление исследований в интересах физической теории колебаний. Именно этому направлению посвящена настоящая работа.

К середине XX века под влиянием запросов теоретической физики (квантовой механики) возник интерес к вопросам о структуре спектра, о его асимптотике, спектральной полноте, о разнообразных свойствах непрерывного спектра, структуре сингулярных компонент спектра (спектральных лакун, зон неустойчивости), вопросам о следах и проч. Бурное развитие получила спектральная теория дифференциальных операторов, ставшая становым хребтом функционального анализа. Это направление было активизировано проблематикой теоретической физики (квантовой механики) и привлекло внимание достаточно широких кругов ученых, что повлекло выход таких основополагающих монографий, как [55]–[62] и, в дальнейшем, многие сотни работ (см. библиографию в [63]–[78]). Определенное представление об исследованиях этого направления можно получить из библиографии работ [72]–[78].

Следует отметить, что в последнее десятилетие достаточно активно ведутся исследования для случаев разнообразных импульсных возмущений (сингулярных потенциалов) дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля (Шрёдингера). Наиболее глубокие результаты последнего времени связаны, в первую очередь, с именами А. А. Шкаликова и его учеников [80]–[85], Б. С. Митягина [86]–[88], В. А. Михайлеца [79], Р. О. Гринива и Я. В. Микитюк [89] и др.

Затрагиваемая в настоящей статье проблематика в условиях предельно простого устройства спектра не требует опоры на современные методы спектрального анализа. Мы развиваем методы, связанные с коренными идеями начала XX века и завязанные на поточечном толковании дифференциальных уравнений.

Список литературы

- [1] C. Sturm, “Mémoire sur une classe d’équations à différences partielles”, *J. Math. Pures Appl.*, **1** (1836), 373–444.
- [2] Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: F. V. Atkinson, *Discrete and continuous boundary problems*, Math. Sci. Eng., **8**, Academic Press, New York–London, 1964.
- [3] Э. Л. Айнс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, ОНТИ, Харьков, 1939; пер. с англ.: E. L. Ince, *Integration of ordinary differential equations*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1939.
- [4] Б. М. Левитан, *Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [5] И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Учебное пособие, МГУ, М., 1984.
- [6] Э. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1953; англ. изд.: E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1955.
- [7] Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. I, ИЛ, М., 1953; пер. с итал.: G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. I, Zanichelli, Bologna, 1948.
- [8] Ф. Трикоми, *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, М., 1962; пер. с итал.: F. Tricomi, *Equazioni differenziali*, Einaudi, Torino, 1948.
- [9] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Часть II: Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. Part II: Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*, Wiley, New York–London, 1963.
- [10] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [11] Ф. Р. Гантмахер, “О несимметрических ядрах Келлога”, *Докл. АН СССР*, **1** (1936), 3–5.
- [12] А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов, “Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. I”, *Сиб. матем. журн.*, **17:3** (1976), 606–626; англ. пер.: A. Yu. Levin, G. D. Stepanov, “One-dimensional boundary value problems with operators that do not lower the number of sign changes. I”, *Siberian Math. J.*, **17:3** (1976), 466–482; “One-dimensional boundary value problems with operators that do not lower the number of sign changes. II”, *Сиб. матем. журн.*, **17:3** (1976), 813–830; англ. пер.: *Siberian Math. J.*, **17:4** (1976), 612–625.
- [13] Ю. В. Покорный, “О неклассической задаче Валле-Пуссена”, *Дифференц. уравнения*, **14:6** (1978), 1018–1027; англ. пер.: Yu. V. Pokornyi, “A nonclassical de la Vallée-Poussin problem”, *Differ. Equ.*, **14:6** (1978), 725–732.
- [14] А. В. Боровских, Ю. В. Покорный, “Системы Чебышёва–Хаара в теории разрывных ядер Келлога”, *УМН*, **49:3** (1994), 3–42; англ. пер.: A. V. Borovskikh, Yu. V. Pokornyi, “Chebyshev–Haar systems in the theory of discontinuous Kellogg kernels”, *Russian Math. Surveys*, **49:3** (1994), 1–42.
- [15] Ю. В. Покорный, К. П. Лазарев, “Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач”, *Дифференц. уравнения*, **23:4** (1987), 658–670; англ. пер.: Yu. V. Pokornyi, K. P. Lazarev, “Some oscillation theorems for many-point problems”, *Differ. Equ.*, **23:4** (1987), 452–462.
- [16] В. Я. Дерр, “К обобщенной задаче Валле-Пуссена”, *Дифференц. уравнения*, **23:11** (1987), 1861–1872; англ. пер.: V. Ya. Derr, “On the generalized de la Vallée-Poussin problem”, *Differ. Equ.*, **23:11** (1987), 1254–1263.

- [17] А. Ф. Филлипов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985.
- [18] J. Kurzweil, "Generalized ordinary differential equations", *Czechoslovak Math. J.*, **8(83)** (1958), 360–388.
- [19] А. Халанай, Д. Векслер, *Качественная теория импульсных систем*, Мир, М., 1971; пер. с рум.: A. Halanay, D. Wexler, *Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri*, Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucharest, 1968.
- [20] П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский, *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: P. Antosik, J. Mikusinski, R. Sikorski, *Theory of distributions. The sequential approach*, Elsevier, Amsterdam; PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1973.
- [21] А. Ю. Левин, "Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. II", *Вестн. ЯрГУ*, 1974, № 8, 122–144.
- [22] Л. Янг, *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: L. Young, *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Saunders, Philadelphia–London–Toronto, 1969.
- [23] Е. Л. Тонков, "К вопросу о неосцилляции линейной системы", *Нелинейные колебания и теория управления*, № 4, Удмурт. гос. ун-т, Ижевск, 1982, 62–74.
- [24] С. Т. Завалицин, А. Н. Сесекин, *Импульсные процессы: модели и приложения*, Наука, М., 1991.
- [25] В. П. Максимов, "О некоторых обобщениях обыкновенных дифференциальных уравнений, краевых задач и их приложениях к задачам экономической динамики", *Вест. ПермГУ*, 4 (1997), 103–120.
- [26] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, "Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами", *Матем. заметки*, **66:6** (1999), 897–911; англ. пер.: A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, "Sturm–Liouville operators with singular potentials", *Math. Notes*, **66:6** (1999), 741–753.
- [27] В. Я. Дерр, Д. М. Кинзебулатов, "Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями, допускающими умножение на разрывные функции", *Вестн. Удмурт. ун-та*, 2005, № 1, 35–58.
- [28] В. И. Родионов, "Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса в алгебре прерывистых функций", *Изв. Ин-та матем. и информ. УГУ*, Ижевск, 2005, 3–78.
- [29] В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк, *Оптимальное импульсное управление с приложениями*, Физматлит, М., 2000.
- [30] Ю. В. Егоров, *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, М., 1984; англ. пер.: Yu. V. Egorov, *Linear differential equations of principal type*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1986.
- [31] А. Д. Мышкис, "О решениях линейного однородного двучленного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенным коэффициентом", *Дифференц. уравнения*, **32:5** (1996), 615–619; англ. пер.: A. D. Myshkis, "Solutions of a linear homogeneous binomial second-order differential inequality with a distribution as a coefficient", *Differ. Equ.*, **32:5** (1996), 619–623.
- [32] Ю. В. Покорный, "Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях", *Докл. РАН*, **364:2** (1999), 167–169; англ. пер.: Yu. V. Pokornyi, "The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations", *Dokl. Math.*, **59:1** (1999), 34–37.
- [33] Ю. В. Покорный, "О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма–Лиувилля", *Докл. РАН*, **383:5** (2002), 601–604; англ. пер.: Yu. V. Pokornyi, "The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations", *Dokl. Math.*, **65:2** (2002), 262–265.

- [34] Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров, “Об одном классе обобщенных задач Штурма–Лиувилля с разрывными решениями”, *Дифференциальные уравнения и смежные вопросы*, Междунаро. конф., посвящ. 103-летию со дня рожд. И. Г. Петровского (Москва, 2004), Сборник тезисов, 166–167.
- [35] Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров, “О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны”, *Изв. ВУЗов Северо-Кавказ. региона. Естеств. науки. Матем. и мех. сплошной среды*, Спецвыпуск, 2004, 186–191.
- [36] Ю. В. Покорный, С. А. Шабров, “Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами”, *Тр. матем. ф-та ВГУ (нов. сер.)*, **4** (1999), 84–96.
- [37] Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov, “Toward a Sturm–Liouville theory for an equation with generalized coefficients”, *J. Math. Sci.*, **119**:6 (2004), 769–787.
- [38] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. (ред.), *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2004.
- [39] И. С. Кац, М. Г. Крейн, “О спектральных функциях струны”, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, М., 1968, 648–737; англ. пер.: I. S. Kac, M. G. Krein, “On the spectral functions of the string”, *Nine papers in analysis*, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. II, **103**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974, 19–102.
- [40] W. Feller, “Generalized second order differential operators and their lateral conditions”, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 459–504.
- [41] Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, “Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети”, *УМН*, **59**:300 (2004), 115–150; англ. пер.: Yu. V. Pokornyi, V. L. Pryadiev, “Some problems of the qualitative Sturm–Liouville theory on a spatial network”, *Russian Math. Surveys*, **59**:3 (2004), 515–552.
- [42] У. Рудин, *Основы математического анализа*, 2-е изд., Мир, М., 1966; пер. с англ.: W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 2nd ed., New York–San Francisco–Toronto–London, McGraw-Hill; Tokyo, Kogakusha, 1964.
- [43] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.
- [44] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949; пер. с польск.: S. Saks, *Theory of the integral*, 2, revised edit., G. E. Stechert & Co. VI, New York, 1937.
- [45] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1968.
- [46] М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов, *Мера и интеграл*, Факториал, М., 2002.
- [47] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*, ч. 1: *Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators. I. General theory*, Pure Appl. Math., **6**, Interscience, New York–London, 1958.
- [48] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979; пер. с франц.: F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Académie des Sciences de Hongrie, Budapest, 1952.
- [49] Э. Ф. Беккебах, Р. Беллман, *Неравенства*, Мир, М., 1965; пер. с англ.: E. F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **30**, Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1961.
- [50] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*. I, Гостехиздат, М.–Л., 1951; пер. с нем.: R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik. B. I*, Interscience, New York, 1943.
- [51] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1950; пер. с нем.: E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1944.
- [52] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [53] Ю. В. Покорный, А. В. Боровских, “О дефектах аксиоматики функции Грина”, *Докл. РАН*, **384**:4 (2002), 460–464; англ. пер.: Yu. V. Pokornyi, A. V. Borovskikh, “On defects of axiomatics of Green’s function”, *Dokl. Math.*, **65**:3 (2002), 399–403.

- [54] М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев, *Позитивные линейные системы. Метод положительных операторов*, Теория и методы системного анализа, Наука, М., 1985; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skij, Je. A. Lifshits, A. V. Sobolev, *Positive linear systems. The method of positive operators*, Sigma Ser. Appl. Math., **5**, Heldermann-Verlag, Berlin, 1989.
- [55] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматлит, М., 1959; англ. пер.: I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions. Vol. 1: Properties and operations*, Academic Press, New York, London, 1964; *Generalized functions. Vol. 2: Spaces of fundamental and generalized functions*, 1968; *Generalized functions. Vol. 3. Theory of differential equations*, 1967.
- [56] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.
- [57] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию: Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1970; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Introduction to spectral theory: Selfadjoint ordinary differential operators*, Transl. Math. Monogr., **39**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [58] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [59] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **22**, Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1986.
- [60] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. II: Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. II: Harmonic analysis. Self-adjointness*, Academic Press, New York–London, 1975.
- [61] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984; англ. пер.: B. M. Levitan, *Inverse Sturm–Liouville problems*, VNU Science Press, Utrecht, 1987.
- [62] С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг–Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, М., 1991; пер. с англ.: S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, Texts and Monogr. Phys., Springer-Verlag, New York, 1988.
- [63] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, “Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции”, *Докл. АН СССР*, **77** (1951), 557–560.
- [64] Б. М. Левитан, “Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма–Лиувилля”, *УМН*, **19:1** (1964), 161–165.
- [65] В. А. Садовничий, “О тождествах для собственных значений системы Дирака и некоторых других систем высшего порядка”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **22:3** (1967), 37–47.
- [66] М. В. Келдыш, “О полноте собственных функций некоторых классов несамопряженных линейных операторов”, *УМН*, **26:4** (1971), 15–41; англ. пер.: M. V. Keldysh, “On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators”, *Russian Math. Surveys*, **26:4** (1971), 15–44.
- [67] В. Ф. Лазуткин, Т. Ф. Панкратова, “Асимптотика ширины лакун в спектре оператора Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом”, *Докл. АН СССР*, **215** (1974), 1048–1051; англ. пер.: V. F. Lazutkin, T. F. Pankratova, “Asymptotics of the width of gaps in the spectrum of the Sturm–Liouville operator with a periodic potential”, *Soviet Dokl. Math.*, **15** (1974), 649–653.

- [68] P. Kurasov, “On the Coulomb potentials in one dimension”, *J. Phys. A*, **29**:8 (1996), 1767–1771.
- [69] Г. В. Радзиевский, “Асимптотика собственных значений регулярной краевой задачи”, *Укр. матем. журн.*, **48**:4 (1996), 483–519; англ. пер.: G. V. Radzievskii, “Asymptotics of the eigenvalues of a regular boundary value problem”, *Ukrainian Math. J.*, **48**:4 (1997), 537–575.
- [70] P. Djakov, B. Mityagin, “Spectra of 1-D periodic Dirac operators and smoothness of potentials”, *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*, **25**:4 (2003), 121–125.
- [71] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, “Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials”, *Inverse Problems*, **19**:3 (2003), 665–684.
- [72] М. Г. Гасымов, “Спектральный анализ одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:1 (1980), 14–19; англ. пер.: M. G. Gasymov, “Spectral analysis of a class of second-order non-self-adjoint differential operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **14**:1 (1980), 11–15.
- [73] В. А. Михайлец, “Критерий дискретности спектра одномерного оператора Шрёдингера с δ -взаимодействиями”, *Функц. анализ и его прил.*, **28**:4 (1994), 85–87; англ. пер.: V. A. Mikhailets, “A discreteness criterion for the spectrum of a one-dimensional Schrödinger operator with δ -interactions”, *Funct. Anal. Appl.*, **28**:4 (1994), 290–292.
- [74] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “Собственное значение и след оператора Штурма–Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала”, *Докл. РАН*, **365**:3 (1999), 295–297; англ. пер.: V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichij, “The eigenvalue and trace of the Sturm–Liouville operator as differentiable functions of a summable potential”, *Dokl. Math.*, **59**:2 (1999), 220–222.
- [75] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов, “Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов”, *Матем. заметки*, **66**:5 (1999), 723–733; англ. пер.: M. I. Neiman-zade, A. A. Shkalikov, “Schrödinger operators with singular potentials from the space of multipliers”, *Math. Notes*, **66**:5 (1999), 599–607.
- [76] E. Korotyaev, “Characterization of the spectrum of Schrödinger operator with periodic distributions”, *Int. Math. Res. Not.*, 2003, № 37, 2019–2031.
- [77] Б. С. Митягин, “Сходимость разложений по собственным функциям оператора Дирака”, *Докл. РАН*, **393**:4 (2003), 456–459.
- [78] А. П. Хромов, “Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях”, *Матем. сб.*, **197**:11 (2006), 115–142; англ. пер.: A. P. Khromov, “Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines”, *Sb. Math.*, **197**:11 (2006), 1669–1696.
- [79] В. А. Михайлец, “Структура непрерывного спектра одномерного оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:2 (1996), 90–93; англ. пер.: V. A. Mikhailets, “The structure of the continuous spectrum of a one-dimensional Schrödinger operator with point interactions”, *Funct. Anal. Appl.*, **30**:2 (1996), 144–146.
- [80] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **69**:3 (2001), 427–442; англ. пер.: A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “Trace formula for Sturm–Liouville operators with singular potentials”, *Math. Notes*, **69**:3–4 (2001), 387–400.
- [81] А. М. Савчук, “О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом”, *Матем. заметки*, **69**:2 (2001), 277–285; англ. пер.: A. M. Savchuk, “On the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator with a singular potential”, *Math. Notes*, **69**:1–2 (2001), 245–252.
- [82] А. А. Шкаликов, Д.-Г. Бак, “Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шрёдингера с потенциалами-распределениями”, *Матем.*

- заметки, **71**:5 (2002), 643–651; англ. пер.: J.-G. Bak, A. A. Shkalikov, “Multipliers in dual Sobolev spaces and Schrödinger operators with distribution potentials”, *Math. Notes*, **71**:5–6 (2002), 587–594.
- [83] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями”, *Тр. ММО*, **64** (2003), 159–212; англ. пер.: A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “Sturm–Liouville operators with distribution potentials”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2003, 143–192.
- [84] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева”, *Матем. заметки*, **80**:6 (2006), 864–884; англ. пер.: A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “On the eigenvalues of the Sturm–Liouville operator with potentials from Sobolev spaces”, *Math. Notes*, **80**:5–6 (2006), 814–832.
- [85] Е. А. Ширяев, А. А. Шкаликов, “Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы”, *Матем. заметки*, **81**:4 (2007), 636–640; англ. пер.: E. A. Shiryayev, A. A. Shkalikov, “Regular and completely regular differential operators”, *Math. Notes*, **81**:3–4 (2007), 566–570.
- [86] P. Djakov, B. Mityagin, “Asymptotics of instability zones of Hill operators with a two term potential”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **339**:5 (2004), 351–354.
- [87] P. Djakov, B. Mityagin, “Instability zones of a periodic 1D Dirac operator and smoothness of its potential”, *Comm. Math. Phys.*, **259**:1 (2005), 139–183.
- [88] П. Джаков, Б. С. Митягин, “Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака”, *УМН*, **61**:4 (2006), 77–182; англ. пер.: P. Djakov, B. S. Mityagin, “Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators”, *Russian Math. Surveys*, **61**:4 (2007), 663–766.
- [89] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, “Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. IV. Potentials in Sobolev space scale”, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **49**:2 (2006), 309–329.

Ю. В. Покорный (Yu. V. Pokornyi)

Воронежский государственный университет

E-mail: pokorniy@kma.vsu.ru

Поступила в редакцию

24.09.2007

М. Б. Зверева (M. B. Zvereva)

Воронежский государственный университет

E-mail: margz@rambler.ru

С. А. Шабров (S. A. Shabrov)

Воронежский государственный университет

E-mail: shaspoteha@mail.ru