Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Г. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин, О классе функций, представимых в области интегралом типа Коши–Стилтьеса, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm855>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:39:02

О КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ОБЛАСТИ ИНТЕГРАЛОМ ТИПА КОШИ–СТИЛТЬЕСА

Л. А. МАРКУШЕВИЧ, Г. Ц. ТУМАРКИН

Устанавливаются условия аппроксимационного характера представимости аналитических в произвольной области G функций $f(z)$ интегралами типа Коши–Стилтьеса.

Полученный в работе критерий является распространением на любые области результата Г. Ц. Тумаркина для случая круга, опубликованного в 1956 г. [1, теорема 2]. В 1958 г. В. П. Хавинным опубликован другой критерий представимости аналитической функции интегралом типа Коши–Стилтьеса [2]. Из принципа двойственности экстремальных задач теории аналитических функций, развитого впервые в общем виде С. Я. Хавинсоном [3] и повторенного впоследствии в целом ряде работ (см. [4], [5]), следует, что упомянутые два критерия являются двойственными и могут быть выведены один из другого. Впоследствии С. Я. Хавинсон [6] установил критерий представимости интегралом типа Коши–Стилтьеса аналитической в дополнении к компакт Γ функции $f(z)$.

Введем следующие обозначения. Пусть $\{G_k\}$ – последовательность конечносвязных областей, исчерпывающих G ($\overline{G}_k \subset G$). Каждая из этих областей G_k обладает границей ∂G_k , составленной из N_k замкнутых жордановых спрямляемых контуров γ_{ki} , $i = 1, 2, \dots, N_k$. В случае n -связной области G очевидно, что все $N_k = n$. Через G_{ki} будем обозначать ту из областей, ограниченных γ_{ki} , которая содержит фиксированную точку $z_0 \in G$, а через G_{ki}^* – дополнение к $\overline{G}_{ki}$ относительно расширенной комплексной плоскости. Через $E_1(D)$, как обычно, обозначен класс В. И. Смирнова, состоящий из аналитических в области D функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{\{\lambda_k\}} \int_{\lambda_k} |f(z)| |dz| = C(f) < \infty.$$

Здесь $\lambda_k \subset D$ – произвольная последовательность замкнутых спрямляемых кривых, $\lambda_k \rightarrow \partial D$.

ТЕОРЕМА. Для представимости аналитической в области G функции $f(z)$ интегралом типа Коши–Стилтьеса по ∂G необходимо, чтобы для любого исчерпания G последовательностью $G_k \subset G$ нашлись аналитические в G_{ki}^* функции $\Phi_{ki}^*(z)$ класса $E_1(G_{ki}^*)$ (при $\infty \in G_{ki}^*$, $\Phi_{ki}^*(\infty) = 0$) такие, что

$$(1) \quad \sup_k \sum_{i=1}^{N_k} \int_{\gamma_{ki}} |f(\zeta) - \Phi_{ki}^*(\zeta)| |d\zeta| < \infty.$$

Достаточным условием представимости аналитической в произвольной области G функции $f(z)$ интегралом типа Коши–Стилтьеса по ∂G является выполнение (1) хотя бы для одной описанной выше последовательности $\{G_k\}$, исчерпывающей G , и соответствующих $\Phi_{ki}^*(z)$ (причем если $\infty \in G$, то предполагается $f(\infty) = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наметим ход рассуждений.

Достаточность. Запишем $f(z)$ в области G_k и $\Phi_{ki}^*(z)$ в G_{ki}^* интегралами Коши. Получим для $z \in G_k$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{ki}} \frac{\Phi_{ki}^*(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad i = 1, 2, \dots, N_k.$$

Отсюда следует представление $f(z)$ в G_k интегралом типа Коши–Стилтьеса

$$(2) \quad f(z) = \int_{\partial G_k} \frac{d\mu_k(\zeta)}{\zeta - z}, \quad \text{где } d\mu_k(\zeta)|_{\zeta \in \gamma_{ki}} = d\mu_{ki}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} [f(\zeta) - \Phi_{ki}^*(\zeta)] d\zeta.$$

При выполнении условия (1) теоремы последовательность норм мер $d\mu_k(\zeta)$ ограничена. Выбирая слабо сходящуюся к мере $d\mu(\zeta)$ подпоследовательность $\{d\mu_{k_j}(\zeta)\}$, предельным переходом из (2) по этой подпоследовательности получим представление

$$(3) \quad f(z) = \int_{\partial G} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in G,$$

функции $f(z)$ в виде интеграла типа Коши–Стилтьеса.

Необходимость. Пусть $f(z)$ представляется в виде интеграла Коши–Стилтьеса (3). Обозначим через $b_{ki}^*(z)$ аналитические в G_{ki}^* функции с условием $|b_{ki}^*(z)| \leq 1$, $z \in G_{ki}^*$, а также $b_{ki}^*(\infty) = 0$, если $\infty \in G_{ki}^*$. Запишем для односвязной области G_{ki}^* упомянутый выше принцип двойственности:

$$(4) \quad \sup_{|b_{ki}^*(\zeta)| \leq 1} \left| \int_{\gamma_{ki}} b_{ki}^*(\zeta) f(\zeta) d\zeta \right| = \inf_{\Phi_{ki}^* \in E_1(G_{ki}^*)} \int_{\gamma_{ki}} |f(\zeta) - \Phi_{ki}^*(\zeta)| |d\zeta|.$$

Оценим интеграл в левой части (4). Для этого представим интеграл типа Коши–Стилтьеса (3), выражающий $f(\zeta)$, $\zeta \in \gamma_{ki}$, в виде двух слагаемых $I_1(\zeta)$ и $I_2(\zeta)$, где первый интеграл берется по $\partial G \cap G_{ki}^*$, а второй – по $\partial G \setminus G_{ki}^*$. Нетрудно проверить, что $I_2(\zeta)$ – аналитическая функция в $\overline{G_{ki}^*}$, т.е. $\int_{\gamma_{ki}} b_{ki}^*(\zeta) I_2(\zeta) d\zeta = 0$ (по теореме Коши). Откуда вытекает, что

$$(5) \quad \sup_{|b_{ki}^*(\zeta)| \leq 1} \left| \int_{\gamma_{ki}} b_{ki}^*(\zeta) f(\zeta) d\zeta \right| \leq 2\pi \int_{\partial G \cap G_{ki}^*} |d\mu(t)| = C.$$

Суммируя (5), записанные для всех компонент границы G_k , имеем из (4), выбрав для всякой области G_k набор функций $\Phi_{ki}^* \in E_1(G_{ki}^*)$ со свойством $\sum_{i=1}^{N_k} \int_{\gamma_{ki}} |f(\zeta) - \Phi_{ki}^*(\zeta)| |d\zeta| < C + \varepsilon$, что и доказывает (1).

При дополнительных довольно общих предположениях о свойствах границ областей G_k , исчерпывающих G (достаточно предположить области G_k жордановыми с границей $\partial G_k = \bigcup_{i=1}^{N_k} \gamma_{ki}$, где γ_{ki} ограничивают компоненты G_{ki}^* к области $\overline{G_{ki}^*}$), можно использовать в аппроксимационном критерии теоремы более простые функции, чем $\Phi_{ki}^* \in E_1$, а именно, линейные комбинации $P_{ki}^*(\zeta)$ системы степеней $\{1/(\zeta - z_0)^m\}_{m \geq 0}$, $z_0 \in G$.

Сопоставим упомянутый выше результат С.Я. Хавинсона и критерий настоящей работы.

1. Критерий С.Я. Хавинсона представимости аналитической функции в дополнении к компакт Γ интегралом типа Коши–Стилтьеса формулируется в терминах решения двойственных экстремальных задач для последовательностей $\{\Gamma_k\}$ покрытий компакта Γ . Так как Γ_k в случае произвольного компакта Γ являются объединением конечного числа конечносвязных замкнутых областей, то экстремальные задачи решаются для *многосвязных* областей. В то же время применение нашего критерия в случае произвольной области G приводит к аппроксимационным проблемам для *односвязных* областей, что является более простой задачей. Для случая, когда рассматриваемая область G содержит ∞ , результат теоремы следует из критерия С.Я. Хавинсона, если в качестве Γ взять дополнение к G .

2. В работе С.Я. Хавинсона дается критерий представимости одним интегралом типа Коши–Стилтьеса одновременно во всех компонентах дополнения к компакт Γ заданных аналитических функций во всех этих компонентах. Однако, также интересна и рассматриваемая здесь задача представления функции интегралом типа Коши–Стилтьеса лишь в одной компоненте G . При этом интеграл типа Коши–Стилтьеса (если он существует при заданных $f(z)$ и G) определяет аналитические функции во всех других компонентах дополнения к ∂G , которые *a priori* не фиксировались.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тумаркин Г. Ц. // УМН. 1956. Т. 11. № 4. С. 163–166. [2] Хавин В. П. // Вестник ЛГУ. 1956. № 1. С. 66–79. [3] Хавинсон С. Я. // Учен. зап. МГУ. Сер. матем. 1951. Т. 148. № 4. С. 133–143. [4] Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1960. С. 77–95. [5] Хавинсон С. Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различных обобщений. М.: Изд-во МИСИ, 1981. [6] Хавинсон С. Я. Дополнительные вопросы теории устранимых особенностей аналитических функций. М.: Изд-во МИСИ, 1982. [7] Маркушевич Л. А., Тумаркин Г. Ц. Критерий представимости аналитических функций // Сб. трудов МГСУ. М., 1997. С. 36–44.

Принято редколлегией
29.10.1996