Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Артамкин, Элементарное доказательство тождества Мики–Загира–Гесселя, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:11:34

Элементарное доказательство тождества Мики–Загира–Гесселя

И. В. Артамкин

В 1978 г. в работе Х. Мики [1] появилось необычное тождество, связывающее суммы произведений чисел Бернулли вида $\sum B_i B_{n-i}$ и $\sum \binom{n}{i} B_i B_{n-i}$. Первоначальное доказательство Мики использовало p -адические методы, позднее появилось другое доказательство этого тождества средствами p -адического анализа [2]. В 2000 г. похожее тождество было открыто К. Фабером и Р. Пандхарипанде [3], а его доказательство было дано Д. Загиром в приложении к этой же работе [3]. В 2005 г. А. Гессель [4] доказал тождество, связывающее аналогичные суммы чисел и многочленов Бернулли, частными случаями которого являются тождества Мики и Фабера–Пандхарипанде–Загира. Доказательство Гесселя использует числа Стирлинга второго рода и многочлены Норлунда. В настоящей работе приводится короткое элементарное доказательство последнего тождества, использующее лишь стандартные свойства многочленов Бернулли и биномиальных коэффициентов.

Я благодарю Дона Загира, познакомившего меня с этим кругом вопросов, и Институт Макса Планка в Бонне, чьим гостеприимством я пользовался во время работы над этой заметкой.

Для натурального n положим $\mathcal{B}_n(x) = B_n(x)/n$, где $B_n(x)$ – многочлен Бернулли с номером n , и $\beta_n = \mathcal{B}_n(0) = B_n/n$, где B_n – n -е число Бернулли; положим $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$. Тождество Мики–Загира–Гесселя в форме Гесселя (формула (12) работы [4]¹) утверждает, что

$$n \left(-B_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{B_i(x)}{i} \frac{B_{n-i}(x)}{n-i} \right) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i(x) \beta_{n-i} + 2H_{n-1} B_n(x). \quad (1)$$

Это тождество можно переписать в виде

$$-(n-1)\mathcal{B}_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{B}_i(x)\mathcal{B}_{n-i}(x) = \frac{2}{n}\beta_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} \mathcal{B}_i(x)\beta_{n-i} + 2H_{n-1}\mathcal{B}_n(x), \quad (2)$$

в такой форме мы его и будем доказывать. Для доказательства рассмотрим оператор первой разности

$$\Delta: f(x) \mapsto f(x+1) - f(x). \quad (3)$$

Поскольку $\Delta(\mathcal{B}_n(x)) = x^{n-1}$, мы имеем

$$\Delta \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{B}_i(x)\mathcal{B}_{n-i}(x) \right) = (n-1)x^{n-2} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{B}_i(x)x^{n-i-1}; \quad (4)$$

поэтому, применяя Δ к обеим частям равенства (2) и деля на 2, получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{B}_i(x)x^{n-i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} x^{i-1} \beta_{n-i} + H_{n-1}x^{n-1}. \quad (5)$$

Полагая $m = n-1$ и обозначая в правой части $k = n-i$, получаем

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{B}_i(x)x^{m-i} = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} x^{m-k} \beta_k + H_m x^m. \quad (6)$$

¹Отметим, что наше определение чисел β_n не совпадает с определением Гесселя для $n = 1$.

Используя стандартную формулу для коэффициентов многочленов Бернулли ($B_l(x) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} B_k x^{l-k}$), нетрудно доказать формулу (6), преобразуя ее левую часть:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{B}_i(x) x^{m-i} &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} \left(\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} B_k x^{i-k} \right) x^{m-i} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} \left(\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} B_k x^{m-k} \right) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} x^m + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=k}^m \frac{1}{i} \binom{i}{k} \right) \beta_k x^{m-k} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} x^m + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=k}^m \binom{i-1}{k-1} \right) \beta_k x^{m-k} = H_m x^m + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \beta_k x^{m-k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тем самым мы доказали, что тождество (2) выполняется по крайней мере с точностью до некоторой константы C_n :

$$-(n-1)\mathcal{B}_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{B}_i(x) \mathcal{B}_{n-i}(x) = \frac{2}{n} \beta_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} \mathcal{B}_i(x) \beta_{n-i} + 2H_{n-1} \mathcal{B}_n(x) + C_n. \quad (8)$$

Для завершения доказательства остается заметить, что производная тождества (8) для некоторого значения n доставляет тождество (1) для $n-1$ (теперь нам потребуется формула $\mathcal{B}_n(x)' = B_{n-1}(x)$).

Вычисляем производную левой части (8):

$$\begin{aligned} &-(n-1)B_{n-2}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} B_{i-1}(x) \mathcal{B}_{n-i}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{B}_i(x) B_{n-i-1}(x) \\ &= -(n-1)B_{n-2}(x) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{n-i} B_{i-1}(x) B_{n-i}(x) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i} B_i(x) B_{n-i-1}(x) + 2 \frac{B_{n-1}(x)}{n-1} \\ &= -(n-1)B_{n-2}(x) + \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{1}{n-i-1} + \frac{1}{i} \right) B_i(x) B_{n-i-1}(x) + 2 \frac{B_{n-1}(x)}{n-1} \\ &= -(n-1)B_{n-2}(x) + (n-1) \sum_{i=1}^{n-2} \frac{B_i(x)}{i} \frac{B_{n-i-1}(x)}{n-i-1} + 2 \frac{B_{n-1}(x)}{n-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисляем производную правой части (8):

$$\begin{aligned} &2 \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} B_{i-1}(x) \beta_{n-i} + 2H_{n-1} B_{n-1}(x) \\ &= 2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} B_j(x) \beta_{n-1-j} + 2H_{n-2} B_{n-1}(x) + 2 \frac{B_{n-1}(x)}{n-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Приравнявая (9) и (10), получаем тождество (1) для значения $n-1$.

Список литературы

- [1] H. Miki, *J. Number Theory*, **10**:3 (1978), 297–302. [2] K. Shiratani, S. Yokoyama, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, **36**:1 (1982), 73–83. [3] C. Faber, R. Pandharipande, *Michigan Math. J.*, **48**:1 (2000), 215–252, Appendix by D. Zagier, pp. 240–252. [4] I. M. Gessel, *J. Number Theory*, **110**:1 (2005), 75–82.

И. В. Артэмкин (I. V. Artamkin)

Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)

E-mail: artamkin@mail.ru

Представлено С. К. Ландо

Принято редколлегией

06.10.2007